

О МНОГООБРАЗИЯХ ПРЕДСТАВЛЕНИЙ И ХАРАКТЕРОВ ОДНОГО КЛАССА ГРУПП С ОДНИМ СООТНОШЕНИЕМ

А. Н. АДМИРАЛОВА¹⁾, В. В. БЕНЯШ-КРИВЕЦ¹⁾

¹⁾Белорусский государственный университет, пр. Независимости, 4, 220030, г. Минск, Республика Беларусь

Приведено описание структуры и свойств многообразий представлений $R_n(G)$ и многообразий характеров $X_n(G)$ групп, имеющих копредставление вида $G = \langle x_1, y_1, \dots, x_g, y_g, t \mid t([x_1, y_1] \cdots [x_g, y_g])^p t^{-1} = ([x_1, y_1] \cdots [x_g, y_g])^q \rangle$, где $g \geq 2$, p и q взаимно просты и $|p| \geq 2$, $|q| \geq 2$. Доказано, что каждая неприводимая компонента $R_n(G)$ является рациональным многообразием размерности $2gn^2 + 1$. Кроме того, доказано, что каждая неприводимая компонента $X_n(G)$ есть многообразие размерности $(2g - 1)n^2 + 2$.

Ключевые слова: копредставление группы; многообразие представлений; многообразие характеров; неприводимая компонента; размерность многообразия; рациональное многообразие.

ON REPRESENTATION VARIETIES AND CHARACTERS OF ONE CLASS OF GROUPS WITH ONE RELATION

A. N. ADMIRALOVA^a, V. V. BENIASH-KRYVETS^a

^aBelarusian State University, Nezavisimosti avenue, 4, 220030, Minsk, Republic of Belarus

In the article we provide the description of the structure and the properties of representation varieties $R_n(G)$ and character varieties $X_n(G)$ of the groups with the presentation $G = \langle x_1, y_1, \dots, x_g, y_g, t \mid t([x_1, y_1] \cdots [x_g, y_g])^p t^{-1} = ([x_1, y_1] \cdots [x_g, y_g])^q \rangle$, where $g \geq 2$, p and q are coprime and $|p| \geq 2$, $|q| \geq 2$. It is proved that every irreducible component of $R_n(G)$ is a rational variety of dimension $2gn^2 + 1$. Besides, it is pointed out that every irreducible component of $X_n(G)$ is a variety of dimension $(2g - 1)n^2 + 2$.

Key words: a group presentation; a representation variety; a character variety; an irreducible component; a dimension of a variety; a rational variety.

Образец цитирования:

Адмиралова А. Н., Беньаш-Кривец В. В. О многообразиях представлений и характеров одного класса групп с одним соотношением // Вестн. БГУ. Сер. 1, Физика. Математика. Информатика. 2016. № 3. С. 166–172.

For citation:

Admiralova A. N., Beniash-Kryvets V. V. On representation varieties and characters of one class of groups with one relation. *Vestnik BGU. Ser. 1, Fiz. Mat. Inform.* 2016. No. 3. P. 166–172 (in Russ.).

Авторы:

Александра Николаевна Адмиралова – аспирантка кафедры высшей алгебры и защиты информации механико-математического факультета. Научный руководитель – В. В. Беньаш-Кривец.

Валерий Вацлавович Беньаш-Кривец – доктор физико-математических наук; заведующий кафедрой высшей алгебры и защиты информации механико-математического факультета.

