

поведенческом уровне с учетом динамики функционирования, затем структурные модели повторяющихся блоков, после чего приступить к описанию схемы в целом. Для верификации проекта, описанного на языке VHDL, необходимо подготовить тестовые воздействия и соответствующую среду для автоматической инициализации последовательности входных состояний. В докладе предлагается практическое решение названных задач. Работа выполнена в системе ModelSim фирмы Model Technology Corporation. Разработаны и исследованы VHDL-модели базовых компонентов памяти, разработана среда для автоматической инициализации тестовых воздействий.

ОЦЕНКА ВЗАИМНОЙ КОВАРИАЦИОННОЙ ФУНКЦИИ ПРОЦЕССОВ С НЕРЕГУЛЯРНЫМИ НАБЛЮДЕНИЯМИ

Т. И. Илюкевич

Пусть $X^r(t) = \{X_a(t), a = \overline{1, r}\}$, $d^r(t) = \{d_a(t), a = \overline{1, r}\}$ $t \in Z$, r -мерные стационарные в широком смысле случайные процессы с математическими ожиданиями $m_a^x = 0, m_a^d = 0$, $a = \overline{1, r}$, взаимными ковариационными функциями $R_{ab}^X(\tau)$, $R_{ab}^d(\tau)$, $\tau \in Z$, взаимными спектральными плотностями $f_{ab}^X(\lambda)$, $f_{ab}^d(\lambda)$, $\lambda \in \Pi$, $a, b = \overline{1, r}$ соответственно. Получаемые наблюдения за процессом $X^r(t), t \in Z$ нерегулярны, т. е. наблюдаемые значения могут быть представлены в виде

$$Y_a(t) = X_a(t)d_a(t), \quad a = \overline{1, r}, \quad t \in Z. \quad (1)$$

Предположим, что в результате некоторого эксперимента мы имеем возможность получить T последовательных через равные промежутки времени наблюдений за процессом $Y^r(t), t \in Z$, т. е.

$$Y_a(0), Y_a(1), \dots, Y_a(T-1). \quad (2)$$

Далее предполагаем, что выполнены следующие условия:

- а) процесс $X^r(t)$, $t \in Z$ не зависит от процесса $d^r(t)$, $t \in Z$,
- б) $R_{ab}^d(\tau) \neq 0$, $\tau = \overline{0, T-1}$, $a, b = \overline{1, r}$ и $d_a(t)$ не зависит от $d_b(t), a \neq b$.

Нетрудно заметить, если процессы $X_a(t)$, $t \in Z$, $Y_a(t)$, $t \in Z$ связаны соотношением (1), а процесс $d_a(t)$, $t \in Z$ удовлетворяет выше перечисленным ограничениям, то процесс $Y_a(t)$, $t \in Z$ будет являться стационарным в широком смысле.

Возникает задача: по наблюдениям (2) за процессом $Y^r(t)$, $t \in Z$ необходимо построить оценку взаимной ковариационной функции $R_{ab}^X(\tau)$, $\tau \in Z$, $a, b = \overline{1, r}$ процесса $X^r(t)$, $t \in Z$ и исследовать ее статистические свойства. В качестве оценки взаимной ковариационной функции рассмотрим статистику вида

$$\hat{R}_{ab}^X(\tau) = \frac{1}{TR_{ab}^d(\tau)} \sum_{t=0}^{T-\tau-1} Y_a(t+\tau)Y_b(t), \quad \tau \in Z, \quad a, b = \overline{1, r}. \quad (3)$$

