РОБАСТНОСТЬ СТАТИСТИЧЕСКОГО АНАЛИЗА И ПРОГНОЗИРОВАНИЯ АВТОРЕГРЕССИОННЫХ ВРЕМЕННЫХ РЯДОВ В УСЛОВИЯХ ГЕТЕРОСКЕДАСТИЧНОСТИ

А. С. Гурин, Д. В. Зеневич

Гетероскедастичность авторегрессионного временного ряда

Пусть наблюдаемый временной ряд $\{y_t\}$ удовлетворяет авторегрессионной модели порядка p (AR(p)) в условиях гетероскедастичности:

$$y_t = \theta^{0\prime} Y_{t-1} + \tilde{\xi}_t = \theta^{0\prime} Y_{t-1} + \lambda(t)\xi_t,\ t \in N, \tag{1}$$

где $Y_{t-1} = (y_{t-1},...,y_{t-p})' \in R^p$, $Y_0 = (0,...,0)' \in R^p$, $\theta^0 = (\theta_1^0,...,\theta_p^0)' \in R^p$ – вектор истинных коэффициентов, $\{\xi_t\}$ – н.о.р.с.в., $L\{\xi_t\} = N_1(o,\sigma^2)$, $0 \le \lambda(t) \le \varepsilon$ – детерминированная функция, определяющая функциональные искажения дисперсии. Инновационный процесс в модели (1) имеет вид $\tilde{\xi}_t = \lambda(t)\xi_t$, $D\{\tilde{\xi}_t\} = \lambda^2(t)\sigma^2$.

Будем использовать традиционную процедуру прогнозирования [1]

$$\hat{y}_{T+j} = \theta' \hat{Y}_{T+j-1},\ j = \overline{1,\tau}, \tag{2}$$

где $\hat{y}_t = y_t$ для $t \le T$, $\theta \in R^p$ – вектор коэффициентов, используемых для прогнозирования, $\hat{Y}_t = \left(\hat{y}_t, \hat{y}_{t-1}, \ldots, \hat{y}_{t-p+1}\right) \in R^p$.

Обозначим $d = \left(1,0,\ldots,0\right)' \in R^p$, $U_t = \xi_t d \in R^p$, $\tilde{U}_t = \lambda(t)\xi_t d \in R^p$,

$B_o = \begin{pmatrix} \theta^0 \\ \text{--------} \\ I_{p-1} \quad 0_{p-1} \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} \theta \\ \text{--------} \\ I_{p-1} \quad 0_{p-1} \end{pmatrix}$, где B, B_o – $(p \times p)$-матрицы, I_p – единичная матрица порядка p, $0_{p\times q}\left(1_{p\times q}\right)$ – $(p \times q)$-матрица, все элементы которой равны 0(1).

Определим риск прогнозирования $r = r(\theta^0,\theta,T,\tau) = E\{(\hat{y}_{T+\tau} - y_{T+\tau})^2\} \ge 0$ и матрицу рисков прогнозирования

$$R = R(\theta^0,\theta,T,\tau) = E\{(\hat{Y}_{T+\tau} - Y_{T+\tau})(\hat{Y}_{T+\tau} - Y_{T+\tau})'\} \ge 0\,. \tag{3}$$

Робастность прогнозирования для случая фиксированного θ

Определим $(p \times p)$–матрицы

$$S_{T,\tau} = \sigma^2 \sum_{i=0}^{\tau-1} B_0^i dd'(B_0^i)'\lambda^2(T+\tau-i)\,,\; S_T = \sigma^2 \sum_{i=0}^{T-1} B_0^i dd'(B_0^i)'\lambda^2(T-i)\,.$$

Теорема 1. Пусть наблюдаемый временной ряд $\{y_t\}$ удовлетворяет модели (1), все характеристические числа матрицы B_0 лежат внутри единичного круга, и при прогнозировании (2) используется фиксированный вектор $\theta \in R^p$. Тогда матрица рисков прогнозирования (3) равна

$$R(\theta^0, \theta, T, \tau) = S_{T,\tau} + (B^\tau - B_0^\tau) S_T (B^\tau - B_0^\tau)'\,.$$

