

Вывод. Как видно из полученных результатов, производительность при использовании кластера возрастает, максимальный прирост производительности составляет 87 % (при использовании 3-х компьютеров в кластере). Узкими местами в построенном кластере являются неоднородность последнего (разные компьютеры в кластере) и среда передачи данных (в данном тесте среда передачи данных не играет весомой роли). При высоком порядке точности время, необходимое для передачи данных, мало по сравнению с временем вычислений, поэтому с ростом порядка точности вычислений вырисовывается тенденция к росту производительности. Но неоднородность кластера на этом этапе является серьезным барьером (вследствие чего при тестировании не удалось получить прирост более 87 %). Обойти данный барьер можно либо грамотным перераспределением процессов между компьютерами кластера и перепроектированием программы в рамках данной модели, либо модернизацией кластера в целом.

Для увеличения эффективности данной модели необходимо модернизировать кластер: использовать более скоростную технологию передачи данных и использовать однородные компьютеры (однородное аппаратное обеспечение) для построения кластера.

Литература

1. Message Passing Interface Forum MPI: A Message Passing Interface Standard // International Journal of Supercomputer Applications 8 (3/4). 1994.
2. Буза М. К., Зимянин Л. Ф. Секционная модель параллельных вычислений // Программирование. 1990. №4. С. 54–62.

ОПТИМАЛЬНЫЕ ПРОГРАММНЫЕ И ТИПА ОБРАТНОЙ СВЯЗИ ОДНОМЕРНЫЕ УПРАВЛЕНИЯ ДЛЯ ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМ

О. В. Ридченко

Линейные задачи оптимального управления (ОУ) подробно изучены в литературе [1]. Вместе с тем до сих пор, несмотря на многочисленные предложения, нельзя указать достаточно эффективные численные методы построения их решений, в которых полно учитывалась бы специфика этих задач. Особенно это касается позиционных решений.

В работе реализован алгоритм нахождения оптимального программного и позиционного решения линейной задачи оптимального управления с учетом ее динамической специфики.

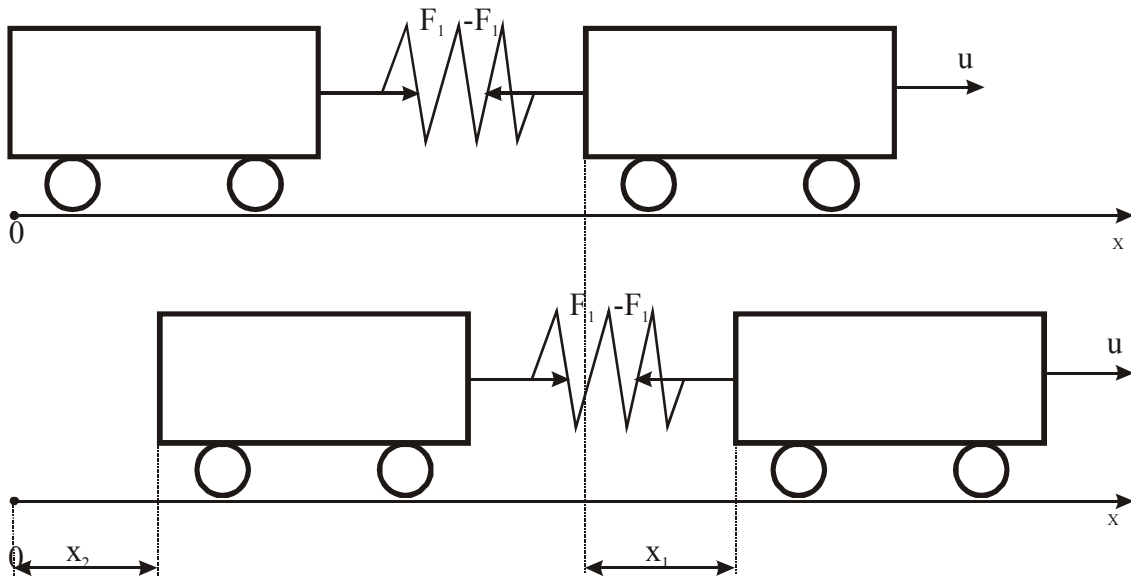


Рис. 1. Физическая модель задачи

В основу положена реализация адаптивного метода [2], модифицированного с учетом динамической структуры задачи.