Authors:

Alexandra Admiralova, postgraduate student of the department of higher algebra and information security, faculty of mathematics and mechanics.

al.admiralova@gmail.com

Valery Beniash-Kryvets, doctor of science (physics and mathematics); head of the department of higher algebra and information security, faculty of mathematics and mechanics.

benyash@bsu.by

Пусть $G = \langle g_1, \dots, g_m \rangle$ – конечно-порожденная группа, K – алгебраически замкнутое поле характеристики нуль. Тогда любое конечномерное линейное представление $\rho: G \rightarrow GL_n(K)$ определяется набором элементов $(\rho(g_1), \dots, \rho(g_m)) \in GL_n(K)^m$, удовлетворяющих всем определяющим соотношениям группы G , т. е. имеет место вложение $\rho \mapsto (\rho(g_1), \dots, \rho(g_m))$ множества $\text{Hom}(G, GL_n(K))$ в $GL_n(K)^m$. Образ $\text{Hom}(G, GL_n(K))$ относительно этого вложения является аффинным K -многообразием $R_n(G) \subset GL_n(K)^m$, которое называют многообразием представлений группы G [1].

Группа $GL_n(K)$ действует одновременным сопряжением компонент на $R_n(G)$, и ее орбиты находятся во взаимно однозначном соответствии с классами эквивалентных представлений G . При этом существует категорный фактор $R_n(G)//G$, который обозначают $X_n(G)$ и называют многообразием характеров представлений группы G . В общем случае о многообразиях $R_n(G)$, $X_n(G)$ известно не много и полного описания их структуры сложно ожидать. Однако для некоторых классов групп такие описания получены. Например, в [2] описаны многообразия представлений и характеров групп Баумслага – Солитера, а в работах [3, 4] – многообразия представлений фундаментальных групп компактных ориентируемых и неориентируемых поверхностей соответственно.

В настоящей работе рассматривается класс групп с одним соотношением, имеющих копредставление

$$G = \langle x_1, y_1, \dots, x_g, y_g, t \mid t([x_1, y_1] \cdots [x_g, y_g])^p t^{-1} = ([x_1, y_1] \cdots [x_g, y_g])^q \rangle,$$

где $g \geq 2$; p и q – взаимно просты, $|p| \geq 2$, $|q| \geq 2$. Обозначим через $\Omega(p, q)$ множество матриц $A \in SL_n(K)$ таких, что A^p и A^q сопряжены. Для матрицы $A \in \Omega(p, q)$ положим

$$L(A) = \left\{ (x_1, y_1, \dots, x_g, y_g) \in GL_n(K)^{2g} \mid [x_1, y_1] \cdots [x_g, y_g] = A \right\}.$$

Теорема 1. $L(A)$ – неприводимое рациональное многообразие размерности $(2g-1)n^2 + 1$.

Доказательство теоремы 1 может быть получено, если провести рассуждения, аналогичные представленным в [4] для многообразия $\left\{ (x_1, y_1, \dots, x_g, y_g) \in GL_n(K)^{2g} \mid [x_1, y_1] \cdots [x_g, y_g] = E \right\}$, где E – единичная матрица.

Введем необходимые обозначения. Для матрицы $A \in GL_n(K)$ обозначим через $Z(A)$ ее централизатор. Пусть $A \in \Omega(p, q)$. Рассмотрим морфизм

$$f_A: L(A) \times Z(A) \times GL_n(K) \rightarrow R_n(G), \quad (x_1, y_1, \dots, x_g, y_g, z, T) \rightarrow T(x_1, y_1, \dots, x_g, y_g, t_0 z) T^{-1},$$

где t_0 – некоторая фиксированная матрица, для которой справедливо равенство

$$t_0 A^p t_0^{-1} = A^q. \quad (1)$$

Лемма 1. Образ морфизма f_A не зависит от выбора матрицы t_0 .

