$$-\frac{1}{4}(a(0,0)+a(0,1))^2=\frac{1}{4}(a(0,0)-a(0,1))^2.$$

Проведя аналогичные вычисления для $\sigma^2_{\tau^0+\Delta}$, получим доказательство леммы.

Заключение

Найденные параметры распределения $\eta(\tau,\tau^0)$ позволяют построить оценки для точности обнаружения разладки:

$$\mathbf{P}\{|€-\tau^0|>\Delta\},\ \tau_-\le\tau^0-\Delta,\tau^0+\Delta\le\tau_+,\ \Delta=0,1,2,\ldots.$$

Литература

1. *Avery P.J., Henderson D.A.* Fitting Marcov chain models to discrete state series such as DNA sequences // Applied Statistics. 1999. № 48. P. 53–61.
2. *Кульбак С.* Теория информации и статистика / М.: Наука, 1967. 408 с .

КРИТЕРИЙ СИЛЬНОЙ УСТОЙЧИВОСТИ

А. Р. Наумович

В общей теории линейных разностных схем показано, что устойчивость по входным данным выбранной разностной схемы, аппроксимирующей корректно поставленную дифференциальную задачу, обеспечивает сходимость решения разностной задачи к решению исходной задачи. Таким образом, исследование непрерывной зависимости решения разностной схемы относительно малых возмущений входных данных представляет большой научный и практический интерес, так как нарушение устойчивости приводит к искажению этого решения.

При исследовании схемы основное внимание уделяется вопросу устойчивости разностного решения по отношению к малым возмущениям начальных условий и правой части. Однако к входным данным относятся также и коэффициенты разностной схемы. Поскольку они определяются через коэффициенты исходного дифференциального уравнения и часто вычисляются с некоторой погрешностью, то несомненный интерес представляет изучение того, каким образом ошибки в задании коэффициентов влияют на свойства используемого алгоритма.

Таким образом, проблема коэффициентной устойчивости разностных схем, т. е. непрерывная зависимость решения относительно возмущения коэффициентов, стоит в одном ряду с проблемой устойчивости по начальным данным и правой части.

Изучению устойчивости разностных схем посвящено значительное количество работ, в которых предлагаются различные определения устойчивости, а также используются различные математические средства. Наиболее важны в этой области результаты А. А. Самарского. Им были найдены наиболее общие условия устойчивости двухслойных и трехслойных разностных схем. Отметим также совместные труды А. А. Самарского и А. В. Гулина, которые отражены, прежде всего, в [2].

При изучении коэффициентной устойчивости очень важны результаты А. А. Самарского, А. В Гулина и П. П. Матуса.

Целью данной курсовой работы является изучение необходимых и достаточных условий устойчивости двухслойных операторно-разностных схем по начальным данным, правой части и коэффициентам.

Пусть заданы вещественное конечномерное гильбертово пространство H и сетка по времени $\overline{\omega}_\tau = \{ t_n = n\tau,\ n = 0,1,\dots,N_0;\ \tau N_0 = T \} = \omega_\tau \cup \{T\}$.

Обозначим через A, $B : H \to H$ линейные операторы в H. В дальнейшем будем предполагать, что операторы A и B являются постоянными, причем A – самосопряженный и положительный, а B – положительный.

Рассмотрим двухслойную операторно-разностную схему, записанную в каноническом виде:

$$By_t + Ay = \varphi, \tag{1}$$

$$y(0) = u_0, \tag{2}$$

где $y = y_n \in H$ – искомая функция, а φ, $u_o \in H$ заданы.

Возмутим теперь в задаче (1) – (2) начальные данные, правую часть и операторные коэффициенты. Получим задачу

$$\tilde{B}\tilde{y}_t + \tilde{A}\tilde{y} = \tilde{\varphi}, \tag{3}$$

$$\tilde{y}(0) = \tilde{u}_0. \tag{4}$$

Для определения мер возмущения операторов A и B введем в рассмотрение постоянные α_1 и α_2, фигурирующие в неравенствах

$$\left\| \left(A - \tilde{A} \right) v \right\| \le \alpha_1 \left\| \tilde{A} v \right\|, \tag{5}$$

$$\left\| \left(B - \tilde{B} \right) v \right\| \le \alpha_2 \left\| \tilde{B} v \right\|. \tag{6}$$