Следствие 1. Имеет место следующее представление риска прогнозирования:

$$r(\theta^0, \theta, T, \tau) = \left(S_{T,\tau}\right)_{11} + \sum_{i,j=1}^{p} \left(B^\tau - B_0^\tau\right)_{1i} \left(S_T\right)_{ij} \left(B^\tau - B_0^\tau\right)_{1j}\,.$$

Следствие 2. В случае p=1 риск представляется в виде

$$r\left(\theta^0, \theta\ \ , T, \tau\right) = \sigma^2 \sum_{i=0}^{\tau-1} \left(\theta^0\right)^{2i} \lambda^2(T+\tau-i) + \left(\theta^\tau - \left(\theta^0\right)^\tau\right)^2 \sigma^2 \sum_{i=0}^{T-1} \left(\theta^0\right)^{2i} \lambda^2(T-i)\,.$$

Следствие 3. Минимум по $\theta \in R^p$ риска достигается при $\theta = \theta^0$:

$$r_{\min}(\theta^0, T, \tau) = r(\theta^0, \theta^0, T, \tau) = \sigma^2 \sum_{i=0}^{\tau-1} \left(\left(B_0^i\right)_{11}\right)^2 \lambda^2(T+\tau-i)\,.$$

Определим вектор $\alpha = (\alpha_i) = \theta - \theta_0 \in R^p$ – отклонение вектора параметров авторегрессионной модели, $(p \times p)$-матрицу $\Delta' = \left(\alpha \vdots 0_p \cdots \vdots 0_p\right)$ и

$$\beta(T,\tau) = \left(\beta_{lk}(T,\tau)\right) = \left(\sum_{i=0}^{\tau-1} \left(B_0^i\right)_{11} B_0^{\tau-1-i}\right) S_T \left(\sum_{i=0}^{\tau-1} \left(B_0^i\right)_{11} B_0^{\tau-1-i}\right)'\,.$$

Теорема 2. Пусть выполнены условия теоремы 1, и имеет место отклонение вектора параметров α, тогда риск имеет следующий вид:

$$r(\theta^0, \theta, T, \tau) = r_{\min}(\theta^0, T, \tau) + \sum_{k,l=1}^{p} \beta_{lk}(T,\tau)\alpha_l \alpha_k + O(|\alpha|^3)\,.$$

Робастность прогнозирования для случая оценки θ – МНК.

Исследуем условия, при которых оценки по методу наименьших квадратов для модели авторегрессии (1) с гетероскедастичностью состоятельны и асимптотически нормальны. Пусть для искажений $\lambda(t)$ справедливы следующие условия:

$$T^{-1}\sum_{t=1}^{T}\lambda^2(t)\xrightarrow[T\to\infty]{}c>0,\ 0\le\lambda(t)\le\varepsilon<\infty,\quad t\in N. \tag{4}$$

Обозначим $\Sigma=\sigma^2 dd'$, $F=\sum\limits_{s=0}^{\infty}B_0^s\Sigma B_0^{s'}$. Тогда $E\left\{\tilde{U}_t\tilde{U}_t'\right\}=\lambda^2(t)\Sigma$.

Уравнения, из которых определяются оценки максимального правдоподобия для скалярной модели, являются частным случаем уравнений, используемых в векторной модели

$$T^{-1}\sum_{t=1}^{T}Y_{t-1}Y_{t-1}'\hat{B}'=T^{-1}\sum_{t=1}^{T}Y_{t-1}Y_t'.$$

Лемма 1. Пусть наблюдаемый временной ряд $\{y_t\}$ удовлетворяет модели (1), выполнены условия (4), все характеристические корни матрицы B_0 лежат в единичном круге. Тогда $\underset{T\to\infty}{p\lim}\,T^{-1}\sum\limits_{t=1}^{T}\tilde{U}_tY_{t-1}'=0_{p\times p}$.

