$$\left(\Phi^* \theta\right)_u (p) = \theta_{\Phi(u)}(\Phi_* p) = \theta_u(p),$$

где $\Phi = L\left(j^k \varphi\right)$ – левый сдвиг.

Форма θ характеризует продолжения диффеоморфизмов базы B.

Теорема 2. Пусть ψ – локальный диффеоморфизм группоида Ли $\Pi^k(B)$, который сохраняет α-слои и фундаментальную форму. Тогда ψ совпадает с локальным левым сдвигом группоида Ли $\Pi^k(B)$, определенным локальным диффеоморфизмом $\beta \circ \psi \circ \varepsilon$.

Тогда G-структура порядка k на многообразии B определяется подгруппоидом Ли Ω группоида Ли $\Pi^k(B)$. Сужение формы θ является фундаментальной формой G-структуры Ω.

Литература

1. *Белько И.В.* Слоеные группоиды Ли и метод Эресмана в дифференциальной геометрии. Мн. Белгосуниверситет. 1977.
2. *Mackenzie K.* Lie groupoids and Lie algebroids in Differential geometry. Cambridge: Univ. Press. 1987.
3. *Guillemin V., Sternberg S.* Deformation theory of pseudogroup structures// Mem. Amer. Math. Soc. 1966. №64. P.1–80.

ИНВАРИАНТНЫЕ ТЕНЗОРНЫЕ СТРУКТУРЫ ВАЛЕНТНОСТИ ДВА НА МНОГООБРАЗИЯХ ПАР ПЛОСКОСТЕЙ ПРОСТРАНСТВА МИНКОВСКОГО

О. Л. Андык

Пусть $\boldsymbol{R}_1^4$ – четырехмерное векторное пространство Минковского, $(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \varepsilon_4)$ – фиксированный базис пространства $\boldsymbol{R}_1^4$, в котором скалярное произведение приводится к нормальному виду

$$(\varepsilon_1^2 = \varepsilon_2^2 = \varepsilon_3^2 = 1;\ \varepsilon_4^2 = -1;\ \varepsilon_i\varepsilon_j = 0,\ 1 \le i < j \le 4).$$

Группа всех изометрий пространства $\boldsymbol{R}_1^4$ может быть отождествлена с псевдоортогональной группой

$$G = O(3,1) = \{A \in GL(4, \mathbf{R}) |\ A^T E_{1,3} A = E_{1,3}\,,\ E_{1,3} = diag(1, 1, 1, -1)\}.$$

Пусть M – множество пар $\{V_1, V_2\}$ ненулевых взаимно дополнительных ортогональных подпространств (плоскостей) пространства $\boldsymbol{R}_1^4$. Группа $O(3,1)$ естественным образом действует на множестве M. Из теоремы Витта [1] следует, что относительно этого действия M разбивается на три орбиты: $M = M_1 \cup M_2 \cup M_3$, где M_1 – орбита элемента $m_1 = \{<\varepsilon_1, \varepsilon_2,$

$\varepsilon_3\rangle$, $\langle\varepsilon_4\rangle\}$, M_2 – орбита элемента $m_2 = \{\langle\varepsilon_1\rangle, \langle\varepsilon_2, \varepsilon_3, \varepsilon_4\rangle\}$, M_3 – орбита элемента $m_3 = \{\langle\varepsilon_1, \varepsilon_2\rangle, \langle\varepsilon_3, \varepsilon_4\rangle\}$.

