О НЕКОТОРЫХ ТИПАХ (3N-3)-НЕЦЕЛОЧИСЛЕННЫХ ВЕРШИН МНОГОГРАННИКА ТРЕХИНДЕКСНОЙ АКСИАЛЬНОЙ ЗАДАЧИ О НАЗНАЧЕНИЯХ

Е. В. Лукшин

Известно [1], что вершина многогранника $M(3,n)$ трехиндексной аксиальной задачи о назначениях, заданного условиями

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} x_{ijt} = 1 \ \ \forall t \in N_n, \ \sum_{i=1}^{n}\sum_{t=1}^{n} x_{ijt} = 1 \ \ \forall j \in N_n, \ \sum_{j=1}^{n}\sum_{t=1}^{n} x_{ijt} = 1 \ \ \forall i \in N_n,$$

$$x_{ijt} \ge 0 \ \ \forall (i,j,t) \in N_n^3,$$

содержит не более чем $3n$–2 положительных компонент. Здесь и далее $n \ge 2$, $N_n = \{1, 2, ..., n\}$, $N_n^3 = N_n \times N_n \times N_n$.

Пусть $r \in N_{3n-2}$. Вершину многогранника $M(3,n)$ будем называть r-нецелочисленной, если она содержит ровно r дробных компонент.

В [2] доказано, что для любого числа $r \in \{4, 6, 7, ..., 3n-2\}$, и только для него, у многогранника $M(3,n)$ существуют r-нецелочисленные вершины. Там же установлено, что матрица $x^1 = \| x^1_{ijt} \|_n$ многогранника $M(3,n)$ с ненулевыми элементами

$$x^1_{111} = x^1_{n-1,n,n-1} = x^1_{n,n-1,n} = \frac{2}{3}, \ \ x^1_{221} = x^1_{122} = x^1_{232} = x^1_{n12} = x^1_{n-2,n-2,n-1} = x^1_{n-1,n,n} = \frac{1}{3},$$

$$x^1_{k-1,k-1,k} = x^1_{kkk} = x^1_{k,k+1,k} = \frac{1}{3}, \ \ k = 3, 4, ..., n-2 \ \ (n \ge 5),$$

является его $(3n–3)$-нецелочисленной вершиной.

В настоящей работе выявлено два новых типа $(3n–3)$-нецелочисленных вершин многогранника $M(3,n)$, структура которых отлична от структуры вершины x^1. В частности, справедливы следующие утверждения.

Теорема 1. Пусть $n \ge 3$. Матрица $x^2 = \| x^2_{ijt} \|_n$ с ненулевыми элементами

$$x^2_{121} = x^2_{n-1,n,n} = \frac{n-2}{n-1}, \ \ x^2_{n-1,n,1} = x^2_{n,n-1,2} = x^2_{n1n} = \frac{1}{n-1},$$

$$x^2_{kk2} = \frac{1}{n-1}, \ \ k = 1, 2, ..., n-2,$$

$$x^2_{k-1,k,k} = \frac{n-2}{n-1}, \ \ k = 3, 4, ..., n-1, \ \ (n \ge 4),$$

$$x^2_{n1k} = \frac{1}{n-1},\ k = 3, 4, ..., n-1,\ (n \geq 4),$$

является $(3n–3)$-нецелочисленной вершиной многогранника $M(3,n)$.

Теорема 2. Пусть $n \geq 3$. Матрица $x^3 = \| x^3_{ijt} \|_n$ с ненулевыми элементами

$$x^3_{kk1} = \frac{1}{n-1},\ k = 1, 2, ..., n-1,\ x^3_{n1n} = \frac{n-2}{n-1},\ x^3_{nnn} = \frac{1}{n-1},$$

$$x^3_{k-1,k,k} = \frac{n-k}{n-1},\ k = 2, 3, ..., n-1,\ x^3_{k,k+1,k} = \frac{k-1}{n-1},\ k = 2, 3, ..., n-1,$$

является $(3n–3)$-нецелочисленной вершиной многогранника $M(3,n)$.

