

*ошое*

Белорусский государственный университет

УТВЕРЖЕНО  
Проректор по учебной работе  
« 31 » 09 2015 г.  
Регистрационный № 01 уч.



**ТЕОРИЯ ФУНКЦИЙ КОМПЛЕКСНОГО ПЕРЕМЕННОГО**

Учебная программа учреждения высшего образования  
по учебной дисциплине для специальностей:

1-31 03 09 Компьютерная математика и системный анализ

2015г.

Учебная программа составлена на основе ОСВО 1-31 03-09-2013, утвержденного 30.08.2013 и учебного плана, утвержденного 30.05.2013, регистрационный № G31-137/уч. по специальности 1-31 03 09 Компьютерная математика и системный анализ.

**СОСТАВИТЕЛИ:**

**Александр Яковлевич Радыно** – доцент кафедры теории функций механико-математического факультета Белорусского государственного университета, кандидат физико-математических наук, доцент;

**Вениамин Григорьевич Кротов** – заведующий кафедрой теории функций механико-математического факультета Белорусского государственного университета, доктор физико-математических наук, профессор;

**Эдмунд Иванович Зверович** – профессор кафедры теории функций механико-математического факультета Белорусского государственного университета, доктор физико-математических наук, профессор.

**РЕКОМЕНДОВАНА К УТВЕРЖДЕНИЮ:**

Кафедрой теории функций  
(протокол № 11 от 06.05.2015)

Учебно-методической комиссией механико-математического факультета  
Белорусского государственного университета  
(протокол № 6 от 26.05.2015)

## ПОЯСНИТЕЛЬНАЯ ЗАПИСКА

Учебная дисциплина «Теория функций комплексного переменного» относится к числу дисциплин, составляющих основу математического образования. Этот курс тесно связан с такими дисциплинами как «Математический анализ», «Дифференциальные уравнения», «Функциональный анализ», «Уравнения математической физики». В рамках дисциплины «Теория функций комплексного переменного» на случай комплексных переменных переносятся теория функциональных рядов и теория интегрирования, рассматриваемые при изучении дисциплины «Математический анализ». С другой стороны, аналитические методы, разрабатываемые на основе базовых понятий дисциплины «Теория функций комплексного переменного», используются при изучении учебной дисциплины «Уравнения математической физики». На базе теории функций комплексного переменного строятся примеры, иллюстрирующие основные элементы теории метрических, нормированных и гильбертовых пространств (дисциплина «Функциональный анализ»). Свойства функций комплексного переменного используются при построении спектральной теории операторов и теории разрешимости некоторых классов интегральных уравнений (дисциплины «Функциональный анализ» и «Интегральные уравнения»).

В материале данной дисциплины изучается аппарат некоторых классических и современных разделов естествознания. Освоение дисциплины «Теория функций комплексного переменного» позволит студентам самостоятельно решать теоретические и прикладные задачи современного анализа.

**Цель дисциплины «Теория функций комплексного переменного»:** повышение уровня профессиональной компетентности студентов, формирование понятия о технических возможностях одного из разделов современного анализа.

**Образовательная цель:** изложение основ комплексного анализа и возможностей его использования в моделях классического и современного естествознания.

**Развивающая цель:** формирование у студентов умений использования технических возможностей комплексного анализа, самостоятельного построения и исследования математических моделей.

**Основные задачи,** решаемые в рамках изучения дисциплины «Теория функций комплексного переменного»:

- освоение важнейших понятий теории функций комплексного переменного (предел, непрерывность, дифференцируемость);
- знакомство с понятием многозначных функций комплексного переменного и понятием аналитического продолжения;
- изучение основ теории интегрирования и освоение специальных приемов интегрирования функций комплексного переменного, в том числе различных аспектов теории вычетов;
- изучение основ геометрической теории функций комплексного переменного и отработка навыков построения специальных отображений элементарными функциями;
- разработка элементов теории рядов в комплексной области и характери-

зации особых точек однозначного характера.

В результате изучения учебной дисциплины студент должен

**знать:**

- основные понятия функций одной комплексной переменной;
- методы доказательств и алгоритмы решения задач комплексного анализа;
- новейшие достижения в области теории функций комплексного переменного в задачах естествознания;

**уметь:**

- использовать основные результаты комплексного анализа в практической деятельности;
- использовать теоретические и практические навыки основ теории функций комплексного переменного в математике;

**владеть:**

- методами теории аналитических функций;
- методами решения основных вычислительных задач теории функций комплексного переменного.

