

В работе также реализован синтез обратной связи в режиме реального времени, позволяющий находить оптимальное управление для системы, на которую действуют неизвестные возмущения.

Хранение небольшого объема информации на итерациях позволяет обходиться ограниченным объемом памяти ЭВМ, а использование информации о полученной на предыдущей итерации опоре позволяет эффективно находить оптимальное управление на очередном шаге.

Литература

1. Гамкрелидзе Р. В. К теории оптимальных процессов в линейных системах // Док. АН СССР. Вып. 116. 1957. № 1. С. 9–11.
2. Габасов Р., Кириллова Ф. М. Конструктивные методы оптимизации. Ч. 2. Задачи управления. Мн: Універсітэцкае, 1984.
3. Габасов Р., Кириллова Ф. М. Оптимизация линейных систем. Мн: Изд-во БГУ, 1973.

ИСПОЛЬЗОВАНИЕ МЕТОДА МОМЕНТОВ ДЛЯ ЧАСТИЧНОЙ ДИСКРЕТИЗАЦИИ ГРАНИЧНЫХ ЗАДАЧ ДЛЯ УРАВНЕНИЙ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ

А. В. Самусенко, С. В. Огрызко

В данной работе приводится метод решения первой краевой задачи для уравнения параболического типа. Практическое значение метода заключается в том, что он сводит решение краевой задачи для дифференциальных уравнений в частных производных к задаче Коши для системы обыкновенных дифференциальных уравнений; при этом можно достичь высокий порядок аппроксимации.

Рассмотрим первую краевую задачу для простейшего однородного уравнения теплопроводности:

$$\begin{aligned}\frac{\partial u(x,t)}{\partial t} &= \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2}, \quad 0 < x < l, \quad 0 < t \leq T, \\ u(x,0) &= \varphi(x), \quad 0 \leq x \leq l, \\ u(0,t) &= \mu_0(t), \quad 0 \leq t \leq T, \\ u(l,t) &= \mu_N(t), \quad 0 \leq t \leq T.\end{aligned}\tag{1}$$

Систему обыкновенных дифференциальных уравнений будем получать путем умножения исходного уравнения на некоторые вспомогательные функции с последующим интерполированием и интегрированием.

Введем сетку узлов $\overline{\omega_h} = (x_i = ih, i = \overline{0, N}, h = 1/N)$. Временную переменную t считаем непрерывной. Введем вспомогательные кусочно-линейные непрерывные функции $E_i^{(3)}(x)$ [1]:

$$E_i^{(3)}(x) = \begin{cases} x - x_{i-1}, & x \in [x_{i-1}, x_i], \\ -(x - x_{i+1}), & x \in [x_i, x_{i+1}], \quad i = \overline{1, N-1}, \quad x_i \in \overline{\omega_h}, \\ 0, & x \notin [x_{i-1}, x_{i+1}]. \end{cases}$$

Основное свойство функции $E_i^{(3)}(x)$, используемое здесь, отражает соотношение

$$\frac{1}{h^2} \int_0^1 E_i^{(3)}(x) \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2} dx = \frac{u(x_{i-1}, t) - 2u(x_i, t) + u(x_{i+1}, t))}{h^2} = u_{xx}^-(x_i, t).$$

1. Пятислойные схемы

Для построения пятислойных схем введем вспомогательные непрерывные кусочно-линейные функции:

$$\begin{aligned} E_l^{(5)}(x) &= \alpha_0 E_l^{(3)}(x) + \alpha_l E_2^{(3)}(x), \\ E_i^{(5)}(x) &= \alpha_l E_{i-l}^{(3)}(x) + \alpha_0 E_i^{(3)}(x) + \alpha_l E_{i+l}^{(3)}(x), \quad i = \overline{2, N-2}, \\ E_{N-l}^{(5)}(x) &= \alpha_l E_{N-2}^{(3)}(x) + \alpha_0 E_{N-l}^{(3)}(x), \end{aligned}$$

где α_0, α_l – произвольные параметры.

Умножим уравнение (1) на введенные функции и проинтегрируем по x от 0 до 1. Интегралы в правых частях равенств вычисляются точно. Они выражаются через конечные разности второго и четвертого порядков. Для вычисления интегралов в левых частях применим интерполирование функции $\frac{\partial u(x, t)}{\partial t}$. В зависимости от вида применяе-

мого интерполирования получим разные по порядку точности пятислойные схемы.

Можно интерполировать по трем или по пяти узлам по формуле Ньютона–Стирлинга для внутренних узлов $i = \overline{2, N-2}$. Для повышения порядка аппроксимации в приграничных узлах необходимо интерполировать функцию $\frac{\partial u(x, t)}{\partial t}$ специальным образом.

Так, например, если используется интерполирование по пяти узлам по формуле Ньютона–Стирлинга, то в приграничном узле $i = l$

интерполяционный полином $P(x)$ для функции $y(x) := \frac{\partial u(x, t)}{\partial t}$ должен удовлетворять условиям

$$P(x_i) = y(x_i), i = \overline{0, 3}, P^{(k)}(x_0) = y^{(k)}(x_0), k = 2, 4, 6, P^{(6)}(x_l) = y^{(6)}(x_l).$$

Аналогичные требования для узла $i = N - 1$.