При доказательстве этих теорем рассматривается ε-возмущенный ($\varepsilon > 0$) многогранник $M_\varepsilon(3,n)$, заданный условиями

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} x_{ijt}(\varepsilon) = 1 \ \ \forall t \in N_{n-1},\ \ \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} x_{ijn}(\varepsilon) = 1 + n^2\varepsilon,$$

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{t=1}^{n} x_{ijt}(\varepsilon) = 1 + n\varepsilon \ \ \forall j \in N_n,$$

$$\sum_{j=1}^{n}\sum_{t=1}^{n} x_{ijt}(\varepsilon) = 1 + \varepsilon \ \ \forall i \in N_{n-1},\ \ \sum_{j=1}^{n}\sum_{t=1}^{n} x_{njt}(\varepsilon) = 1 + (n^2 - n + 1)\varepsilon,$$

$$x_{ijt}(\varepsilon) \geq 0 \ \ \forall (i,j,t) \in N_n^3,$$

для которого известно следующее утверждение [3]: существует такое число $\varepsilon_1 > 0$, что при $0 < \varepsilon < \varepsilon_1$ многогранник $M_\varepsilon(3,n)$ является невырожденным. При этом всякая вершина $x(\varepsilon) = \| x_{ijt}(\varepsilon) \|_n$ многогранника $M_\varepsilon(3,n)$ может быть представлена в виде $\| x_{ijt}(\varepsilon) \|_n = \| x_{ijt} \|_n + \varepsilon \| \alpha_{ijt} \|_n$, где $\| x_{ijt} \|_n$ – вершина (возможно, вырожденная) многогранника $M(3,n)$, а ненулевые компоненты (не обязательно положительные) матрицы $\| \alpha_{ijt} \|_n$ соответствуют ненулевым компонентам вершины $x(\varepsilon)$, т. е. справедливо включение

$$R(x) = \{(i,j,t) \in N_n^3 : x_{ijt} > 0\} \subseteq R(x(\varepsilon)) = \{(i,j,t) \in N_n^3 : x_{ijt}(\varepsilon) > 0\}.$$

Очевидно, что множества $R(x)$ и $R(x(\varepsilon))$ совпадают, если вершина x многогранника $M(3,n)$ является невырожденной.

Литература

1. *Емеличев В.А., Ковалев М.М., Кравцов М.К.* Многогранники, графы, оптимизация. М.: Наука, 1981. 342 с.
2. *Кравцов М.К., Кравцов В.М., Лукшин Е.В.* О числе нецелочисленных вершин многогранника трехиндексной аксиальной задачи о назначениях // Весці НАН Беларусі. Сер. фіз.-мат. навук. 2000. № 4. С. 59–65.
3. *Раскин Л.Г., Кириченко И.О.* Многоиндексные задачи линейного программирования. М.: Радио и связь, 1982. 240 с.

ОБ АСИМПТОТИЧЕСКОМ РАЗЛОЖЕНИИ ПЛОТНОСТИ МЕДИАНЫ В СЛУЧАЕ МНОЖЕСТВЕННЫХ АДДИТИВНЫХ ИСКАЖЕНИЙ

В. В. Маевский

Введение

В настоящее время актуальным является прогнозирование различных показателей в экономике с помощью трендовых моделей. При этом используется модель линейной по параметрам регрессии и прогнозирование осуществляется с помощью стандартного двухэтапного МНК-алгоритма [1]. Данный алгоритм хорошо работает при точном выполнении всех модельных предположений [2; 3], однако в реальной ситуации в исходных данных присутствуют различные искажения и точность прогноза уменьшается, причем для значительного уменьшения эффективности и точности прогнозирования достаточно совсем небольших уровней искажений [2; 4]. Поэтому важно разработать алгоритмы, устойчивые к искажениям, и найти их свойства [1; 2; 5].

1. Локально-медианный метод прогнозирования

Рассмотрим задачу прогнозирования тренда при наличии выбросов [2; 3]. Пусть наблюдается случайная последовательность

$$x_t = y_t + \xi_t \nu_t,\ y_t = \sum_{i=1}^{m} \theta_i^0 \psi(t) + u_t, \qquad (1)$$

где $t \in \{1,2, ...\}$, $\psi(t) = (\psi_i(t)) \in \mathbb{R}^m$ – система m линейно независимых функций, u_t – случайная ошибка наблюдения в момент t, ν_t – «выброс» в момент t, $\xi_t \in \{0, 1\}$ – бернуллиевская случайная величина (в случае $\xi_t = 0$ «выброс» отсутствует, $\xi_t = 1$ – присутствует).

Предполагается, что $\{u_t\}$ – одинаково распределенные случайные величины, $E\{u_t\} = 0$, $D\{u_t\} = \sigma^2 < +\infty$; $\{\nu_t\}$ – одинаково распределенные случайные величины, $E\{\nu_t\} = a_t$, $D\{\nu_t\} = K\sigma^2 < +\infty$, $K \geq 0$, $K \in \mathbb{R}$; $\{\xi_t\}$ – одинаково распределенные случайные величины Бернулли: