Вестник БГУ. Сер. 1. 2016. № 3. С. 160–165

УДК 539.3

СТАЦИОНАРНЫЕ ТЕМПЕРАТУРНЫЕ ПОЛЯ В АНИЗОТРОПНЫХ КОЛЬЦЕВЫХ ПЛАСТИНАХ ПЕРЕМЕННОЙ ТОЛЩИНЫ С ТЕПЛОИЗОЛИРОВАННЫМИ ОСНОВАНИЯМИ

В. В. КОРОЛЕВИЧ [1)], ***Д. Г. МЕДВЕДЕВ*** [2)]

[1)]*Филиал Национального педагогического университета им. М. Драгоманова, ул. Язельская, 266/10, 16000, г. Прага, Чешская Республика*
[2)]*Белорусский государственный университет, пр. Независимости, 4, 220030, г. Минск, Республика Беларусь*

Приводится решение осесимметричной стационарной задачи теплопроводности для профилированных полярно-ортотропных кольцевых пластин с теплоизолированными основаниями. Учитывается зависимость теплофизических характеристик материала пластины от температуры. Задаются значения температур на контурах кольцевой пластины. Распределение температур в такой пластине будет осесимметричным. Сначала предполагается, что радиальный коэффициент теплопроводности задается квадратичной функцией. После интегрирования стационарного уравнения теплопроводности имеем кубическое уравнение для температуры, которое можно решить аналитически или численными методами. В случае линейной зависимости радиального коэффициента теплопроводности от температуры получаем квадратное уравнение для температуры. Выбрав одно из решений квадратного уравнения, имеющего физический смысл, получим закон распределения температуры в профилированных полярно-ортотропных кольцевых пластинах с теплоизолированными основаниями. Приводятся законы распределения температуры в кольцевых анизотропных пластинах постоянной толщины, со степенным профилем, конических и экспоненциальных.

Ключевые слова: композиционный материал; температура; полярно-ортотропная кольцевая пластина; стационарное уравнение теплопроводности; дифференциальное уравнение; кубическое уравнение; квадратное уравнение; пластина постоянной толщины; пластина степенного профиля; коническая пластина; пластина экспоненциального профиля.

SOLUTION OF THE AXISYMMETRIC STATIONARY PROBLEMS OF THE HEAT CONDUCTIVITY FOR THE POLAR-ORTHOTROPIC RING PLATE OF VARIABLE THICKNESS WITH THERMALLY INSULATED BASES AND WITH TEMPERATURE DEPENDENT THERMOPHYSICAL CHARACTERISTICS

U. V. KARALEVICH [a], ***D. G. MEDVEDEV*** [b]

[a]*Branch office National Pedagogical University M. Dragomanov, Jaselska street, 266/10, 16000, Praha, Czech Republic*
[b]*Belarusian State University, Nezavisimosti avenue, 4, 220030, Minsk, Republic of Belarus*

The solution of the axisymmetric stationary problems of the heat conductivity for profiled polar-orthotropic ring plates with thermally insulated bases is presented. The temperature dependence of thermophysical characteristics of the material of the plate is taken into account. Temperature setpoint is given on the ring plate contours. The temperature distribution in such a plate is axisymmetric. At first it is assumed that the radial coefficient of heat conductivity is given by a quadratic function. When the stationary equation of heat conductivity is integrated we obtain a cubic equation for temperature, which can be solved analytically or numerically.

Образец цитирования:

Королевич В. В., Медведев Д. Г. Стационарные температурные поля в анизотропных кольцевых пластинах переменной толщины с теплоизолированными основаниями // Вестн. БГУ. Сер. 1, Физика. Математика. Информатика. 2016. № 3. С. 160–165.

For citation:

Karalevich U. V., Medvedev D. G. Solution of the axisymmetric stationary problems of the heat conductivity for the polar-orthotropic ring plate of variable thickness with thermally insulated bases and with temperature dependent thermophysical characteristics. *Vestnik BGU. Ser. 1, Fiz. Mat. Inform.* 2016. No. 3. P. 160–165 (in Russ.).

Авторы:

Владимир Васильевич Королевич – преподаватель.
Дмитрий Георгиевич Медведев – кандидат физико-математических наук, доцент; декан механико-математического факультета.

