

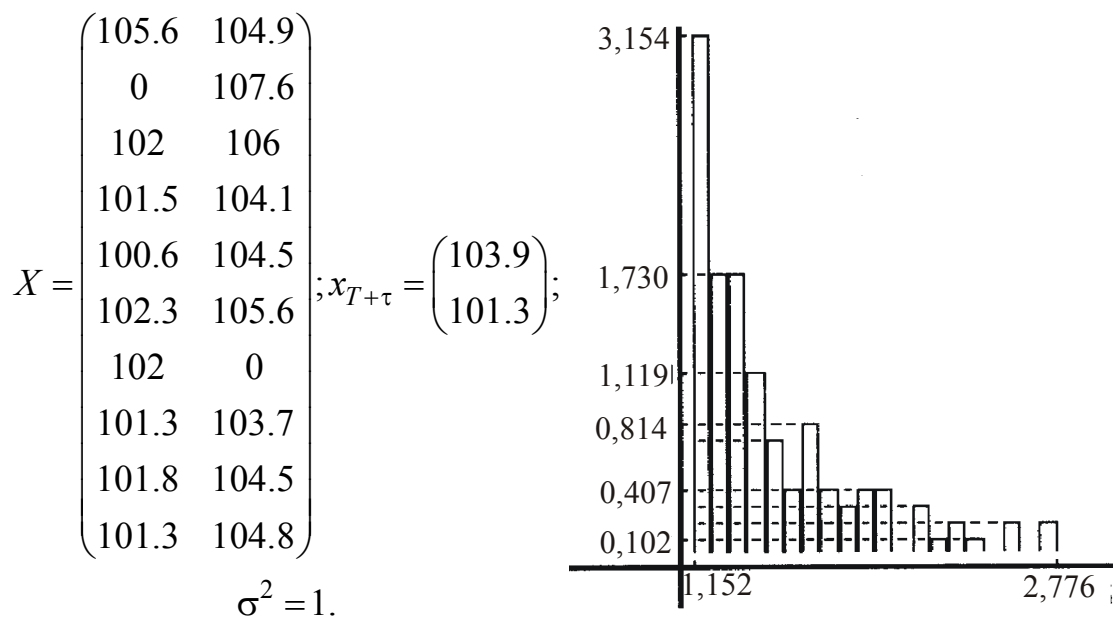


Рис. Гистограмма значений риска

Здесь нулевые значения в матрице X означают пропуск. Объем выборки рисков равен 121, что обеспечивается одиннадцатью возможными значениями по обоим пропущенным значениям из отрезка $[90;110]$. По гистограмме можно оценить нижнюю и верхнюю границы риска, а также вероятность попадания риска прогнозирования в заданный интервал.

Литература

1. Литтл Р. Дж. А., Рубин Д. Б. Статистический анализ данных с пропусками / Пер. с англ. А. М. Никифорова. М.: Финансы и статистика, 1990. 336 с.

К ОЦЕНКЕ СНИЗУ ЧИСЛА НЕЦЕЛОЧИСЛЕННЫХ ВЕРШИН МНОГОГРАННИКА ТРЕХИНДЕКСНОЙ АКСИАЛЬНОЙ ЗАДАЧИ О НАЗНАЧЕНИЯХ

В. М. Кравцов

Известно [1], что многогранник $M(3,n) = \{x = \|x_{ijt}\|_n : x_{ijt} \geq 0 \forall (i,j,t)$

$$\in N_n^3, \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n x_{ijt} = 1 \forall t \in N_n, \sum_{i=1}^n \sum_{t=1}^n x_{ijt} = 1 \forall j \in N_n,$$

$$\sum_{j=1}^n \sum_{t=1}^n x_{ijt} = 1 \forall i \in N_n\},$$

где $N_n = \{1, 2, \dots, n\}$, $N_n^3 = N_n \times N_n \times N_n$, $n \geq 2$, трехиндексной аксиальной задачи о назначениях не является целочисленным, т. е. имеет еще и вершины с дробными компонентами.

Напомним [1], что вершина многогранника $M(3, n)$ содержит не более чем $3n-2$ положительных компонент.

Пусть $r \in R_n = \{4, 6, 7, \dots, 3n-2\}$. Вершину многогранника $M(3, n)$ будем называть r -нецелочисленной, если она содержит ровно r дробных компонент. В [2] доказано, что для любого числа $r \in R_n$, и только для него, у многогранника $M(3, n)$ существуют r -нецелочисленные вершины.

