СИСТЕМА МАССОВОГО ОБСЛУЖИВАНИЯ BMAP/SM/1 С ПОВТОРНЫМИ ВЫЗОВАМИ И ПАССИВНЫМИ ОБСЛУЖИВАЮЩИМИ УСТРОЙСТВАМИ

В. В. Бороховский

Введение

В системах массового обслуживания (СМО) с повторными вызовами запрос, заставший прибор занятым, не становится в очередь, как в классических системах с ожиданием, и не теряется, а направляется в своего рода накопитель («на орбиту») с тем, чтобы через некоторое случайное время повторить попытку получить обслуживание (совершить «повторный вызов»). Подробнее см., например, [1].

В СМО с пассивными приборами, как правило, наличествуют два функционально различных вида обслуживающих устройств: т. н. активные и пассивные приборы. Активный прибор осуществляет первичное обслуживание запроса, а затем привлекает к его обслуживанию пассивные приборы. Обслужив запрос, активный прибор способен сразу приступить к обслуживанию следующего. Каждый из привлеченных пассивных приборов при этом продолжает обслуживание запроса в течение некоторого случайного времени.

В рассматриваемой СМО одновременно имеются и возможность повторных вызовов, и пассивные приборы. Такие системы ранее не изучались ввиду отсутствия математического аппарата для исследования случайных процессов, описывающих их функционирование. Такой аппарат появился недавно в виде теории асимптотически квазитеплицевых цепей Маркова [2]. Практические приложения такого рода моделей состоят в оценивании производительности и расчетах при проектировании локальных сетей ЭВМ, широковещательных радиосетей, мобильных, сотовых и обычных телефонных сетей.

1. Модель

Рассмотрим СМО с пассивными приборами и повторными вызовами.

Входным потоком первичных заявок на обслуживание является BMAP (см. [3]). Пусть управляющий процесс BMAP ν_t имеет пространство состояний $\{0,1,\dots,W\}$ и матричную производящую функцию переходных вероятностей $D(z)=\sum_{k=0}^{\infty} D_k z^k,\ \ |z|<1$.

Обслуживание заявок ведется одним активным и N одинаковыми пассивными приборами. Каждый запрос нуждается в обслуживании активным прибором и ровно одним пассивным прибором. Время обслуживания заявки активным прибором является временем пребывания полумарковского процесса m_t в фиксированном состоянии. Данный процесс имеет пространство состояний $\{0,1,\dots,M\}$ и полумарковское ядро $B(t)=\left\|B_{m,m'}(t)\right\|_{m,m'=\overline{0,M}}$. Время обслуживания заявки пассивным прибором – экспоненциально распределенная с параметром γ случайная величина.

Если пачка первичных заявок застает активный прибор свободным, то одна заявка из пачки поступает на обслуживание активным прибором, а остальные отправляются на орбиту. Повторные вызовы с орбиты происходят через случайные промежутки времени, распределенные экспоненциально с параметром α_i, $\alpha_i \xrightarrow[i\to\infty]{} \infty$, где i – количество заявок на орбите. Заявки остаются на орбите, пока не получат обслуживание. Если в момент окончания обслуживания заявки активным прибором все пассивные приборы заняты, то заявка отправляется на орбиту.

2. Стационарное распределение вложенной цепи Маркова

Пусть t_n – n-й момент окончания обслуживания активным прибором. Рассмотрим четырехмерный случайный процесс $\{i_n, q_n, \nu_n, m_n\}$, $n\geq 1$, где i_n – количество заявок на орбите в момент t_n+0, $i_n\geq 0$, q_n – количество занятых пассивных приборов в момент t_n-0, $q_n=\overline{0,N}$, ν_n – состояние управляющего процесса входного потока ν_t в момент t_n, $\nu_n=\overline{0,W}$, m_t – состояние управляющего процесса полумарковского обслуживания m_t в момент t_n+0, $m_n=\overline{0,M}$.