Authors:

Uladzimir Karalevich, lecturer.
v.korolevich@mail.ru
Dmitrij Medvedev, PhD (physics and mathematics), docent; dean of the faculty of mechanics and mathematics.
medvedev@bsu.by

If the radial coefficient of the heat conductivity linearly depends on the temperature we obtain a quadratic equation for the temperature. Having selected one of the solutions of the quadratic equation, which has a physical meaning, we obtain the law of the temperature distribution in the profiled polar-orthotropic ring plate with thermally insulated bases. Temperature distribution laws are given in the ring anisotropic plates of constant thickness with a power profile, conical and exponential.

Key words: composite material; temperature; polar-orthotropic annular plate; stationary equation of heat conductivity; differential equation; cubic equation; quadratic equation; plate of a constant thickness; plate of a power profile; conical plate; plate of a exponential profile.

В современном энергетическом оборудовании, машиностроительных и авиакосмических конструкциях, аппаратах пищевой и химической промышленности широко применяются кольцевые пластины из композиционных материалов. Часто они могут находиться в неоднородных тепловых полях. В настоящей работе мы изучим распределение температуры в полярно-ортотропных кольцевых пластинах переменной толщины с теплоизолированными основаниями, учитывая зависимость теплофизических характеристик материала пластин от температуры.

Рассмотрим кольцевую пластину, толщина $h(r)$ которой изменяется вдоль радиуса r по заданному закону. Пластина обладает цилиндрической ортотропией, причем ось анизотропии совпадает с геометрической осью пластины.

Введем цилиндрическую систему координат r, θ, z, поместив начало в точке пересечения оси анизотропии со срединной плоскостью пластины.

Пусть на внутреннем контуре (при $r = r_0$) пластины поддерживается постоянная температура T_0^*, а на внешнем контуре (при $r = R$) – T_1^*. Основания кольцевой пластины при $z = \pm\dfrac{h(r)}{2}$ теплоизолированы. Внутренних источников тепла в пластине нет. Следовательно, тепловое поле в такой полярно-ортотропной пластине будет осесимметричным.

В общем случае радиальный λ_r и тангенциальный λ_θ коэффициенты теплопроводности зависят от температуры $T(r, \theta)$ анизотропного тела. Тогда уравнение стационарной теплопроводности для полярно-ортотропной пластины переменной толщины запишется в виде [1, 2]

$$\frac{\partial}{\partial r}\left(\lambda_r\left(T(r,\theta)\right)\frac{\partial T(r,\theta)}{\partial r}\right)+\left(\frac{h'(r)}{h(r)}+\frac{1}{r}\right)\left(\lambda_r\left(T(r,\theta)\right)\frac{\partial T(r,\theta)}{\partial r}\right)+$$

$$+\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\lambda_\theta\left(T(r,\theta)\right)\frac{\partial T(r,\theta)}{\partial\theta}\right)=0. \qquad (1)$$

Если тепловое поле осесимметричное, то температура T не будет зависеть от тангенциальной координаты θ и можно исключить последнее слагаемое в уравнении (1). В результате имеем следующее уравнение:

$$\frac{d}{dr}\left(\lambda_r\left(T(r)\right)\frac{dT(r)}{dr}\right)+\left(\frac{h'(r)}{h(r)}+\frac{1}{r}\right)\left(\lambda_r\left(T(r)\right)\frac{dT(r)}{dr}\right)=0.$$

Обозначив $Y(r)=\lambda_r(T)\dfrac{dT(r)}{dr}$, получим однородное дифференциальное уравнение 1-го порядка для неизвестной функции $Y(r)$

$$\frac{dY(r)}{dr}+\left(\frac{h'(r)}{h(r)}+\frac{1}{r}\right)Y(r)=0. \qquad (2)$$

Решение уравнения (3) есть

$$Y(r)=\frac{C_1}{rh(r)},$$

где C_1 – произвольная постоянная.

Возвращаясь к замене и разделяя переменные, получим следующее уравнение в дифференциалах:

$$\lambda_r(T)dT = \frac{C_1}{rh(r)}dr. \tag{3}$$

Предположим, что зависимость радиального коэффициента теплопроводности λ_r от температуры T следующая [3]:

$$\lambda_r(T) = \lambda_0^{(r)} + \lambda_1^{(r)}T + \lambda_2^{(r)}T^2, \tag{4}$$

где $\lambda_0^{(r)}$, $\lambda_1^{(r)}$, $\lambda_2^{(r)}$ – известные постоянные, определяемые экспериментально.

Подставляя разложение (4) в уравнение (3) и интегрируя его, получим

$$\left(\lambda_0^{(r)}T + \frac{1}{2}\lambda_1^{(r)}T^2 + \frac{1}{3}\lambda_2^{(r)}T^3\right) = C_1\int_{r_0}^{r}\frac{ds}{sh(s)} + C_2,$$

где C_2 – произвольная постоянная.