Рассматривается механическая система, состоящая из двух масс, соединенных упругой связью (рис. 1). В начальный момент система находится в покое. Требуется с помощью ограниченной силы, приложенной к одной из масс, переместить систему на максимальное расстояние и успокоить.

Математическая модель поставленной задачи имеет вид (1).

Здесь $x_1 = x_1(t)$, $x_2 = x_2(t)$ – положение масс в момент времени t относительно начальных положений покоя $x_1(0)=0$, $x_2(0)=0$, $x_3 = x_3(t)$, $x_4 = x_4(t)$ – скорости масс, $u = u(t)$ – значение силы, приложенной к первой массе m_1 ; k – коэффициент упругости связи.

$$\begin{cases} x_3 = \frac{dx_1}{dt}, x_4 = \frac{dx_2}{dt}, \\ \dot{x}_3 m_1 = u - k(x_1 - x_2), \\ \dot{x}_4 m_2 = k(x_1 - x_2), \\ x_1(0) = x_2(0) = x_3(0) = x_4(0) = 0, \\ x_3(t^*) = x_4(t^*) = 0, \\ x_1(t^*) = x_2(t^*), \\ x_1(t^*) \rightarrow \max, \\ |u| \leq 1. \end{cases} \quad (1)$$

В работе положены $m_1=1$, $m_2=5/3$, $k=0,1$, $t^*=40$.

Данная задача относится к линейным задачам оптимального управления. Оптимальное управление будем искать в классе дискретных управлений, т. е. кусочно-постоянных функций $u(t) = u(t_* + kh)$, $t \in [t_* + kh, t_*(k+1)h[$, $k=0, \dots, N-1$.

Временной интервал $[0, t^*]$ разбивается на N одинаковых отрезков длины h , и предполагается, что дискретное управление сохраняет свое значение $u(k)$ на заданных отрезках квантования $[\tau_k, \tau_{k+1}]$ и изменяет их только в моменты квантования τ_k : $u(t) \equiv u(k)$, $t \in [\tau_k, \tau_{k+1}[$, $\tau_0=0$, $k=0, 1, \dots, N-1$

Рассматриваемая задача является частным случаем канонической задачи оптимального управления (2)

$$\begin{cases} c'x(t^*) \rightarrow \max, \quad \dot{x} = A(t)x + b(t)u, \quad x(t_*) = x_0, \\ Hx(t^*) = g, \quad |u(t)| \leq 1, \quad t \in T, \\ (x \in R^n, u \in R, g \in R^m, \text{rank } H = m < n), \\ T = [t_*, t^*], h = (t^* - t_*)/N, t_* < t^* < +\infty, \end{cases} \quad (2)$$

где $A(t)$, $b(t)$, $t \in T$, — кусочно-непрерывные $n \times n$ -матричная и n -векторная функции. Размерность n состояния $x = x(t)$ оптимизируемой системы называется порядком задачи (2).

В классе дискретных управлений задача (1) может быть решена методами линейного программирования, например адаптивным методом [2], но при уменьшении периода квантования h сильно возрастают размеры задачи и использование этих методов становится неэффективным. Требуются большие затраты памяти для хранения необходимой для решения информации.

Метод построения оптимального управления, использованный в данной работе, имеет следующие преимущества, увеличивающие его эффективность:

- в операциях используются лишь параметры исходной задачи управления;
- основные операции производятся с исходными системами, а не со вспомогательными объектами, которые возникают после сведения задачи оптимального управления к эквивалентной задаче линейного программирования;
- за счет хранения небольшой дополнительной информации и использования параллельных вычислений существенно сокращается время интегрирования прямой и сопряженной системы в двойственной части итераций, что ускоряет решение задачи программной опти-

мизации, а также формирование текущих опор и реализаций оптимальной обратной связи при построении позиционного решения;

- эффективность метода практически не зависит от периода квантования времени.

Суть метода состоит в следующем.

Задача (1) представляется с помощью формулы Коши в эквивалентной функциональной форме (3). Далее при реализации адаптивного метода хранится не вся информация о сопровождающих элементах системы, а только необходимая для следующей итерации и позволяющая восстановить необходимые данные путем интегрирования сопряженной системы на малых интервалах длины h . Для интегрирования с заданной точностью в алгоритме должен применяться какой-либо численный метод, например метод Рунге–Кутты.

Преимуществом рассмотренного метода решения задачи оптимального управления являются небольшие затраты памяти, которые не увеличиваются с ростом количества интервалов квантования времени.

$$\begin{aligned} \sum_{t \in T_u} c_h(t)u(t) &\rightarrow \max, \quad \sum_{t \in T_u} d_h(t)u(t) = g_0, \quad t \in T_u; \\ c_h(t) &= \int_t^{t+h} \psi'_c(\vartheta)b(\vartheta)d\vartheta, \quad d_h(t) = \int_t^{t+h} G(\vartheta)b(\vartheta)d\vartheta, \\ g_0 &= g - Hx_0(t^*), \\ \dot{\psi} &= -A'(t)\psi, \\ \psi(t^*) &= c, \\ G &= -GA(t), \\ G(t^*) &= H. \end{aligned} \tag{3}$$

Задача была решена при разбиении промежутка времени T на $N=40, 100, 1000$ и $10\,000$ интервалов. Результаты приведены в таблице. В каждом случае были взяты одинаковые начальные опоры для того, чтобы сравнить затраты метода при увеличении периода квантования.

Таблица

Результаты применения метода при различных периодах квантования

N	Количество длинных шагов адаптивного метода	Количество полных интегрирований
40	7	3.2
100	8	3.24
1000	10	3.55
10000	13	3.74

В работе также реализован синтез обратной связи в режиме реального времени, позволяющий находить оптимальное управление для системы, на которую действуют неизвестные возмущения.

Хранение небольшого объема информации на итерациях позволяет обходиться ограниченным объемом памяти ЭВМ, а использование информации о полученной на предыдущей итерации опоре позволяет эффективно находить оптимальное управление на очередном шаге.

Литература

1. Гамкрелидзе Р. В. К теории оптимальных процессов в линейных системах // Док. АН СССР. Вып. 116. 1957. № 1. С. 9–11.
2. Габасов Р., Кириллова Ф. М. Конструктивные методы оптимизации. Ч. 2. Задачи управления. Мн: Універсітэцкае, 1984.
3. Габасов Р., Кириллова Ф. М. Оптимизация линейных систем. Мн: Изд-во БГУ, 1973.

ИСПОЛЬЗОВАНИЕ МЕТОДА МОМЕНТОВ ДЛЯ ЧАСТИЧНОЙ ДИСКРЕТИЗАЦИИ ГРАНИЧНЫХ ЗАДАЧ ДЛЯ УРАВНЕНИЙ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ

А. В. Самусенко, С. В. Огрызко

В данной работе приводится метод решения первой краевой задачи для уравнения параболического типа. Практическое значение метода заключается в том, что он сводит решение краевой задачи для дифференциальных уравнений в частных производных к задаче Коши для системы обыкновенных дифференциальных уравнений; при этом можно достичь высокий порядок аппроксимации.

Рассмотрим первую краевую задачу для простейшего однородного уравнения теплопроводности:

$$\frac{\partial u(x,t)}{\partial t} = \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2}, \quad 0 < x < l, \quad 0 < t \leq T, \quad (1)$$

$$u(x,0) = \varphi(x), \quad 0 \leq x \leq l,$$

$$u(0,t) = \mu_0(t), \quad 0 \leq t \leq T,$$

$$u(l,t) = \mu_N(t), \quad 0 \leq t \leq T.$$

Систему обыкновенных дифференциальных уравнений будем получать путем умножения исходного уравнения на некоторые вспомогательные функции с последующим интерполированием и интегрированием.