Доказательство. Пусть $t_1, t_1 \neq t_0$, – другая матрица, для которой также справедливо равенство $t_1 A^p t_1^{-1} = A^q$, f_{A, t_0}, f_{A, t_1} – соответствующие морфизмы. Тогда с учетом (1) имеем $t_1^{-1} t_0 A^p t_0^{-1} t_1 = A^p$, откуда следует, что элемент $t_1^{-1} t_0$ перестановочен с A^p , т. е. $t_1^{-1} t_0 \in Z(A^p)$. По [2, лемма 2.4] имеет место равенство множеств $Z(A) = Z(A^p) = Z(A^q)$. Таким образом, для любого элемента централизатора $z_0 \in Z(A)$ найдется матрица $z = t_1^{-1} t_0 z_0 \in Z(A)$, для которой выполняется равенство $t_0 z_0 = t_1 z_1$. Следовательно, для любого упорядоченного набора матриц $(x_1, y_1, \dots, x_g, y_g, T) \in L(A) \times GL_n(K)$ справедливо равенство $f_{A, t_0}(x_1, y_1, \dots, x_g, y_g, z_0, T) = f_{A, t_1}(x_1, y_1, \dots, x_g, y_g, z_1, T)$, т. е. образы морфизмов f_{A, t_0} и f_{A, t_1} совпадают.

Лемма 2. Если $A, B \in \Omega(p, q)$ – две подобные матрицы, то $\text{Im } f_A = \text{Im } f_B$.

Доказательство немедленно следует из определения морфизма f_A .

Замыкание образа $\text{Im } f_A$ в топологии Зарисского обозначим $W(A)$. Справедлива следующая теорема.

Теорема 2. 1. $W(A) \subset R_n(G)$ и размерность $W(A)$ равна $2gn^2 + 1$.

2. Каждое многообразие $W(A)$ является неприводимой компонентой $R_n(G)$, и этими компонентами исчерпываются все неприводимые компоненты $R_n(G)$.

3. Число неприводимых компонент многообразия $R_n(G)$ равно числу классов сопряженности матриц в множестве $\Omega(p, q)$.

4. Каждая неприводимая компонента $R_n(G)$ является рациональным многообразием.

Доказательство. 1. Непосредственным вычислением легко проверить, что $W(A) \subset R_n(G)$. Для вычисления размерности $W(A)$ воспользуемся теоремой о размерности слоев морфизма. Вычислим размерность слоев морфизма f_A . Пусть $f_A(u) = w$, где $u = (x_1, y_1, \dots, x_g, y_g, z, T)$. Пусть для точки $\bar{u} = (\bar{x}_1, \bar{y}_1, \dots, \bar{x}_g, \bar{y}_g, \bar{z}, \bar{T})$ справедливо равенство $f_A(\bar{u}) = f_A(u) = w$, т. е.

$$T(x_1, y_1, \dots, x_g, y_g, t_0 z)T^{-1} = \bar{T}(\bar{x}_1, \bar{y}_1, \dots, \bar{x}_g, \bar{y}_g, t_0 \bar{z})\bar{T}^{-1}. \quad (2)$$

Из (2) получаем следующую систему уравнений:

$$\bar{x}_i = \bar{T}^{-1}T x_i T^{-1} \bar{T}, \quad \bar{y}_i = \bar{T}^{-1}T y_i T^{-1} \bar{T}, \quad 1 \leq i \leq g. \quad (3)$$

Поскольку для точек $(x_1, y_1, \dots, x_n, y_n), (\bar{x}_1, \bar{y}_1, \dots, \bar{x}_n, \bar{y}_n) \in L(A)$ справедливо равенство

$$[x_1, y_1] \cdots [x_n, y_n] = [\bar{x}_1, \bar{y}_1] \cdots [\bar{x}_n, \bar{y}_n] = A,$$

то из системы (3) следует равенство

$$A = T^{-1} \bar{T} A \bar{T}^{-1} T.$$

Следовательно, $T^{-1} \bar{T} \in Z(A)$, откуда

$$\bar{T} = TH, \quad (4)$$

где $H \in Z(A)$. Тогда $t_0 z = T^{-1} \bar{T} t_0 \bar{z} \bar{T}^{-1} T = H t_0 \bar{z} H^{-1}$, а значит,

$$\bar{z} = t_0^{-1} H^{-1} t_0 z H. \quad (5)$$

Из равенств (3)–(5) следует, что слой $f_A^{-1}(w)$ изоморфен $Z(A)$. Таким образом, все слои морфизма f_A имеют одинаковую размерность, равную $\dim Z(A)$. Поэтому размерность $W(A)$ равна

$$\dim W(A) = (\dim L(A) + \dim Z(A) + \dim GL_n(K)) - \dim Z(A) = \dim L(A) + n^2.$$

Теперь из теоремы 1 получаем, что $\dim W(A) = 2gn^2 + 1$.