Используя граничные условия, определим постоянные C_1, C_2 из системы алгебраических уравнений:

$$\begin{cases} C_1\cdot 0 + C_2 = \left(\lambda_0^{(r)}T_0^* + \frac{1}{2}\lambda_1^{(r)}T_0^{*2} + \frac{1}{3}\lambda_2^{(r)}T_0^{*3}\right), \\ C_1\int_{r_0}^{R} + C_2 = \left(\lambda_0^{(r)}T_1^* + \frac{1}{2}\lambda_1^{(r)}T_1^{*2} + \frac{1}{3}\lambda_2^{(r)}T_1^{*3}\right). \end{cases} \tag{5}$$

Решение системы (5) есть

$$\begin{cases} C_2 = \left(\lambda_0^{(r)}T_0^* + \frac{1}{2}\lambda_1^{(r)}T_0^{*2} + \frac{1}{3}\lambda_2^{(r)}T_0^{*3}\right), \\ C_1 = \left[\lambda_0^{(r)}\left(T_1^* - T_0^*\right) + \frac{1}{2}\lambda_1^{(r)}\left(T_1^{*2} - T_0^{*2}\right) + \frac{1}{3}\lambda_2^{(r)}\left(T_1^{*3} - T_0^{*3}\right)\right]\left(\int_{r_0}^{R}\frac{ds}{sh(s)}\right)^{-1}. \end{cases}$$

Таким образом, имеем следующее кубическое уравнение для нахождения температуры $T(r)$ в полярно-ортотропной кольцевой пластине переменной толщины:

$$\frac{1}{3}\lambda_2^{(r)}T^3 + \frac{1}{2}\lambda_1^{(r)}T^2 + \lambda_0^{(r)}T - \left[\lambda_0^{(r)}\left(T_1^* - T_0^*\right) + \frac{1}{2}\lambda_1^{(r)}\left(T_1^{*2} - T_0^{*2}\right) + \frac{1}{3}\lambda_2^{(r)}\left(T_1^{*3} - T_0^{*3}\right)\right]F(r) -$$

$$- \left(\lambda_0^{(r)}T_0^* + \frac{1}{2}\lambda_1^{(r)}T_0^{*2} + \frac{1}{3}\lambda_2^{(r)}T_0^{*3}\right) = 0, \tag{6}$$

где $F(r) = \int_{r_0}^{r}\frac{ds}{sh(s)} / \int_{r_0}^{R}\frac{ds}{sh(s)}$.

Кубическое уравнение (6) можно решать аналитически или численными методами.

Упростим нашу задачу, предположив, что радиальный коэффициент теплопроводности λ_r линейно зависит от температуры $T\left(\lambda_2^{(r)} = 0\right)$. Получим квадратное уравнение вида

$$T^2 + 2\left(\frac{\lambda_0^{(r)}}{\lambda_1^{(r)}}\right)T - \left[2\left(\frac{\lambda_0^{(r)}}{\lambda_1^{(r)}}\right)\left(T_1^* - T_0^*\right) + \left(T_1^{*2} - T_0^{*2}\right)\right]F(r) - \left(2\left(\frac{\lambda_0^{(r)}}{\lambda_1^{(r)}}\right)T_0^* + T_0^{*2}\right) = 0.$$

Оно имеет 2 решения:

$$T_{1,2}(r) = \left(\frac{\lambda_0^{(r)}}{\lambda_1^{(r)}}\right)\left[-1 \pm \sqrt{\left[\left(\left(\frac{\lambda_1^{(r)}}{\lambda_0^{(r)}}\right)T_1^* + 1\right)^2 F(r) + \left(\left(\frac{\lambda_1^{(r)}}{\lambda_0^{(r)}}\right)T_0^* + 1\right)^2\left(1 - F(r)\right)\right]}\right].$$

Отрицательное решение надо отбросить, так как оно противоречит физическому смыслу поставленной задачи. При положительных значениях заданных температур на контурах и отсутствии теплообмена с внешней средой температура внутри пластины не может быть отрицательной.