Через $\sigma(n, r)$ будем обозначать число всех r -нецелочисленных вершин многогранника $M(3, n)$, а через $m(r)$ — наименьшее натуральное число k , для которого выполняется неравенство $\sigma(k, r) > 0$.

В работе [2] доказана следующая основная теорема, позволившая опровергнуть гипотезу 18 из [3].

Теорема 1. Для любых натуральных чисел $n \geq 3$ и $r \in R_{n-1}$ справедливо неравенство

$$\sigma(n, r) \geq \binom{n}{m(r)}^3 ((n-m(r))!)^2 \sigma(m(r), r),$$

причем равенство достигается в случае, когда $r \in \{2m(r), 2m(r)+1\}$.

Автором настоящего доклада этот результат обобщен следующим образом.

Теорема 2. Для любых натуральных чисел $n > m(r) \geq 5$ и $r \in R_{n-1} \setminus \{4, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12\}$ справедливо неравенство

$$\sigma(n, r) \geq \binom{n}{m(r)}^3 ((n-m(r))!)^2 \sigma(m(r), r) + \sum_{l=1}^{q(n, r)} \sigma(n, r, l),$$

где

$$\begin{aligned} q(n, r) &= \min \left\{ \left\lceil \frac{r}{6} \right\rceil - 1, n - m(r) \right\}, \\ \sigma(n, r, l) &= \binom{n}{m(r) + l}^3 ((n-m(r)-l)!)^2 \binom{m(r) + l}{3l}^3 \times \\ &\times \frac{((3l)!)^3}{(3!)^{3l} l!} \sigma(m(r) - 2l, r - 6l) (\sigma(3, 6))^l. \end{aligned} \quad (1)$$

Теорема 3. Для любого $n > 5$ справедливы следующие неравенства:

$$\sigma(n, 10) \geq \binom{n}{4}^3 ((n-4)!)^2 \sigma(4, 10) + \binom{n}{5}^3 ((n-5)!)^2 \binom{5}{3}^3 \sigma(3, 6) \sigma(2, 4),$$

$$\sigma(n, 12) \geq \binom{n}{5}^3 ((n-5)!)^2 \sigma(5, 12) + \frac{1}{2} \binom{n}{6}^3 ((n-6)!)^2 \binom{6}{3}^3 \sigma(3, 6) \sigma(3, 6).$$

Из теорем 1–3 получаем следующее следствие.

Следствие 1. Пусть $n > m(r) \geq 2$. Для любого натурального числа $r = 4, 6, 7, 8, 9, 11$, и только для него, справедлива формула

$$\sigma(n, r) = \binom{n}{m(r)}^3 ((n-m(r))!)^2 \sigma(m(r), r).$$

Из теорем 2 и 3 так же вытекает следствие.

Следствие 2. Для числа $f_0^u(M(3, n))$ нецелочисленных вершин многогранника $M(3, n)$ справедливо неравенство

$$f_0^u(M(3, n)) \geq \sum_{r \in R_n} \binom{n}{m(r)}^3 ((n-m(r))!)^2 \sigma(m(r), r) + \sum_{r \in R_{n-1}} \Delta(n, r),$$

где

$$\Delta(n, r) = \begin{cases} \sum_{l=1}^{q(n, r)} \sigma(n, r, l), & \text{если } r \in R_{n-1} \setminus \{4, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12\}, \\ \binom{n}{5}^3 ((n-5)!)^2 \binom{5}{3}^3 \sigma(3, 6) \sigma(2, 4), & \text{если } r = 10, \\ \frac{1}{2} \binom{n}{6}^3 ((n-6)!)^2 \binom{6}{3}^3 \sigma(3, 6) \sigma(3, 6), & \text{если } r = 12, \end{cases}$$

$0! = 1$, $\binom{n}{n} = 1$, а число $\sigma(n, r, l)$ определяется по формуле (1).

Литература

1. Емеличев В.А., Ковалев М.М., Кравцов М.К. Многогранники, графы, оптимизация. М., 1981. 342 с.
2. Кравцов М.К., Кравцов В.М., Лукишин Е.В. О числе нецелочисленных вершин многогранника трехиндексной аксиальной задачи о назначениях // Весці НАН Беларусі. Сер. фіз.-мат. навук. 2000. № 4. С. 59–65.
3. Емеличев В.А., Кравцов М.К. Полиэдральные аспекты многоиндексных аксиальных транспортных задач // Дискретная математика. 1991. Т. 3. Вып. 2. С. 3–24.