Разностную схему (1) – (2) будем называть сильно устойчивой, если она устойчива по отношению к возмущению начальных условий, правой части и операторных коэффициентов, т. е. существуют такие положительные постоянные M_1, M_2, M_3, не зависящие от n и выбора входных данных задач такие, что при достаточно малом $\tau \le \tau_0$ выполняется неравенство

$$\left\|\tilde{y}(t) - y(t)\right\|_{(1)} \le M_1 \left\|\tilde{u}_0 - u_0\right\|_{(1)} + M_2 \max_{t\in\omega_\tau} \left\|\tilde{\varphi}(t) - \varphi(t)\right\|_{(2)} +$$

$$+\left(\alpha_1 + \alpha_2\right) M_3 \left(\left\|\tilde{y}_0\right\|_{(3)} + \left\|\tilde{\varphi}(t)\right\|_{(4)} \right)$$

при любом выборе y_0, $\tilde{y}_0$; φ, $\tilde{\varphi} \in H$; $\|\,.\,\|_{(k)}$ – некоторые нормы в пространстве H.

Возмущая в задаче (1) – (2) поочередно начальные условия, правую часть и операторные коэффициенты, получим соответственно следующие задачи:

$$B\tilde{y}_t^{(1)} + A\tilde{y}^{(1)} = \varphi,$$

$$\tilde{y}^{(1)}(0) = \tilde{u}_0;$$

$$B\tilde{y}_t^{(2)} + A\tilde{y}^{(2)} = \tilde{\varphi},$$

$$\tilde{y}^{(2)}(0) = u_0;$$

$$\tilde{B}\tilde{y}_t^{(3)} + \tilde{A}\tilde{y}^{(3)} = \varphi,$$

$$\tilde{y}^{(3)}(0) = u_0.$$

В соответствии с введенными обозначениями определим понятия устойчивости по начальным данным, правой части и по операторным коэффициентам.

Разностную схему (1) – (2) будем называть устойчивой по начальным данным, если существует постоянная M_1 такая, что выполняется неравенство

$$\left\|\tilde{y}^{(1)}(t) - y(t)\right\|_{(1)} \le M_1 \left\|\tilde{u}_0 - u_0\right\|_{(1)}. \tag{7}$$

Разностную схему (1) – (2) будем называть устойчивой по правой части, если существует постоянная M_2 такая, что выполняется неравенство

$$\left\|\tilde{y}^{(2)}(t) - y(t)\right\|_{(1)} \le M_2 \max_{t\in\omega_\tau} \left\|\tilde{\varphi}(t) - \varphi(t)\right\|_{(2)}. \tag{8}$$

Разностную схему (1) – (2) будем называть устойчивой по операторным коэффициентам, если существует постоянная M_3 такая, что выполняется неравенство

$$\left\|\widetilde{y}^{(3)}(t)-y(t)\right\|_{(1)} \le (\alpha_1+\alpha_2)M_3\left(\|\widetilde{y}_0\|_{(3)}+\|\widetilde{\varphi}\|_{(4)}\right). \qquad (9)$$

В дальнейшем ограничимся рассмотрением коэффициентной устойчивости только относительно оператора A (оператор B возмущать не будем, т. е. $B=\tilde{B}$). Заметим, что при $B=\widetilde{B}$ неравенство (9) эквивалентно следующей цепочке неравенств:

$$\left\|\widetilde{y}_{n+1}{}^{(3)}(t)-y_{n+1}(t)\right\|_{(1)} \le M_3\sum_{j=0}^{n}\tau\left\|\left(A-\widetilde{A}\right)\widetilde{y}_j\right\|_{(3)}, \qquad (10)$$

$$\left\|\left(A-\widetilde{A}\right)\widetilde{y}_j\right\|_{(3)} \le \alpha_1\left\|\widetilde{A}\widetilde{y}_j\right\|_{(3)}, \qquad (11)$$

$$\left\|\widetilde{A}\widetilde{y}_j\right\|_{(3)} \le M_1'\|\widetilde{y}_0\|_{(1)}+M_2'\left\|\widetilde{\varphi}_j\right\|_{(2)}. \qquad (12)$$

Тогда условие сильной устойчивости примет вид

$$\left\|\tilde{y}_{n+1}(t)-y_{n+1}(t)\right\|_{(1)} \le M_1\left\|\tilde{u}_0-u_0\right\|_{(1)}+M_2\max_{t\in\omega_\tau}\left\|\tilde{\varphi}(t)-\varphi(t)\right\|_{(2)}+$$

$$+M_3\sum_{j=0}^{n}\tau\left\|\left(A-\tilde{A}\right)\tilde{y}_j\right\|_{(3)} \qquad (13)$$

при условии выполнения неравенств (11) и (12).

Для того чтобы сформулировать критерий сильной устойчивости, нам понадобятся следующие теоремы.

Теорема1 [1, с. 8]. Устойчивость по начальным данным схемы с постоянными операторами необходима и достаточна для устойчивости по правой части при условии согласования норм $\|\varphi\|_{(2)}=\left\|B^{-1}\varphi\right\|_{(1)}$.

При этом верна оценка $\|y_{n+1}\|_{(1)} \le M_1\left(\|y_0\|_{(1)}+\sum_{j=0}^{n}\tau\left\|B_j^{-1}\varphi_j\right\|_{(1)}\right)$.

Теорема 2 [3]. Если разностная схема устойчива по начальным данным, то при выполнении условий $\left\|\left(A-\widetilde{A}\right)v\right\|\le\alpha_1\left\|\widetilde{A}v\right\|$ и $\left\|\left(B-\tilde{B}\right)v\right\|\le$ $\le\alpha_2\left\|\tilde{B}v\right\|$ она и коэффициентно устойчива. При этом верна априорная оценка

$$\left\|\widehat{y}_{n+1}-y_{n+1}\right\|_{B^*B} \le M_1\left\|\widehat{u}_0-u_0\right\|_{B^*B}+M_2\sum_{k=0}^{n}\tau\left\|\widehat{\varphi}_k-\varphi_k\right\|+\alpha_1\sum_{k=0}^{n}\tau\left\|\widehat{\varphi}_k\right\|+$$

$$+(\alpha_1+\alpha_2)\left(M_1t_n\left\|\widehat{A}\widehat{u}_0\right\|+M_2\sum_{k=0}^{n}\tau\sum_{j=0}^{k-1}\tau\left\|\widehat{A}\widehat{B}^{-1}\widehat{\varphi}_j\right\|\right).$$

Таким образом, для формулировки критерия осталось показать, что коэффициентная устойчивость достаточна для устойчивости по начальным данным. Это утверждение и было сформулировано и доказано в основной теореме данной работы.

Теорема 3. Если разностная схема

$$By_t + Ay = \varphi,$$

$$y(0) = u_0$$

коэффициентно устойчива, то она устойчива по начальным данным при условии согласования норм $\|v\|_{(3)} = \left\|B^{-1}v\right\|_{(1)}$. При этом верна априорная оценка

$$\left\|z_{n+1}^{(1)}\right\|_{(1)} \le M_1 \|\tilde{u}_0 - u_0\|_{(1)},$$

где $z^{(1)}$ – решение задачи

$$B{z^{(1)}}_t + Az^{(1)} = 0,$$

$$z^{(1)}(0) = \tilde{u}_0 - u_0.$$

Вышеуказанные теоремы позволяют сформулировать следующий критерий *сильной устойчивости:*

При условии согласования норм

$$\|v\|_{(2)} = \|v\|_{(3)} = \left\|B^{-1}v\right\|_{(1)}$$

следующие утверждения эквивалентны:

1. Схема (1) – (2) устойчива по начальным данным.
2. Схема (1) – (2) устойчива по правой части.
3. Схема (1) – (2) коэффициентно устойчива.

Литература

1. *Самарский А. А.* Теория разностных схем. М.: Наука, 1989.
2. *Самарский А. А., Гулин А. В*. Устойчивость разностных схем. М.: Наука, 1973.
3. *Самарский А. А., Гулин А. В., Матус П. П.* Достаточные условия коэффициентной устойчивости операторно-разностных схем // Доклады Академии наук. 2000. Т. 3. № 3. С. 304–306.