Символ $\langle\varepsilon_i , ...\rangle$ обозначает линейную оболочку векторов ε_i, ... Будем рассматривать каждую из орбит M_i как дифференцируемое многообразие класса C^∞, задав на M_i гладкую структуру с помощью естественного отождествления M_i и однородного пространства $O(3,1)/G_i$ группы Ли $O(3,1)$. Здесь G_i – подгруппа инвариантности элемента m_i, т. е.

$$G_1 = \left\{ A = \begin{pmatrix} B & 0 \\ 0 & C \end{pmatrix} \in GL(4, \mathbf{R}) \mid B \in O(3), C \in O(1) \right\},$$

$$G_2 = \left\{ A = \begin{pmatrix} B & 0 \\ 0 & C \end{pmatrix} \in GL(4, \mathbf{R}) \mid B \in O(1), C \in O(2,1) \right\},$$

$$G_3 = \left\{ A = \begin{pmatrix} B & 0 \\ 0 & C \end{pmatrix} \in GL(4, \mathbf{R}) \mid B \in O(2), C \in O(1,1) \right\}.$$

Пусть $End_G(TM_i)$ – множество G-инвариантных аффиноров (тензорных полей типа (1, 1) на многообразии M_i, или (что то же самое) G-инвариантных эндоморфизмов касательного расслоения TM_i многообразия M_i), $B_G(M_i)$ – множество G-инвариантных тензорных полей на M_i типа (0,2) (полей билинейных форм на M_i). Относительно естественных операций $End_G(TM_i)$ является ассоциативной алгеброй, а $B_G(M_i)$ – векторным пространством.

В статье решаются задачи описания алгебры $End_G(TM_i)$ и пространства $B_G(M_i)$. Эти задачи обычным образом линеаризуются и сводятся к соответствующим задачам теории алгебр Ли (см., например, [2], [3]). В рассматриваемой ситуации это сведение происходит следующим образом. Пусть

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{so}(3, 1) = \left\{ H = \begin{pmatrix} 0 & x_{12} & x_{13} & x_{14} \\ -x_{12} & 0 & x_{23} & x_{24} \\ -x_{13} & -x_{23} & 0 & x_{34} \\ x_{14} & x_{24} & x_{34} & 0 \end{pmatrix} \mid x_{ij} \in \mathbf{R} \right\}$$

алгебра Ли группы $O(3,1)$;

$$\mathfrak{g}_1 = \{(x_{ij}) \in \mathfrak{g} \mid x_{14} = x_{24} = x_{34} = 0\} = \{H = \begin{pmatrix} X & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \in \mathfrak{g} \mid X \in \mathfrak{so}(3) \} \cong \mathfrak{so}(3)$$

алгебра Ли группы G_1;

$$\mathfrak{g}_2 = \{(x_{ij}) \in \mathfrak{g} \mid x_{12} = x_{13} = x_{14} = 0\} = \{H = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & Y \end{pmatrix} \in \mathfrak{g} \mid Y \in \mathfrak{so}(2,1)\} \cong \mathfrak{so}(2,1)$$

алгебра Ли группы G_2;

$$\mathfrak{g}_3 = \{(x_{ij}) \in \mathfrak{g} \mid x_{13} = x_{14} = x_{23} = x_{24} = 0\} = \{H = \begin{pmatrix} X & 0 \\ 0 & Y \end{pmatrix} \in \mathfrak{g} \mid X \in \mathfrak{so}(2),$$

$Y \in \mathfrak{so}(1,1)\} \cong \mathfrak{so}(2) \oplus \mathfrak{so}(1,1)$ – алгебра Ли группы G_3.

В каждом из трех случаев находится редуктивное дополнение подалгебры $\mathfrak{g}_i$ ($i = 1, 2, 3$), т. е. такое подпространство $\mathfrak{m}_i$ в алгебре $\mathfrak{g}$, что

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_i \oplus \mathfrak{m}_i \text{ и } ad\, \mathfrak{g}_i (\mathfrak{m}_i) = [\mathfrak{g}_i , \mathfrak{m}_i] \subseteq \mathfrak{m}_i.$$

Каждое подпространство $\mathfrak{m}_i$ рассматривается как модуль алгебры Ли $\mathfrak{g}_i$ относительно редуктивного представления алгебры $\mathfrak{g}_i$:

$$\mathfrak{g}_i \times \mathfrak{m}_i \to \mathfrak{m}_i , (H, Z) \to [H, Z].$$

Опуская вычисления, приведем окончательные результаты.