2. Очевидно, что $R_n(G)$ является объединением неприводимых многообразий $W(A)$, где A пробегает все классы сопряженности в множестве $\Omega(p, q)$. Ясно, что если матрицы $A, B \in \Omega(p, q)$ не подобны, то многообразия $W(A)$ и $W(B)$ не могут строго содержаться друг в друге в силу равенства их размерностей. Если предположить, что имеется равенство $W(A) = W(B)$, то тогда $\text{Im } f_A \cap \text{Im } f_B \neq \emptyset$, а отсюда нетрудно получить, что матрицы A и B подобны, – противоречие. Следовательно, многообразия $W(A)$ являются в точности неприводимыми компонентами $R_n(G)$. В силу леммы 2 число таких неприводимых компонент равно числу классов сопряженности матриц в множестве $\Omega(p, q)$, откуда следует п. 3 теоремы 2.

4. Покажем теперь, что компоненты $W(A)$ являются рациональными многообразиями. Не ограничивая общности, будем считать, что A имеет жорданову нормальную форму $A = \text{diag}(A_1, \dots, A_s)$, где $A_i = \text{diag}(J_{m_{i1}}(\alpha_i), \dots, J_{m_{i,s_i}}(\alpha_i))$ – $(n_i \times n_i)$ -матрица, которая является прямой суммой всех клеток Жордана $J_{m_{ij}}(\alpha_i)$ из A с собственным значением α_i . Тогда централизатор $Z(A)$ состоит из невырожденных матриц вида $C = \text{diag}(C_1, \dots, C_s)$, где

$$C_i = \begin{pmatrix} X_{11} & \dots & X_{1s_i} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ X_{s_i1} & \dots & X_{s_i s_i} \end{pmatrix} \quad (6)$$

и X_{rt} – произвольная правильная верхняя треугольная $(m_{ir} \times m_{it})$ -матрица [6, гл. VIII].

Рассмотрим множество $T(A)$ матриц вида $Y = (Y_{ij}) \in GL_n(\mathbb{C})$, где Y_{ij} при $i \neq j$ – произвольная верхняя треугольная $(n_i \times n_j)$ -матрица; Y_{ii} имеет следующий вид:

$$Y_{ii} = \begin{pmatrix} Z_{11}^{(i)} & \dots & Z_{1s_i}^{(i)} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ Z_{s_i1}^{(i)} & \dots & Z_{s_i s_i}^{(i)} \end{pmatrix}.$$

При этом блоки Y_{ii} описываются следующим образом. Матрица размером $(m_{ir} \times m_{ir})$ имеет вид

$$Z_{rr}^{(i)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ u_{21} & u_{22} & \dots & u_{2n} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ u_{m_{ir}1} & u_{m_{ir}2} & \dots & u_{m_{ir}m_{ir}} \end{pmatrix}.$$

Если же $r \neq k$, то в случае $m_{ir} \leq m_{ik}$

$$Z_{rk}^{(i)} = \begin{pmatrix} w_{11} & \dots & w_{1, m_{ik} - m_{ir}} & 0 & \dots & 0 \\ w_{21} & \dots & \dots & \dots & \dots & w_{2m_{ik}} \\ \vdots & \dots & \dots & \dots & \dots & \vdots \\ w_{m_{ir}1} & \dots & \dots & \dots & \dots & w_{m_{ir}m_{ik}} \end{pmatrix},$$

в противном случае

$$Z_{rk}^{(i)} = \begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 \\ w_{21} & \dots & w_{2m_{ik}} \\ \vdots & \dots & \vdots \\ w_{m_{ir}1} & \dots & w_{m_{ir}m_{ik}} \end{pmatrix}.$$

Отметим, что размерность $\dim T(A) = n^2 - \dim Z(A)$.