Следовательно, решение задачи есть

$$T(r)=\left(\frac{\lambda_0^{(r)}}{\lambda_1^{(r)}}\right)\left[-1\pm\sqrt{\left[\left(\left(\frac{\lambda_1^{(r)}}{\lambda_0^{(r)}}\right)T_1^*+1\right)^2F(r)+\left(\left(\frac{\lambda_1^{(r)}}{\lambda_0^{(r)}}\right)T_0^*+1\right)^2\left(1-F(r)\right)\right]}\right].$$

Установим теперь законы распределения температуры в полярно-ортотропных кольцевых пластинах различных профилей.

А. Кольцевая пластина постоянной толщины h_0.

Вычислим функции $F(r)$ и $\left(1-F(r)\right)$:

$$F(r)=\int_{r_0}^{r}\frac{ds}{sh_0}\Big/\int_{r_0}^{R}\frac{ds}{sh_0}=\frac{\ln(r-r_0)}{\ln(R-r_0)};$$

$$\left(1-F(r)\right)=\left(1-\frac{\ln(r-r_0)}{\ln(R-r_0)}\right)=-\left(\ln\left(\frac{r-r_0}{R-r_0}\right)\Big/\ln(R-r_0)\right).$$

Распределение температуры в кольцевой пластине постоянной толщины есть

$$T^{(\text{А})}(r)=\left(\frac{\lambda_0^{(r)}}{\lambda_1^{(r)}}\right)\left[-1+\sqrt{\left[\left(\left(\frac{\lambda_1^{(r)}}{\lambda_0^{(r)}}\right)T_1^*+1\right)^2\frac{\ln(r-r_0)}{\ln(R-r_0)}-\left(\left(\frac{\lambda_1^{(r)}}{\lambda_0^{(r)}}\right)T_0^*+1\right)^2\left(\ln\left(\frac{r-r_0}{R-r_0}\right)\Big/\ln(R-r_0)\right)\right]}\right].$$

Б. Кольцевая пластина степенного профиля.

Профиль такой пластины задается выражением $h(r)=h_0\left(\frac{r_0}{r}\right)^{\alpha}$, $\alpha\in\mathbb{R}$, где h_0 – толщина пластины на внутреннем контуре (при $r=r_0$).

Вычислим функции $F(r)$ и $\left(1-F(r)\right)$:

$$F(r)=\int_{r_0}^{r}\frac{ds}{sh_0}\Big/\int_{r_0}^{R}\frac{ds}{sh_0}=\frac{r^{\alpha}-r_0^{\alpha}}{R^{\alpha}-r_0^{\alpha}};$$

$$\left(1-F(r)\right)=\left(1-\frac{r^{\alpha}-r_0^{\alpha}}{R^{\alpha}-r_0^{\alpha}}\right)=\frac{R^{\alpha}-r^{\alpha}}{R^{\alpha}-r_0^{\alpha}}.$$

Распределение температуры в кольцевой пластине степенного профиля есть

$$T^{(\text{Б})}(r)=\left(\frac{\lambda_0^{(r)}}{\lambda_1^{(r)}}\right)\left[-1+\sqrt{\left[\left(\left(\frac{\lambda_1^{(r)}}{\lambda_0^{(r)}}\right)T_1^*+1\right)^2\frac{r^{\alpha}-r_0^{\alpha}}{R^{\alpha}-r_0^{\alpha}}+\left(\left(\frac{\lambda_1^{(r)}}{\lambda_0^{(r)}}\right)T_0^*+1\right)^2\frac{R^{\alpha}-r^{\alpha}}{R^{\alpha}-r_0^{\alpha}}\right]}\right].$$

В. Кольцевая пластина конического профиля.

Профили конических кольцевых пластин или пластин прямолинейного профиля задаются формулой $h(r)=h_0^*\left(1-\frac{r}{R_1}\right)$, где h_0^* – толщина пластины в центре (при $r=0$); R_1 – радиус окружности пересечения образующих конуса ($R\le R_1$).

Вычислим функции $F(r)$ и $\left(1-F(r)\right)$:

$$F(r)=\int_{r_0}^{r}\frac{ds}{sh_0}\Big/\int_{r_0}^{R}\frac{ds}{sh_0}=\ln\left(\frac{r_0}{r}\frac{R_1-r}{R_1-r_0}\right)\Big/\ln\left(\frac{r_0}{R}\frac{R_1-R}{R_1-r_0}\right);$$

$$\left(1-F(r)\right)=\left[1-\ln\left(\frac{r_0}{r}\frac{R_1-r}{R_1-r_0}\right)\Big/\ln\left(\frac{r_0}{R}\frac{R_1-R}{R_1-r_0}\right)\right]=\ln\left(\frac{r}{R}\frac{R_1-R}{R_1-r}\right)\Big/\ln\left(\frac{r_0}{R}\frac{R_1-R}{R_1-r_0}\right).$$