Лемма 2. Пусть выполнены условия леммы 1. Тогда

$$\underset{T\to\infty}{p\lim}\,T^{-1}\sum_{t=1}^{T}Y_tY_t'=cF.$$

Теорема 3. Пусть выполнены условия леммы 1. Тогда

$$\underset{T\to\infty}{p\lim}\,\hat{B}=B_0,\ \underset{T\to\infty}{p\lim}\,\hat{\theta}=\theta_0.$$

Пусть для любого τ существуют пределы вида

$$\lim_{T\to\infty}T^{-1}\sum_{t=1}^{T}\lambda^2(t)\lambda^2(t+\tau)=c_\tau. \tag{5}$$

Введем обозначение $F_c=\sum\limits_{\tau=0}^{\infty}B^{\tau}\Sigma B'^{\tau}c_{\tau+1}$.

Теорема 4. Пусть выполнены условия леммы 1 и условие (5). Тогда $T^{-1/2}\sum\limits_{t=1}^{T}Y_{t-1}\tilde{U}_t'$ имеет предельное нормальное распределение с нулевым средним и ковариационной матрицей $F_c\otimes\Sigma$.

Теорема 5. В условиях теоремы 6:

1. $\sqrt{T}\left(\hat{B}'-B'\right)$ имеет асимптотически нормальное распределение с нулевым средним и ковариациями $E\left\{w_{gi}w_{hj}\right\}=\frac{1}{c^2}\sum\limits_{n,m=1}^{p}\tilde{f}_{gn}\tilde{f}_{hm}f_{cnm}\sigma_{ij}$;

2. $\sqrt{T}\left(\hat{\theta}-\theta^0\right)$ имеет асимптотически нормальное распределение с нулевым средним и ковариациями $E\left\{w_g w_h\right\}=\frac{1}{c^2}\sum_{n,m=1}^{p}\tilde{f}_{gn}\tilde{f}_{hm}f_{cnm}\sigma^2$, где $\tilde{f}_{gn}$ – элемент матрицы F^{-1} с индексом (g,n), f_{cnm} – элемент матрицы F_c с индексом (n,m), σ_{ij} – элемент матрицы Σ с индексом (i,j).

Теорема 6. Пусть выполнены условия леммы 1 и $\hat{\theta}\in R^p$ – МНК-оценка вектора параметров. Тогда матрица риска прогнозирования имеет вид

$$R(\theta^0,\theta,T,\tau)=\sum_{i=0}^{\tau-1}B_0^i\Sigma\left(B_0^i\right)'\lambda^2(T+\tau-i)+O(T^{-1})\ 1_{p\times p}.$$

Литература

1. *Андерсон Т. В.* Статистический анализ временных рядов. М., Наука. 1976.
2. *Norbert Stockinger, Rudolf Dutter.* Robust time series analisis. Praha: Academia, 1987.
3. *Kharin Yu.S., Zenevich D.V.* Robustness of autoregressive forecasting under misspecified model. Computer data analysis and modeling. Proceeding of the Fifth International Conference (June 8–12, 1998, Minsk). Vol. 1. Minsk: BSU, 1998.

ИССЛЕДОВАНИЕ АЛГОРИТМОВ РЕШЕНИЯ ТРЕХИНДЕКСНОЙ АКСИАЛЬНОЙ ПРОБЛЕМЫ ВЫБОРА

С. А. Дичковская

Многочисленные практически важные задачи, возникающие в различных областях науки, техники и производства, сводятся к p-индексной аксиальной проблеме выбора (p-аксиальной ПВ).

Известно, что для ее решения могут быть использованы как точные, так и приближенные алгоритмы. Однако применение точных методов на практике зачастую невозможно в силу неэффективности используемых алгоритмов, трудоемкость которых экспоненциально зависит от объема исходной информации (размеров задачи), что и неудивительно, поскольку она (даже при p=3) является NP-полной. В связи с этим несомненный интерес представляет исследование и разработка простых и эффективных приближенных алгоритмов.

Постановка 3-аксиальной ПВ порядка n заключается в минимизации целевой функции