Производные $y^{(k)}(x_0), y^{(k)}(x_N)$ мы получаем, используя граничные условия и дифференциальное уравнение.

Вычисляя теперь интегралы в левых частях равенств и отбрасывая остаток порядка $O(h^8)$, получим систему обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка. Дополнив ее начальными условиями, приходим к задаче Коши, которая аппроксимирует исходную краевую задачу для уравнения в частных производных:

$$\begin{aligned} h^2 \left[(\alpha_0 + 2\alpha_1)E + \frac{1}{12}(\alpha_0 + 14\alpha_1)Q + \frac{1}{240}(18\alpha_1 - \alpha_0)Q^2 \right] U' = \\ = [(\alpha_0 + 2\alpha_1)Q + \alpha_1 Q^2] U + F, \\ U(0) = \Phi, \end{aligned}$$

где U – вектор-столбец решения, матрица $Q = \{q_{ij}\}_{i,j=1}^{N-1}$,

$$q_{ii} = -2, q_{ij} = 1 \text{ для } |i - j| = 1, q_{ij} = 0 \text{ для } |i - j| > 1.$$

За счет выбора параметров можно еще на два порядка повысить точность схемы.

2. Семислойные схемы

Семислойные схемы позволяют еще более повысить порядок аппроксимации. Вспомогательными функциями в этом случае являются

$$\begin{aligned} E_l^{(7)}(x) &= (\alpha_0 - \alpha_2)E_l^{(3)}(x) + \alpha_1 E_2^{(3)}(x) + \alpha_2 E_3^{(3)}(x), \\ E_2^{(7)}(x) &= \alpha_1 E_l^{(3)}(x) + \alpha_0 E_2^{(3)}(x) + \alpha_1 E_3^{(3)}(x) + \alpha_2 E_4^{(3)}(x), \\ E_i^{(7)}(x) &= \alpha_2 E_{i-2}^{(3)}(x) + \alpha_1 E_{i-1}^{(3)}(x) + \alpha_0 E_i^{(3)}(x) + \alpha_1 E_{i+1}^{(3)}(x) + \alpha_2 E_{i+2}^{(3)}(x), \\ E_{N-2}^{(7)}(x) &= \alpha_2 E_{N-4}^{(3)}(x) + \alpha_1 E_{N-3}^{(3)}(x) + \alpha_0 E_{N-2}^{(3)}(x) + \alpha_1 E_{N-1}^{(3)}(x), \\ E_{N-1}^{(7)}(x) &= \alpha_2 E_{N-3}^{(3)}(x) + \alpha_1 E_{N-2}^{(3)}(x) + (\alpha_0 - \alpha_2)E_{N-1}^{(3)}(x), \quad i = \overline{3, N-3}, \end{aligned}$$

где $\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2$ – произвольные параметры.

Проведя аналогичные рассуждения, мы построим семислойные схемы с использованием интерполяции по одному, трем, пяти и семи узлам.

Если применяется интерполирование по семи узлам по формуле Ньютона–Стирлинга, то в приграничном узле $i = I$ интерполяционный полином $P(x)$ для функции $y(x) := \frac{\partial u(x,t)}{\partial t}$ должен удовлетворять условиям:

$$P(x_i) = y(x_i), \quad i = \overline{0,4}, \quad P^{(k)}(x_0) = y^{(k)}(x_0), \quad k = 2,4,6,8,10,$$

$$P^{(m)}(x_1) = y^{(m)}(x_1), \quad m = 8,10.$$

В приграничном узле $i = 2$ –

$$P(x_i) = y(x_i), \quad i = 0,2,4, \quad P(x_1) + P(x_3) = y(x_1) + y(x_3),$$

$$P(x_3) + P(x_5) = y(x_3) + y(x_5),$$

$$P^{(k)}(x_0) = y^{(k)}(x_0), \quad k = 2,4,6,8,10, \quad P^{(m)}(x_2) = y^{(m)}(x_2), \quad m = 8,10.$$

Аналогичные требования для узлов $i = N-1, N$.

В итоге приходим к следующей задаче Коши для системы обыкновенных дифференциальных уравнений, аппроксимирующей исходную краевую задачу для уравнения в частных производных с порядком $O(h^{12})$:

$$\begin{aligned} & h^2 \left[(\alpha_0 + 2\alpha_1 + 2\alpha_2)E + \frac{1}{12}(\alpha_0 + 14\alpha_1 + 50\alpha_2)Q + \right. \\ & \left. + \frac{1}{240}(18\alpha_1 - \alpha_0 + 318\alpha_2)Q^2 + \frac{1}{60480}(4094\alpha_2 - 190\alpha_1 + 31\alpha_0)Q^3 \right] U' = \\ & = \left[(\alpha_0 + 2\alpha_1 + 2\alpha_2)Q + (\alpha_1 + 4\alpha_2)Q^2 + \alpha_2 Q^3 \right] U + F, \\ & U(0) = \Phi. \end{aligned}$$

Если теперь выбирать $\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2$ так, чтобы обнулился главный член остатка, то порядок точности повысится до величины $O(h^{14})$.

Для более общего уравнения (1) с коэффициентами, зависящими только от временной переменной t , полученные задачи Коши решаются точно, используя преобразование неизвестной функции U с помощью собственных векторов матрицы Q .

Литература

1. Марчук Г.И. Методы вычислительной математики. М.: Наука, 1989.