Теорема 1. Оценка взаимной ковариационной функции является несмещенной и

$$\begin{aligned} D\hat{R}_{ab}^X(\tau) = & \frac{2\pi}{(T-\tau)} \int_{\Pi} \phi_{T-\tau}(z) \left[\iint_{\Pi^2} f_{abab}^X(x_1, z-x_1, x_3) \exp(i\tau(x_1+x_3)) dx_1 dx_3 + \right. \\ & + \int_{\Pi} f_{aa}^X(x_1) f_{bb}^X(z-x_1) dx_1 + \int_{\Pi} f_{ab}^X(x_1) f_{ba}^X(z-x_1) \exp(i\tau(2x_1-z)) dx_1 \left. \right] dz + \\ & + \left(\frac{R_{ab}^x(\tau)}{R_{ab}^d(\tau)} \right)^2 \frac{2\pi}{(T-\tau)} \int_{\Pi} \phi_{T-\tau}(z) \left[\iint_{\Pi^2} f_{abab}^d(x_1, z-x_1, x_3) \exp(i\tau(x_1+x_3)) dx_1 dx_3 + \right. \\ & + \int_{\Pi} f_{aa}^d(x_1) f_{bb}^d(z-x_1) dx_1 + \int_{\Pi} f_{ab}^d(x_1) f_{ba}^d(z-x_1) \exp(i\tau(2x_1-z)) dx_1 \left. \right] dz + \\ & + \frac{2\pi}{(T-\tau)(R_{ab}^d(\tau))^2} \int_{\Pi} \phi_{T-\tau}(g) \left[\iiint \iint_{\Pi^5} f_{abab}^X(x_1, z-x_1, x_3) f_{abab}^d(y_1, g-z-y_1, y_3) \times \right. \\ & \times \exp(i\tau(x_1+x_3+y_1+y_3)) dx_1 dz dx_3 dy_1 dy_3 + \iint \iint_{\Pi^4} f_{abab}^X(x_1, z-x_1, x_3) f_{aa}^d(y_1) \times \\ & \times f_{bb}^d(g-z-y_1) \exp(i\tau(x_1+x_3)) dx_1 dz dx_3 dy_1 + \iint \iint_{\Pi^4} f_{abab}^X(x_1, z-x_1, x_3) \times \\ & \times f_{ab}^d(y_1) f_{ba}^d(g-z-y_1) \exp(i\tau(x_1+x_3+2y_1-g+z)) dx_1 dz dx_3 dy_1 + \\ & + \iint \iint_{\Pi^4} f_{aa}^X(x_1) f_{bb}^X(z-x_1) f_{abab}^d(y_1, g-z-y_1, y_3) \exp(i\tau(y_1+y_3)) dx_1 dz dy_1 dy_3 + \\ & + \iiint \iint_{\Pi^3} f_{aa}^X(x_1) f_{bb}^X(z-x_1) f_{aa}^d(y_1) f_{bb}^d(g-z-y_1) dx_1 dz dy_1 + \iint \iint_{\Pi^3} f_{aa}^X(x_1) f_{bb}^X(z-x_1) \times \\ & \times f_{ab}^d(y_1) f_{ba}^d(g-z-y_1) \exp(i\tau(2y_1-g+z)) dx_1 dz dy_1 + \iiint \iint_{\Pi^4} f_{ab}^X(x_1) f_{ba}^X(z-x_1) \times \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \times f_{abab}^d(y_1, g - z - y_1, y_3) \exp(i\tau(2x_1 - z + y_1 + y_3)) dx_1 dz dy_1 dy_3 + \\
& + \iiint_{\Pi^3} f_{ab}^X(x_1) f_{ba}^X(z - x_1) f_{aa}^d(y_1) f_{bb}^d(g - z - y_1) \exp(i\tau(2x_1 - z)) dx_1 dz dy_1 + \\
& + \iiint_{\Pi^3} f_{ab}^X(x_1) f_{ba}^X(z - x_1) f_{ab}^d(y_1) f_{ba}^d(g - z - y_1) \exp(i\tau(2x_1 + 2y_1 - g)) dx_1 dz dy_1 \Big] dg,
\end{aligned}$$

где $\phi_{T-\tau}(g)$ – ядро Фейера.

Доказательство. Несмещенность оценки (3) очевидным образом вытекает из независимости процессов $X^r(t), d^r(t), t \in Z$ и определения взаимной ковариационной функции.

Вычислим дисперсию оценки, принимая во внимание независимость процессов $X^r(t), d^r(t), t \in Z$ и определение смешанных моментов четвертого порядка. Имеем

$$\begin{aligned}
D \hat{R}_{ab}^X &= \frac{1}{(T - \tau)^2 (R_{ab}^d(\tau))^2} \sum_{t_1, t_2=0}^{T-\tau-1} [M X_a(t_1 + \tau) X_b(t_1) X_a(t_2 + \tau) X_b(t_2) \times \\
& \times M d_a(t_1 + \tau) d_b(t_1) d_a(t_2 + \tau) d_b(t_2) - M X_a(t_1 + \tau) X_b(t_1) M X_a(t_2 + \tau) \times \\
& \times X_b(t_2) M d_a(t_1 + \tau) d_b(t_1) M d_a(t_2 + \tau) d_b(t_2)] = \frac{1}{(T - \tau)^2 (R_{ab}^d(\tau))^2} \times \\
& \times \sum_{t_1, t_2=0}^{T-\tau-1} m_{abab}^X(t_1 + \tau, t_1, t_2 + \tau, t_2) m_{abab}^d(t_1 + \tau, t_1, t_2 + \tau, t_2) - (R_{ab}^X(\tau))^2.
\end{aligned}$$