Процесс $\{i_n,q_n,\nu_n,m_n\}, n\geq 1$, является четырехмерной цепью Маркова. Рассмотрим следующие стационарные вероятности состояний:

$$p(i,q,\nu,m)=\lim_{n\to\infty}P(i_n=i,\ q_n=q,\ \nu_n=\nu,\ m_n=m),\ i\geq 0,\ q=\overline{0,N},\ \nu=\overline{0,W},\ m=\overline{0,M}.$$

Перенумеруем данные вероятности в лексикографическом порядке:

$$\vec{p}(i,q,\nu)=\left(p(i,q,\nu,0),\ p(i,q,\nu,1),\dots,p(i,q,\nu,M)\right),$$

$$\vec{p}(i,q)=\left(\vec{p}(i,q,0),\ \vec{p}(i,q,1),\dots,\vec{p}(i,q,W)\right),$$

$$\vec{p}_i=\left(\vec{p}(i,0),\ \vec{p}(i,1),\dots,\vec{p}(i,N)\right).$$

Решим задачу отыскания этих вероятностей.

Как будет показано ниже, цепь Маркова $\{i_n, q_n, \nu_n, m_n\}, n \ge 1,$ принадлежит классу асимптотически квазитеплицевых цепей Маркова (АКТЦМ). Формальное определение асимптотически квазитеплицевой цепи Маркова приведено, например, в [2].

Теорема. Цепь Маркова $\{i_n, q_n, \nu_n, m_n\}, n \ge 1,$ принадлежит классу АКТЦМ, при этом матрицы вероятностей ее одношаговых переходов имеют вид

$$Y_{i,l} = \left\| P\{i_{n+1}=l, q_{n+1}=q', \nu_{n+1}=\nu', m_{n+1}=m' \mid i_n=i, q_n=q, \nu_{n+1}=\nu, m_{n+1}=m\} \right\|_{q,q'=\overline{0,N}, \nu,\nu'=\overline{0,W}, m,m'=\overline{0,M}} =$$

$$= \sum_{j=1}^{J} Q_j^{(i)} Y_{l-i+1}^{(j)}, \quad l \ge i-1, \ i > 0, \quad Y_{0,l} = V_l, \ l \ge 0, \ i = 0,$$

где

$$J = 4, \ Q_1^{(i)} = Q^{(i)}\left(-\tilde{D}_0\right), \ Q_2^{(i)} = Q^{(i)}\alpha_i, \ Q_3^{(i)} = \tilde{Q}^{(i)}\left(-\tilde{D}_0\right), \ Q_4^{(i)} = \tilde{Q}^{(i)}\alpha_i,$$

$$Y_i^{(1)} = \Psi^{(i)}, \ Y_i^{(2)} = \Omega^{(i)}, \ Y_i^{(3)} = \breve{I} + \hat{I}\ \Psi^{(i)}\breve{I} + \hat{I}\ \Psi^{(i-1)}\hat{I},$$

$$Y_i^{(4)} = \breve{I} + \hat{I}\ \Omega^{(i)}\breve{I} + \hat{I}\ \Omega^{(i-1)}\hat{I}, \ V_l = Q_1^{(0)}Y_{l+1}^{(1)} + Q_3^{(0)}Y_{l+1}^{(3)},$$

$$Q^{(i)} = \left(\tilde{I} + \hat{I}\right)\Delta^{(i)} - \tilde{Q}^{(i)}, \ \tilde{Q}^{(i)} = \hat{I}\ \Delta^{(i)}\hat{I}, \ \Delta^{(i)} = \left\| \Delta_{q,q'}^{(i)} \right\|_{q,q'=\overline{0,N}} \otimes I_{M+1},$$