В результате изучения дисциплины «Теория функций комплексного переменного» студент должен обладать следующими компетенциями:

АК-1. Уметь применять базовые научно-теоретические знания для решения теоретических и практических задач.

АК-2. Владеть системным и сравнительным анализом.

АК-3. Владеть исследовательскими навыками.

АК-4. Уметь работать самостоятельно.

АК-5. Быть способным вырабатывать новые идеи (обладать креативностью).

АК-6. Владеть междисциплинарным подходом при решении проблем.

АК-7. Иметь навыки, связанные с использованием технических устройств, управлением информацией и работой с компьютером.

АК-8. Иметь лингвистические навыки (устная и письменная коммуникация).

АК-9. Уметь учиться, повышать свою квалификацию в течение всей жизни.

СЛК-1. Обладать качествами гражданственности.

СЛК-2. Быть способным к социальному взаимодействию.

СЛК-3. Обладать способностью к межличностным коммуникациям.

СЛК-4. Владеть навыками здорового образа жизни.

СЛК-5. Быть способным к критике и самокритике (критическое мышление)

СЛК-6. Уметь работать в команде.

ПК-1. Использовать фундаментальные математические знания в качестве основы при проведении прикладных исследований;

ПК-2. Понять поставленную задачу, оценить ее корректность;

ПК-3. Доказывать основные утверждения, выделять главные смысловые аспекты в доказательствах;

ПК-4. Самостоятельно разрабатывать алгоритмы решения и их анализировать;

ПК-5. Получать результат на основе анализа, его корректно формулировать, видеть следствия сформулированного результата;

ПК-6. Передавать результат проведенных исследований в виде конкретных рекомендаций, выраженных в терминах предметной области изучавшегося явления;

ПК-7. Публично представлять собственные и известные научные результаты.

ПК-8. Преподавать математические дисциплины и информатику в учреждениях образования;

ПК-9. Применять на практике изученные основы педагогического мастерства;

ПК-10. Распространять знания из области математики, информатики, их приложений среди различных слоев населения.

ПК-11. Разрабатывать и реализовывать процессы жизненного цикла информационных систем, программного обеспечения, сервисов систем информационных технологий;

ПК-12. Развивать и использовать инструментальные средства, информационные среды, автоматизированные системы;

ПК-13. Разрабатывать и анализировать алгоритмы, протоколы, вычислительные модели и модели данных для реализации функций и сервисов систем информационных технологий;

ПК-14. Использовать математические и компьютерные методы исследований при анализе современных естественнонаучных, экономических, социально-политических процессов.

ПК-15. Осваивать и реализовывать управленческие инновации в сфере высоких технологий.

ПК-16. Руководить выполнением проектных работ;

ПК-17. Контролировать и поддерживать трудовую и производственную дисциплину;

ПК-18. Разрабатывать документацию (графики работ, инструкции, планы, заявки, деловые письма и т.п.), а также отчетную документацию по установленным формам;

ПК-19. Взаимодействовать со специалистами смежных профилей.

ПК-20. Разрабатывать и согласовывать представляемые материалы.

ПК-21. Оптимизировать управленческие решения.

Учебная программа предназначена для студентов 2 курса (4 семестр) очной формы получения образования.

В соответствии с учебным планом специальности на изучение дисциплины отводится всего 138 часов, в том числе 68 часов аудиторных занятий, из них лекционных – 34 часа, практических занятий – 30 часов, УСР – 4 часа. Форма отчетности – экзамен.

## СОДЕРЖАНИЕ УЧЕБНОГО МАТЕРИАЛА

### Тема 1. Введение в комплексный анализ

Предмет теории функций комплексного переменного. Основные определения и факты, связанные с комплексными числами. Расширенная комплексная плоскость. Сфера Римана, стереографическая проекция, сферическое расстояние.

Топология (расширенной) комплексной плоскости. Предел, непрерывность.

### Тема 2. Дифференцируемость функций комплексного переменного

Дифференцируемые функции комплексного переменного. Правила дифференцирования (производная и арифметические операции, производная сложной функции, производная обратной функции). Условия Коши-Римана. Аналитические функции. Геометрический смысл аргумента и модуля производной.

Понятие о конформных отображениях. Однолиственность. Принцип сохранения области. Критерий локальной однолиственности.

### Тема 3. Элементарные аналитические функции

Степенная функция с натуральным показателем, полиномы.