Учитывая связь смешанных моментов четвертого порядка и смешанных семи инвариантов четвертого порядка, получим

$$\begin{aligned}
D \hat{R}_{ab}^X &= \frac{1}{(T - \tau)^2 (R_{ab}^d(\tau))^2} \sum_{t_1, t_2=0}^{T-\tau-1} [c_{abab}^X(t_1 - t_2 + \tau, t_1 - t_2, \tau) + (R_{ab}^X(\tau))^2 + \\
& + R_{aa}^X(t_1 - t_2) R_{bb}^X(t_1 - t_2) + R_{ab}^X(t_1 - t_2 + \tau) R_{ba}^X(t_1 - t_2 - \tau)] \times \\
& \times [c_{abab}^d(t_1 - t_2 + \tau, t_1 - t_2, \tau) + (R_{ab}^d(\tau))^2 + R_{aa}^d(t_1 - t_2) R_{bb}^d(t_1 - t_2) + \\
& + R_{ab}^d(t_1 - t_2 + \tau) R_{ba}^d(t_1 - t_2 - \tau)] - (R_{ab}^X(\tau))^2.
\end{aligned}$$

Сделав замену переменных суммирования $t_1 - t_2 = l, t_1 = t_1$, имеем

$$D \hat{R}_{ab}^X(\tau) = \frac{1}{(T - \tau)^2 (R_{ab}^d(\tau))^2} \sum_{l=-(T-\tau-1)}^{T-\tau-1} ((T - \tau) - |l|) [c_{abab}^X(l + \tau, l, \tau) +$$

$$\begin{aligned}
& + \left(R_{ab}^X(\tau) \right)^2 + R_{aa}^X(l) R_{bb}^X(l) + R_{ab}^X(l+\tau) R_{ba}^X(l-\tau) \left[c_{abab}^d(l+\tau, l, \tau) + \right. \\
& \left. + \left(R_{ab}^d(\tau) \right)^2 + R_{aa}^d(l) R_{bb}^d(l) + R_{ab}^d(l+\tau) R_{ba}^d(l-\tau) \right] - \left(R_{ab}^X(\tau) \right)^2, \quad \tau \in Z, a, b = \overline{1, r}.
\end{aligned}$$

Подставляя вместо смешанных семиинвариантов четвертого порядка их выражения через семиинвариантные спектральные плотности четвертого порядка, а вместо взаимных ковариационных функций их выражения через взаимные спектральные плотности и используя определение ядра Фейера, получим требуемый результат. Теорема доказана.

Теорема 2. Пусть взаимные спектральные плотности $f_{ab}^X(x_1)$, $f_{ab}^d(y_1)$, $a, b = \overline{1, r}$ непрерывны на Π , а семиинвариантные спектральные плотности $f_{abab}^x(x_1, x_2, x_3)$, $f_{abab}^d(y_1, y_2, y_3)$, $a, b = \overline{1, r}$ непрерывны на Π^3 , $x_j, y_j \in \Pi$, $j = \overline{1, 3}$, тогда