Обозначим через $\bar{O}(A)$ замыкание по Зарисскому класса сопряженности матрицы A . Рассмотрим морфизм $\psi : T(A) \rightarrow \bar{O}(A)$, $X \mapsto XAX^{-1}$. Покажем, что морфизм ψ является инъективным и доминантным. Предположим, что для $X, Y \in T(A)$ мы имеем $XAX^{-1} = YAY^{-1}$. Тогда $X^{-1}Y = C \in Z(A)$, т. е. $Y = XC$. Учитывая, что $C = \text{diag}(C_1, \dots, C_s)$, где C_i имеет вид (6), и учитывая вид матриц $X, Y \in T(A)$, получаем,

что $C = E$ – единичная матрица, а значит, $X = Y$. Поскольку $\dim \bar{O}(A) = n^2 - \dim Z(A) = \dim T(A)$, то из инъективности ψ следует его доминантность. Следовательно, по [5, предложение 3.17] ψ – бирациональный изоморфизм и $\bar{O}(A)$ бирационально изоморфно многообразию $T(A)$, которое является рациональным. Таким образом, $\bar{O}(A)$ – рациональное многообразие.

Обозначим через h_A ограничение морфизма f_A на $L(A) \times Z(A) \times T(A)$. Несложное вычисление показывает, что h_A – инъективный морфизм. А именно если

$$h_A(x_1, y_1, \dots, x_g, y_g, z, T) = h_A(\bar{x}_1, \bar{y}_1, \dots, \bar{x}_g, \bar{y}_g, \bar{z}, \bar{T}),$$

то имеет место равенство (2). Отсюда следует, что $TAT^{-1} = \bar{T}A\bar{T}^{-1}$, откуда $T^{-1}\bar{T} \in Z(A)$, т. е.

$$\bar{T} = TB \quad (7)$$

для некоторой матрицы B из $Z(A)$. Учитывая общий вид (6) для матриц из централизатора $Z(A)$ и вид матриц из $T(A)$, получаем из (7), что $T = \bar{T}$. Тогда равенство

$$T(x_1, y_1, \dots, x_g, y_g, t_0 z)T^{-1} = \bar{T}(\bar{x}_1, \bar{y}_1, \dots, \bar{x}_g, \bar{y}_g, t_0 \bar{z})\bar{T}^{-1}$$

означает, что $(x_1, y_1, \dots, x_g, y_g, z, T) = (\bar{x}_1, \bar{y}_1, \dots, \bar{x}_g, \bar{y}_g, \bar{z}, \bar{T})$.

Поскольку имеет место равенство размерностей $\dim L(A) \times Z(A) \times T(A) = 2gn^2 + 1 = \dim W(A)$, то морфизм h_A является доминантным. Следовательно, h_A – бирациональный изоморфизм и $W(A)$ бирационально изоморфно рациональному многообразию $L(A) \times Z(A) \times T(A)$. Теорема 2 доказана.

Рассмотрим теперь многообразия характеров $X_n(G)$. Напомним некоторые общие факты. Группа $GL_n(K)$ действует естественным образом (одновременным сопряжением компонент) на $R_n(G)$, и ее орбиты находятся во взаимно однозначном соответствии с классами эквивалентных представлений группы G . В общем случае орбиты относительно этого действия не обязательно замкнуты и, следовательно, многообразие орбит (геометрический фактор) не является алгебраическим многообразием. Однако поскольку $GL_n(K)$ – редуктивная группа, то K -алгебра $GL_n(K)$ -инвариантных регулярных функций $K[R_n(G)]^{GL_n(K)}$ является конечно-порожденной и можно поставить в соответствие этой K -алгебре некоторое аффинное многообразие $R_n(G)//G$ (категорный фактор), которое мы будем обозначать через $X_n(G)$ и называть многообразием характеров представлений группы G в $GL_n(K)$. Точки $X_n(G)$ параметризуют замкнутые $GL_n(K)$ -орбиты [7]. Учитывая, что орбита представления ρ замкнута лишь в том случае, когда ρ вполне приводимо, а также то, что вполне приводимые представления лежат в одной орбите тогда и только тогда, когда они имеют равные характеры, получаем следующее: точки $X_n(G)$ параметризуют характеры вполне приводимых представлений из $R_n(G)$. Рассмотрим морфизм факторизации