Линейная и дробно-линейная функции. Конформность и групповое свойство. Круговое свойство. Неподвижные точки. Сохранение симметрии. Автоморфизмы единичного круга. Понятие о теореме Римана о конформной эквивалентности односвязных областей и о соответствии границ при конформном отображении. Понятие о многозначных аналитических функциях, их точках ветвления.

Функция Жуковского. Профили Жуковского.

Показательная функция и ее свойства (групповое свойство, формула Эйлера, экспоненциальная форма записи комплексных чисел, множество значений, периодичность).

Тригонометрические функции их свойства (четность, периодичность, формулы сложения, множества значений).

Гиперболические функции и их свойства (связь с тригонометрическими функциями, формулы сложения, множества значений).

Логарифмическая функция и ее главное значение, свойства (связь с экспоненциальной функцией, групповое свойство, выделение однозначной ветви).

Степенная функция и степень ее многозначности в зависимости от показателя (случаи целого, рационального и иррационального действительного показателя).

Обратные тригонометрические и гиперболические функции. (свойства, выделение однозначной ветви).

### Тема 4. Интегрирование функций комплексного переменного

Пути и кривые на плоскости. Комплексные криволинейные интегралы. Первообразная, формула Ньютона-Лейбница.

Интегральная теорема Коши для простого и составного контуров. Интегральная формула Коши. Интеграл типа Коши. Бесконечная дифференцируемость аналитических функций, формулы Коши для производных аналитических функций. Теорема Морера.

Гармонические функции, их связь с аналитическими. Принцип максимума, теорема единственности, теорема о среднем. Интегралы Пуассона и Шварца.

### **Тема 5. Последовательности и ряды аналитических функций**

Функциональные последовательности и ряды. Виды сходимости. Сходимость, равномерная внутри области. Теорема Вейерштрасса о последовательностях и рядах аналитических функций. Теорема Рунге.

Степенной ряд, теорема Абеля. Радиус сходимости. Формула Коши – Адамара. Аналитичность суммы степенного ряда. Разложение аналитической функции в степенной ряд, единственность разложения, ряд Тейлора. Действия со степенными рядами.

Нули аналитической функции, порядок нуля. Теорема единственности для аналитических функций.

### **Тема 6. Ряд Лорана и особые точки однозначного характера**

Ряд Лорана, область его сходимости. Разложение аналитической функции в ряд Лорана, единственность разложения. Формулы для коэффициентов разложения, неравенства Коши.

Теорема об устранимой особой точке, теорема Лиувилля. Классификация изолированных особых точек однозначного характера. Полус и существенно особая точка. Случай бесконечно удаленной точки. Теорема Сохоцкого, понятие о теореме Пикара.

### **Тема 7. Теория вычетов и ее приложения. Теория аналитических продолжений. Целые и мероморфные функции.**

Определение вычета, теорема о вычетах. Формулы для вычисления вычетов. Применение к вычислению интегралов. Логарифмический вычет, принцип аргумента. Теорема Руше, теорема Гурвица. Принцип сохранения области. Понятие аналитического продолжения. Целые и мероморфные функции.

### **Тема 8. Преобразование Лапласа и операционное исчисление.**

Преобразование Лапласа, изображение, оригиналы. Свойства (подобие, линейность, смещение, дифференцирование, интегрирование, запаздывание). Формула Меллина, таблица изображений. Свертка.

Приложения к дифференциальным и интегральным уравнениям.

### **Тема 9. Асимптотические разложения.**

Простейшие асимптотические оценки. Асимптотические оценки рядов и интегралов. Понятие асимптотического разложения и действия над ними. Основные методы: интегрирование по частям, метод Лапласа.

Метод стационарной фазы, метод перевала.