$$\Delta_{q,q'}^{(i)} = \begin{cases} C_q^{q'} \sum\limits_{m=0}^{q-q'} C_{q-q'}^{m} (-1)^m \left(D_0 - \left(\alpha_i + (q'+m)\gamma\right) I_{W+1}\right)^{-1}, \ q' = \overline{0,q}, \ q = \overline{0,N}; \\ \mathbf{0}_{(W+1)}, \ q' > q; \end{cases}$$

$$\Psi^{(n)} = \left(-\tilde{D}_0\right)^{-1} \sum_{k=1}^{n} \tilde{D}_k\ \Omega^{(n-k)}, \mathrm{n}>0, \ \Omega^{(j)} = \int\limits_0^\infty \delta(t) \ \otimes P(j,t) \ \otimes dB(t), j \ge 0,$$

$$\tilde{D}_k = I_{N+1} \otimes D_k \otimes I_{M+1}, \ \delta(t) = \left\| \delta_{q,q'}(t) \right\|_{q,q'=\overline{0,N}},$$

$$\delta_{q,q'}(t) = \begin{cases} C_q^{q'} e^{-q'\gamma t}\left(1 - e^{-\gamma t}\right)^{q-q'} \ q' = \overline{0,q}, \ q = \overline{0,N}; \\ 0, q' > q; \end{cases}$$

$$\hat{I} = \mathrm{diag}\underbrace{(0,0,\ldots,0,1)}_{N+1} \otimes I_{(W+1)\times(M+1)}, \ \breve{I} = \mathrm{diag}\underbrace{(1,1,\ldots,1,0)}_{N+1} \otimes I_{(W+1)\times(M+1)},$$

$\tilde{I} = \left\| \tilde{\delta}_{i+1,j} \right\|_{i,j=\overline{0,N}} \otimes I_{(W+1)\times(M+1)}$, $\tilde{\delta}_{i,j} = \begin{cases} 1, & i = j; \\ 0, & i \neq j. \end{cases}$ – символ Кронекера, I_R – единичная матрица размерности $R \times R$, $\mathbf{0}_R$ – нулевая матрица размерности $R \times R$.

Условие существования стационарного режима АКТЦМ и алгоритм нахождения ее стационарных вероятностей представлены в [1] и основаны на идее сенсорных цепей Маркова и использовании близости поведения АКТЦМ и ее так называемой «предельной квазитеплицевой цепи» при больших значениях счетной компоненты. Упомянутые условие и алгоритм сформулированы в терминах предельной квазитеплицевой цепи.

Предельной квазитеплицевой цепью Маркова для рассмотренной АКТЦМ $\{i_n, q_n, \nu_n, m_n\}, n \geq 1$, будет цепь Маркова, матрицы одношаговых переходных вероятностей которой имеют вид

$$\tilde{Y}_{i,l} = \sum_{j=1}^{J} Q_j \, Y_{l-i+1}^{(j)}, \; l \geq i-1, \;\; i > 0, \text{ и } \tilde{Y}_{0,l} = V_l, \;\; l \geq 0, i = 0,$$

где $Q_j = \lim_{i \to \infty} Q_j^{(i)} < +\infty, \; j = \overline{1,J}$.

В нашем случае $Q_1 = Q_3 = \mathbf{0}_{(N+1)(W+1)(M+1)}$, $Q_2 = \tilde{I}$, $Q_4 = \hat{I}$.

Таким образом, задача нахождения вероятностей стационарных состояний исследуемой цепи решена, что позволяет рассчитывать и другие численные характеристики СМО, такие, как среднее количество заявок на орбите, среднее время пребывания заявки на орбите и т.д.

Литература

1. *Дудин А. Н., Клименок В. И.* Системы массового обслуживания с коррелированными потоками // Мн.: БГУ, 2000. 175 с.
2. *Dudin A., Klimenok V.* A retrial BMAP/SM/1 system with linear repeated request // Queueing Systems. 2000. № 34. P. 47–66.
3. *Lucantoni, D.* New results on the single server queue with a batch Markovian arrival process // Communications in Statistic Stochastic models. 1991. V. 7. P.1–46.