$$\pi: R_n(G) \rightarrow X_n(G),$$

ставящий в соответствие представлению $\rho \in R_n(G)$ его характер $\chi(\rho) \in X_n(G)$. Морфизм π обладает свойством $GL_n(K)$ -замкнутости [7, § 3]: если $Y \subset R_n(G)$ – замкнутое $GL_n(K)$ -инвариантное подмножество в $R_n(G)$, то $\pi(Y)$ замкнуто в $X_n(G)$. Также морфизм π обладает свойством разделения. Пусть $(X_i)_{i \in I}$ – семейство замкнутых $GL_n(K)$ -инвариантных подмножеств в $R_n(G)$, тогда

$\pi(\cap_{i \in I} X_i) = \cap_{i \in I} \pi(X_i)$. В частности, образы двух непересекающихся замкнутых $GL_n(K)$ -инвариантных подмножеств многообразия $R_n(G)$ не пересекаются.

Теорема 3. Множествами $X(A) = \pi(W(A))$ исчерпываются все неприводимые компоненты многообразия характеров $X_n(G)$, и каждая из компонент $X(A)$ имеет размерность $(2g-1)n^2 + 2$. Число неприводимых компонент многообразия $X_n(G)$ равно числу классов сопряженности матриц в множестве $\Omega(p, q)$.

Для доказательства теоремы нам необходимы следующие леммы.

Лемма 3. Каждая компонента $W(A)$ содержит неприводимое представление, а поэтому включает открытое подмножество U , состоящее из неприводимых представлений.

Доказательство. Рассмотрим проекцию

$$h: L(A) \rightarrow GL_n(K)^{2g-2}, (x_1, y_1, \dots, x_g, y_g) \mapsto (x_1, y_1, \dots, x_{g-1}, y_{g-1}).$$

Р. Томпсон [8] доказал, что для любой матрицы $B \in SL_n(K)$ найдется пара матриц $C, D \in GL_n(K)$ такая, что $[C, D] = B$. В силу этого морфизм h является сюръективным, потому что для любой точки $(x_1, y_1, \dots, x_{g-1}, y_{g-1}) \in GL_n(K)^{2g-2}$ найдется пара матриц x_g, y_g такая, что справедливо равенство

$$[x_g, y_g] = ([x_1, y_1] \cdots [x_{g-1}, y_{g-1}])^{-1} A.$$

Обозначим через U' открытое подмножество в $GL_n(K)^{2g-2}$, состоящее из неприводимых наборов матриц $(x_1, y_1, \dots, x_{g-1}, y_{g-1}) \in GL_n(K)^{2g-2}$. Тогда $\bar{U} = h^{-1}(U')$ – открытое подмножество в $L(A)$ и любая точка $(x_1, y_1, \dots, x_g, y_g) \in \bar{U}$ – неприводимый набор матриц. Тогда образ

$$f_A(x_1, y_1, \dots, x_g, y_g, E, E) = (x_1, y_1, \dots, x_g, y_g, t_0)$$

является неприводимым представлением в $W(A)$, что и требовалось доказать.

Лемма 4. $\dim X(A) = (2g-1)n^2 + 2$.