## УЧЕБНО-МЕТОДИЧЕСКАЯ КАРТА

Но ме р раз де ла, те мы	Название раздела, темы	Количество аудиторных часов					Ко ли че ст во ча со в по У С Р	Ли тер ату ра	Формы контроля знаний
		ле кц ии	пр ак ти чес ки е зан ят ия	се м ин ар ские ие за ня тия	ла бо ра то рн ые за ня тия	и н о е			
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
<b>1</b>	<b>Тема 1. Введение в комплексный анализ</b>	<b>2</b>	<b>4</b>					[5,3 ,1]	
1.1	Предмет теории функций комплексного переменного. Основные определения и факты, связанные с комплексными числами. Расширенная комплексная плоскость. Сфера Римана, стереографическая проекция, сферическое расстояние. Топология (расширенной) комплексной плоскости. Предел, непрерывность.	2	4						Проверка индивидуальных заданий
<b>2</b>	<b>Дифференцируемость функций комплексного переменного</b>	<b>4</b>	<b>2</b>				<b>2</b>	[5,3 ,2]	
2.1	Дифференцируемые функции комплексного переменного. Правила дифференцирования (производная и арифметические операции, производная сложной функции, производная обратной функции). Условия Коши-Римана. Аналитические функции. Геометрический смысл аргумента и модуля производной.	2	1				2		Контрольная работа
2.2	Понятие о конформных отображениях. Однолиственность. Принцип сохранения области. Критерий локальной однолиственности.	2	1						
<b>3</b>	<b>Элементарные аналитические функции</b>	<b>6</b>	<b>4</b>					[5,3 ,4]	



3.1	<p>Степенная функция с натуральным показателем, полиномы.</p> <p>Линейная и дробно-линейная функции. Конформность и групповое свойство. Круговое свойство. неподвижные точки. Сохранение симметрии. Автоморфизмы единичного круга. Функция Жуковского. Профили Жуковского.</p>	2	2						Проверка индивидуальных заданий
3.2	<p>Понятие о теореме Римана о конформной эквивалентности односвязных областей и о соответствии границ при конформном отображении. Понятие о многозначных аналитических функциях, их точках ветвления.</p>	2							Проверка индивидуальных заданий
3.3	<p>Показательная функция и ее свойства (групповое свойство, формула Эйлера, экспоненциальная форма записи комплексных чисел, множество значений, периодичность).</p> <p>Тригонометрические функции и их свойства (четность, периодичность, формулы сложения, множества значений). Гиперболические функции и их свойства (связь с тригонометрическими функциями, формулы сложения, множества значений).</p> <p>Логарифмическая функция и ее главное значение, свойства (связь с экспоненциальной функцией, групповое свойство, выделение однозначной ветви).</p> <p>Степенная функция и степень ее многозначности в зависимости от показателя (случаи целого, рационального и иррационального действительного показателя).</p> <p>Обратные тригонометрические и гиперболические функции. (свойства, выделение однозначной ветви).</p>	2	2						Проверка индивидуальных заданий.
<b>4</b>	<b>Интегрирование функций комплексного переменного</b>	<b>6</b>	<b>4</b>					[5,3,8]	
4.1	<p>Пути и кривые на плоскости. Комплексные криволинейные интегралы. Первообразная, формула Ньютона – Лейбница.</p>	2							Проверка индивидуальных заданий.

4.2	Интегральная теорема Коши для простого и составного контуров. Интегральная формула Коши. Интеграл типа Коши.	2						Проверка индивидуальных заданий.
4.3	Бесконечная дифференцируемость аналитических функций, формулы Коши для производных аналитических функций. Теорема Морера. Гармонические функции, их связь с аналитическими. Принцип максимума, теорема единственности, теорема о среднем. Интегралы Пуассона и Шварца.	2	4					
<b>5</b>	<b>Последовательности и ряды аналитических функций</b>	<b>2</b>	<b>4</b>				[5,3,7]	Коллоквиум
5.1	Функциональные последовательности и ряды. Виды сходимости. Сходимость, равномерная внутри области. Теорема Вейерштрасса о последовательностях и рядах аналитических функций. Теорема Рунге.	1	2					Проверка индивидуальных заданий.
5.2	Степенной ряд, теорема Абеля. Радиус сходимости. Формула Коши – Адамара. Аналитичность суммы степенного ряда. Разложение аналитической функции в степенной ряд, единственность разложения, ряд Тейлора. Действия со степенными рядами. Нули аналитической функции, порядок нуля. Теорема единственности для аналитических функций.	1	2					Проверка индивидуальных заданий.
<b>6</b>	<b>Ряд Лорана и особые точки однозначного характера</b>	<b>4</b>	<b>4</b>				[5,3]	
6.1	Ряд Лорана, область его сходимости. Разложение аналитической функции в ряд Лорана, единственность разложения. Формулы для коэффициентов разложения, неравенства Коши.	2	2					Проверка индивидуальных заданий
6.2	Теорема об устранимой особой точке, теорема Лиувилля. Классификация изолированных особых точек однозначного характера. Полюс и существенно особая точка. Случай бесконечно удаленной точки. Теорема Сохоцкого, понятие о теореме Пикара.	2	2					Проверка индивидуальных заданий.
<b>7</b>	<b>Теория вычетов и ее приложения</b>	<b>2</b>	<b>4</b>			<b>2</b>	[5,3,6]	