$$\begin{aligned}
\lim_{T \rightarrow \infty} (T - \tau) D \overset{X}{R}_{ab}(\tau) &= 2\pi \left[\iint_{\Pi^2} f_{abab}^X(x_1, -x_1, x_3) \exp(i\tau(x_1 + x_3)) dx_1 dx_3 + \right. \\
&+ \int_{\Pi} f_{aa}^X(x_1) f_{bb}^X(-x_1) dx_1 + \int_{\Pi} f_{ab}^X(x_1) f_{ba}^X(-x_1) \exp(i\tau 2x_1) dx_1 \left. \right] + \left(\frac{R_{ab}^X(\tau)}{R_{ab}^d(\tau)} \right)^2 \times \\
&\times 2\pi \left[\iint_{\Pi^2} f_{abab}^d(x_1, -x_1, x_3) \exp(i\tau(x_1 + x_3)) dx_1 dx_3 + \int_{\Pi} f_{aa}^d(x_1) f_{bb}^d(-x_1) dx_1 + \right. \\
&+ \int_{\Pi} f_{ab}^d(x_1) f_{ba}^d(-x_1) \exp(i\tau 2x_1) dx_1 \left. \right] + \left(\frac{1}{R_{ab}^d(\tau)} \right)^2 2\pi \left[\iiint_{\Pi^5} f_{abab}^X(x_1, z - x_1, x_3) \times \right. \\
&\times f_{abab}^d(y_1, -z - y_1, y_3) \exp(i\tau(x_1 + x_3 + y_1 + y_3)) dx_1 dz dx_3 dy_1 dy_3 + \\
&+ \iiint_{\Pi^4} f_{abab}^X(x_1, z - x_1, x_3) f_{aa}^d(y_1) f_{bb}^d(-z - y_1) \exp(i\tau(x_1 + x_3)) dx_1 dz dx_3 dy_1 + \\
&+ \iiint_{\Pi^4} f_{abab}^X(x_1, z - x_1, x_3) f_{ab}^d(y_1) f_{ba}^d(-z - y_1) \exp(i\tau(x_1 + x_3 + 2y_1 - z)) \times \\
&\times dx_1 dz dx_3 dy_1 + \iiint_{\Pi^4} f_{aa}^X(x_1) f_{bb}^X(z - x_1) f_{abab}^d(y_1, -z - y_1, y_3) \times \\
&\times \exp(i\tau(y_1 + y_3)) dx_1 dz dy_1 dy_3 + \iiint_{\Pi^3} f_{aa}^X(x_1) f_{bb}^X(z - x_1) f_{aa}^d(y_1) \times
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \times f_{bb}^d(-z-y_1)dx_1dzdy_1 + \iiint_{\Pi^3} f_{aa}^X(x_1)f_{bb}^X(z-x_1)f_{ab}^d(y_1)f_{ba}^d(-z-y_1) \times \\
& \times \exp(i\tau(2y_1-z))dx_1dzdy_1 + \iiint_{\Pi^4} f_{ab}^X(x_1)f_{ba}^X(z-x_1)f_{abab}^d(y_1,-z-y_1,y_3) \times \\
& \times \exp(i\tau(2x_1-z+y_1+y_3))dx_1dzdy_1dy_3 + \iiint_{\Pi^3} f_{ab}^X(x_1)f_{ba}^X(z-x_1)f_{aa}^d(y_1)f_{bb}^d(-z-y_1) \\
& \times \exp(i\tau(2x_1-z))dx_1dzdy_1 + \iiint_{\Pi^3} f_{ab}^X(x_1)f_{ba}^X(z-x_1)f_{ab}^d(y_1)f_{ba}^d(-z-y_1) \times \\
& \times \exp(i\tau(2x_1+2y_1-g))dx_1dzdy_1 \Big].
\end{aligned}$$

Доказательство очевидным образом вытекает из свойств ядра Фейра и условий теоремы.

Литература

1. Труш Н. Н. Асимптотические методы статистического анализа временных рядов. // Мн.: БГУ, 1999.
2. Marshall R. J. Autocorrelation estimation of time series with randomly missing observations // Biometrika. 67. 3. P 567–570.

О РИСКЕ ПРОГНОЗИРОВАНИЯ ДЛЯ МОДЕЛИ ЛИНЕЙНОЙ РЕГРЕССИИ С «ПРОПУСКАМИ»

Е. В. Ковалевский

Введение

Проблема обработки данных с пропусками возникает в самых разнообразных приложениях статистического анализа. Многие исследователи стремятся избавиться от пропусков с тем, чтобы впоследствии провести обработку полных данных стандартными средствами [1]. Такой подход подразумевает либо исключение некомплектных наблюдений, либо их заполнение некоторыми значениями. Оба подхода могут оказаться удовлетворительными в том случае, если доля пропусков мала. В противном случае оба метода могут привести к сильному различию статистических выводов, сделанных при наличии полных данных и тех же данных с пропусками.

В практических приложениях часто оказывается полезной модель множественной линейной регрессии

$$y_t = \theta'x_t + \xi_t, t=1, \dots, T, \quad (1)$$

где T – количество наблюдений, $y_t \in R, t=1, \dots, T$ – выходные переменные, $x_t \in R^n, t=1, \dots, T$ – векторы входных переменных, $\theta \in R^n$ –