Доказательство. Пусть $\rho \in W(A)$ – неприводимое представление. Тогда слой $\pi^{-1}(\pi(\rho))$ состоит из всех представлений ρ' таких, что характеры ρ и ρ' совпадают. Поскольку ρ неприводимо, то ρ' эквивалентно ρ . Поэтому слой $\pi^{-1}(\pi(\rho))$ совпадает с орбитой $O(\rho)$ представления ρ . Рассмотрим сюръективный морфизм $\phi: GL_n(K) \rightarrow O(\rho)$, $M \mapsto M\rho M^{-1}$. В силу неприводимости представления ρ его централизатор состоит из скалярных матриц, поэтому слои морфизма ϕ имеют размерность 1. Значит,

$$\dim \pi^{-1}(\pi(\rho)) = \dim O(\rho) = n^2 - 1.$$

Следовательно,

$$\dim X(A) = \dim W(A) - (n^2 - 1) = (2g-1)n^2 + 2,$$

что и требовалось доказать.

Доказательство теоремы 3. В силу свойства $GL_n(K)$ -замкнутости морфизма π множества $X(A)$ являются замкнутыми подмножествами в $X_n(G)$ и $X_n(G) = \cup_{A \in \Omega(p, q)} X(A)$. Пусть матрицы

$A, B \in \Omega(p, q)$ не сопряжены. Поскольку $\dim X(A) = \dim X(B)$, то многообразия $X(A)$ и $X(B)$ не могут строго содержаться друг в друге. В силу свойства разделения морфизма π многообразия $X(A)$ и $X(B)$ не могут совпадать. Значит, многообразия $X(A)$, когда A пробегает все классы сопряженности в множестве $\Omega(p, q)$, – это в точности все неприводимые компоненты многообразия характеров $X_n(G)$. Теорема 3 доказана.

Первый автор поддержан грантом БРФФИ – РФФИ № Ф15PM-025.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК (REFERENCES)

1. *Lubotzky A., Magid A.* Varieties of representations of finitely generated groups // *Mem. AMS.* 1985. Vol. 8, № 336. P. 1–116 [Lubotzky A., Magid A. Varieties of representations of finitely generated groups. *Mem. AMS.* 1985. Vol. 8, No. 336. P. 1–116 (in Engl.)].
2. *Беняш-Кривец В. В., Говорушко И. О.* Многообразия представлений и характеров групп Баумслэга – Солитера // *Тр. Матем. ин-та им. В. А. Стеклова.* 2016. Т. 292. С. 26–42 [Benyash-Krivets V. V., Govorushko I. O. Representation and character varieties of the Baumslag – Solitar Groups. *Tr. Mat. inst. im. V. A. Steklova.* 2016. Vol. 292. P. 26–42 (in Russ.)].
3. *Rapinchuk A. S., Benyash-Krivetz V. V., Chernousov V. I.* Representation varieties of the fundamental groups of compact orientable surfaces // *Israel J. Math.* 1996. Vol. 93. P. 29–71 [Rapinchuk A. S., Benyash-Krivetz V. V., Chernousov V. I. Representation varieties of the fundamental groups of compact orientable surfaces. *Israel J. Math.* 1996. Vol. 93. P. 29–71 (in Engl.)].
4. *Беняш-Кривец В. В., Черноусов В. И.* Многообразия представлений фундаментальных групп компактных неориентируемых поверхностей // *Матем. сб.* 1997. Т. 188, № 7. С. 47–92 [Benyash-Krivets V. V., Chernousov V. I. Representation varieties of the fundamental groups of non-orientable surfaces. *Mat. Sb.* 1997. Vol. 188, No. 7. P. 47–92 (in Russ.)].
5. *Мамфорд Д.* Алгебраическая геометрия. I. Комплексные проективные многообразия. М., 1979.
6. *Гантмахер Ф. Р.* Теория матриц. М., 1967.
7. *Крафт Х.* Геометрические методы в теории инвариантов. М., 1987.
8. *Thompson R. G.* Commutators in the special and general linear groups // *Trans. AMS.* 1961. Vol. 101. P. 16–33 [Thompson R. G. Commutators in the special and general linear groups. *Trans. AMS.* 1961. Vol. 101. P. 16–33 (in Engl.)].

Статья поступила в редколлегию 20.06.2016.

Received by editorial board 20.06.2016.