7.1	Определение вычета, теорема о вычетах. Формулы для вычисления вычетов. Применение к вычислению интегралов. Логарифмический вычет, принцип аргумента. Теорема Руше, теорема Гурвица. Принцип сохранения области.	2	4				2		Контрольная работа
<b>8</b>	<b>Преобразование Лапласа и операционное исчисление</b>	<b>4</b>	<b>4</b>					[5,3,4]	
8.1	Преобразование Лапласа, изображение, оригиналы. Свойства (подобие, линейность, смещение, дифференцирование, интегрирование, запаздывание). Формула Меллина, таблица изображений. Свертка.	2	2						Проверка индивидуальных заданий
8.2	Приложения к дифференциальным и интегральным уравнениям.	2	2						Проверка индивидуальных заданий
<b>9</b>	<b>Асимптотические разложения</b>	<b>4</b>	<b>4</b>					[5,3,8]	
9.1	Простейшие асимптотические оценки. Асимптотические оценки рядов и интегралов. Понятие асимптотического разложения и действия над ними. Основные методы: интегрирование по частям, метод Лапласа.	2	2						Проверка индивидуальных заданий
9.2	Метод стационарной фазы, метод перевала.	2	2						Проверка индивидуальных заданий
	<b>ВСЕГО по дисциплине</b>	<b>34</b>	<b>34</b>				<b>4</b>		

## **ИНФОРМАЦИОННО-МЕТОДИЧЕСКАЯ ЧАСТЬ**

### **Список литературы**

#### **Основная литература**

- 1 Ю.В. Сидоров, М.Ф. Федорюк, М.И. Шабунин. Лекции по ТФКП. М.: Наука, 1989.
- 2 Б.В. Шабат. Введение в комплексный анализ. Ч. I. М.: Наука, 1976.
- 3 М.А. Лаврентьев, Б.В. Шабат. Методы теории функций комплексного переменного. М.: Наука, 1973.
- 4 Э.И. Зверович. Вещественный и комплексный анализ. Т. 6. Минск: Вышэйшая школа, 2008.
- 5 И.А. Александров, В.В. Соболев. Аналитические функции комплексного переменного. М.: Высшая школа, 1984.
- 6 Э.И. Зверович. Вещественный и комплексный анализ. Т. 1–6. Минск: Вышэйшая школа, 2008.
- 7 Л.И. Волковысский, Г.Л. Лунц, И.Г. Араманович. Сборник задач по теории функций комплексного переменного. М.: Наука, 1970.

#### **Дополнительная литература**

- 8 А.И. Маркушевич. Теория аналитических функций. Т. 1, 2. М.: Наука, 1968.
- 9 М.А. Евграфов. Аналитические функции. М.: Наука, 1968 и другие издания.
- 10 А.Г. Свешников, А.Н. Тихонов. Теория функций комплексной переменной. М.: Наука, 1974 и другие издания.
- 11 Сборник задач по теории аналитических функций / Под ред. М.А. Евграфова, М., 1972.
- 12 Г. Полиа, Г. Сеге. Задачи и теоремы из анализа. Т. 1, 2. М.: Наука, 1978.
- 13 А. Гурвиц, Р. Курант. Теория функций. М.: Наука, 1968.





ДОПОЛНЕНИЯ И ИЗМЕНЕНИЯ К УЧЕБНОЙ ПРОГРАММЕ  
ПО ИЗУЧАЕМОЙ УЧЕБНОЙ ДИСЦИПЛИНЕ

на \_\_\_\_ / \_\_\_\_ учебный год

№п	Дополнения и изменения	Основание

Учебная программа пересмотрена и одобрена на заседании кафедры  
(протокол № \_\_\_\_ от \_\_\_\_\_ 20\_ г.)

Заведующий кафедрой

\_\_\_\_\_

(степень, звание)

\_\_\_\_\_

(подпись)

\_\_\_\_\_

(И.О.Фамилия)

УТВЕРЖДАЮ  
Декан факультета

\_\_\_\_\_

(степень, звание)

\_\_\_\_\_

(подпись)

\_\_\_\_\_

(И.О.Фамилия)