Утверждение 1.

1. $\mathfrak{g}_1$-модуль $\mathfrak{m}_1$ изоморфен пространству $\mathbf{R}^3$ с каноническим действием алгебры Ли $\mathfrak{so}(3)$;
2. $\mathfrak{g}_2$-модуль $\mathfrak{m}_2$ изоморфен пространству $\mathbf{R}^3$ с каноническим действием алгебры Ли $\mathfrak{so}(2, 1)$;
3. Подалгебра $\mathfrak{g}_3$ изоморфна вещественной абелевой алгебре Ли $\mathbf{C}$ и ее редуктивное представление изоморфно представлению $\sigma + \sigma^*$, где σ – стандартное представление алгебры Ли $\mathbf{C}$ в пространстве $\mathbf{R}^2$.

Из утверждений 1 и 2 получаем описания алгебр инвариантных аффиноров.

Теорема 1.

1. Алгебры $End_G(\mathrm{TM}_1)$ и $End_G(\mathrm{TM}_2)$ изоморфны пространству **R.**
2. Алгебра $End_G(\mathrm{TM}_3)$ изоморфна прямой сумме $\mathbf{C} \oplus \mathbf{C}$.

Для нахождения пространства $\mathfrak{g}_i$ -инвариантных билинейных форм на $\mathfrak{m}_i$ ($i = 1, 2, 3$) необходима следующая лемма.

Лемма. Для любого модуля $\mathfrak{m}$ алгебры Ли $\mathfrak{g}$ отображение

$$\Phi: B_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{m}) \times End_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{m}) \to B_g(\mathfrak{m}), (b, u) \to b_u, \text{ где } b_u(x, y) = b(x, u(y))$$

есть правое действие алгебры $End_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{m})$ на векторном пространстве $B_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{m})$. При этом:

1. если b – невырожденная билинейная форма на $\mathfrak{m}$, то

$$\Phi_b: End_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{m}) \to B_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{m}), u \to b_u$$

есть изоморфизм векторных пространств в частности,

$dim\ B_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{m}) = dim\ End_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{m})$;

2. если u – автоморфизм $\mathfrak{m}$,

то Φ_u: $B_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{m}) \to B_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{m})$, $b \to b_u$

автоморфизм векторного пространства $B_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{m})$.

Из леммы следует вывод, что в случае когда $\mathfrak{b}$ *– невырожденная форма можно записать:* $\mathrm{B}_g(\mathfrak{m}) = \mathfrak{b}\ \mathrm{End}_g(\mathfrak{m})$. *Это равенство следует понимать как равенство матриц при фиксировании базиса в* $\mathfrak{m}$.

Учитывая Лемму, получаем следующий результат.

Утверждение 2.

$$B\mathfrak{g}_1(\mathfrak{m}_1) \cong \left\{ \begin{pmatrix} \alpha & 0 & 0 \\ 0 & \alpha & 0 \\ 0 & 0 & \alpha \end{pmatrix} \middle| \alpha \in \mathbf{R} \right\}.$$

Пространство $\mathfrak{g}_1$-инвариантных билинейных форм на $\mathfrak{m}_1$ изоморфно $\mathbf{R}$,

$$B\mathfrak{g}_2(\mathfrak{m}_2) \cong \left\{ \begin{pmatrix} -\alpha & 0 & 0 \\ 0 & -\alpha & 0 \\ 0 & 0 & \alpha \end{pmatrix} \middle| \alpha \in \mathbf{R} \right\}.$$

Пространство $\mathfrak{g}_2$-инвариантных билинейных форм на $\mathfrak{m}_2$ изоморфно $\mathbf{R}$,

$$B\mathfrak{g}_3(\mathfrak{m}_3) \cong \left\{ \begin{pmatrix} -a & b & -c & d \\ -b & a & -d & c \\ c & -d & -a & b \\ d & -c & -b & a \end{pmatrix} \middle| a,b,c,d \in \mathbf{R} \right\}.$$

Пространство $\mathfrak{g}_3$-инвариантных билинейных форм на $\mathfrak{m}_3$ изоморфно $\mathbf{R}^4$.

Далее выясняется, какого типа (симметрические или кососимметрические) формы содержатся в пространстве $B\mathfrak{g}_i(\mathfrak{m}_i)$ (i = 1, 2, 3) и в случае симметричных форм вычисляется сигнатура. Окончательный результат сформулируем в следующем виде:

Теорема 2.

1. В пространствах $\mathrm{B}\mathfrak{g}_1(\mathfrak{m}_1)$ и $\mathrm{B}\mathfrak{g}_2(\mathfrak{m}_2)$ имеется одна с точностью до ненулевого множителя невырожденная инвариантная билинейная форма. Она симметрическая и имеет сигнатуры 3 и 1 соответственно.
2. Имеет место разложение $\mathrm{B}\mathfrak{g}_3(\mathfrak{m}_3) = \mathrm{B}^+\mathfrak{g}_3(\mathfrak{m}_3) \oplus \mathrm{B}^-\mathfrak{g}_3(\mathfrak{m}_3)$, где $\mathrm{B}^+\mathfrak{g}_3(\mathfrak{m}_3)$ – двумерное подпространство инвариантных симметричных форм, причем каждая ненулевая форма имеет сигнатуру 0, а $\mathrm{B}^-\mathfrak{g}_3(\mathfrak{m}_3)$ – двумерное под-

пространство кососимметричных билинейных форм, причем всякая ненулевая форма невырождена.

Литература

1. *Артин Э.* Геометрическая алгебра // М. Наука. 1969.
2. *Кобаяси Ш.*, *Номидзу К.* Основы дифференциальной геометрии // М. Наука. 1981. Т. 2. гл. 10.
3. *Кононов С. Г.* Алгебры инвариантных аффиноров однородных пространств вещественных простых групп Ли типа A_l с регулярными подгруппами изотропии.// Известия ВУЗов. Математика. 1999. №5. с. 40–50.

ГАРМОНИЧЕСКИЕ КОЛЕБАНИЯ МИКРОКОНСОЛИ АТОМНО-СИЛОВОГО МИКРОСКОПА В ПОЛЕ ВАН-ДЕР-ВААЛЬСОВЫХ СИЛ

Н. В. Густыр, С. О. Пантелей

В микроскопии новым словом является атомно-силовой микроскоп, действие которого основано на механике. Атомно-силовая микроскопия позволяет получить изображения молекулярных взаимодействий мембраны белка в водных растворах, биомолекул; получены изображения ДНК, белков и полимеров в воздухе и жидкостях и др. [1]. Существует 2 метода исследования с помощью такого микроскопа: статический и динамический. Мы рассмотрим более сложный метод – динамический. Этот метод обладает более высокой чувствительностью, а также не деформирует поверхность.

Атомно-силовой микроскоп представляет собой микроконсоль, установленную на биморфном пьезоэлементе, на свободном конце которой установлен зонд-острие. Биморфный пьезоэлемент состоит из двух слоев пьезоэлектрической поликристаллической керамики, связанных тонкой металлической прослойкой, зажатой в середине. При подаче напряжения на два его электрода биморф деформируется и вызывает механические колебания микроконсоли [2]. При приближении острия зонда к исследуемой поверхности возникают ван-дер-ваальсовые силы взаимодействия с поверхностью. Их действие изменяет амплитуду и частоту колебаний консоли. По этим изменениям можно судить о структуре поверхности, т.е. по отклонениям консоли можно «вычертить» поверхность.

Рассмотрена динамика колебаний свободной консоли, т.е. при отсутствии сил взаимодействия с образцом. Для данного случая получены график зависимости амплитуды колебаний микроконсоли от времени в сравнении с колебаниями биморфного пьезоэлемента, биморфно-консольная фазовая диаграмма, фазовая диаграмма перемещение-скорость,