Распределение температуры в кольцевой пластине конического профиля есть

$$T^{(\text{В})}(r)=\left(\frac{\lambda_0^{(r)}}{\lambda_1^{(r)}}\right)\left[-1+\left[\left(\left(\frac{\lambda_1^{(r)}}{\lambda_0^{(r)}}\right)T_1^*+1\right)^2\ln\left(\frac{r_0}{r}\frac{R_1-r}{R_1-r_0}\right)\Big/\ln\left(\frac{r_0}{R}\frac{R_1-R}{R_1-r_0}\right)+\right.\right.$$

$$\left.\left.+\left(\left(\frac{\lambda_1^{(r)}}{\lambda_0^{(r)}}\right)T_0^*+1\right)^2\ln\left(\frac{r}{R}\frac{R_1-R}{R_1-r}\right)\Big/\left(\frac{r_0}{R}\frac{R_1-R}{R_1-r_0}\right)\right]^{1/2}\right].$$

Г. Кольцевая пластина экспоненциального профиля.

Профиль экспоненциальных кольцевых пластин задается выражением $h(r)=h_0^*e^{\beta(r/R)}$, $\beta\in\mathbb{R}$, h_0^* – толщина пластины в центре (при $r=0$).

Вычислим функции $F(r)$ и $\left(1-F(r)\right)$:

$$F(r)=\int_{r_0}^{r}\frac{ds}{sh_0}\Big/\int_{r_0}^{R}\frac{ds}{sh_0}=\left[\frac{Ei\left(-\beta\left(\frac{r}{R}\right)\right)-Ei\left(-\beta\left(\frac{r_0}{R}\right)\right)}{Ei(-\beta)-Ei\left(-\beta\left(\frac{r_0}{R}\right)\right)}\right];$$

$$\left(1-F(r)\right)=\left(1-\left[\frac{Ei\left(-\beta\left(\frac{r}{R}\right)\right)-Ei\left(-\beta\left(\frac{r_0}{R}\right)\right)}{Ei(-\beta)-Ei\left(-\beta\left(\frac{r_0}{R}\right)\right)}\right]\right)=\left[\frac{Ei(-\beta)-Ei\left(-\beta\left(\frac{r}{R}\right)\right)}{Ei(-\beta)-Ei\left(-\beta\left(\frac{r_0}{R}\right)\right)}\right],$$

где $-Ei\left(-\beta\left(\frac{r}{R}\right)\right)=\int_{r}^{\infty}\frac{e^{-\beta(t/R)}}{t}dt$ – интегральная показательная функция [4].

Распределение температуры в кольцевой пластине экспоненциального профиля следующее:

$$T^{(\Gamma)}(r)=\left(\frac{\lambda_0^{(r)}}{\lambda_1^{(r)}}\right)\left\{-1+\left[\left(\left(\frac{\lambda_1^{(r)}}{\lambda_0^{(r)}}\right)T_1^*+1\right)^2\left[\frac{Ei\left(-\beta\left(\frac{r}{R}\right)\right)-Ei\left(-\beta\left(\frac{r_0}{R}\right)\right)}{Ei(-\beta)-Ei\left(-\beta\left(\frac{r_0}{R}\right)\right)}\right]+\right.\right.$$

$$\left.\left.+\left(\left(\frac{\lambda_1^{(r)}}{\lambda_0^{(r)}}\right)T_0^*+1\right)^2\left[\frac{Ei(-\beta)-Ei\left(-\beta\left(\frac{r}{R}\right)\right)}{Ei(-\beta)-Ei\left(-\beta\left(\frac{r_0}{R}\right)\right)}\right]\right]^{1/2}\right\}.$$

Как видно из приведенных формул, законы распределения температур в профилированных полярно-ортотропных кольцевых пластинах с учетом зависимости теплофизических характеристик материала пластины от температуры имеют весьма сложную форму.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК (*REFERENCES*)

1. *Уздалев А. И.* Некоторые задачи термоупругости анизотропного тела. Саратов, 1967.

2. *Уздалев А. И., Брюханова Е. Н.* Уравнение теплопроводности для пластины переменной толщины с неоднородными теплофизическими свойствами // Задачи прикладной теории упругости : межвуз. науч. сб. Саратов, 1985. С. 3–7 [Uzdalev A. I., Bryukhanova E. N. The thermal conductivity equation for a plate of variable thickness with non-uniform thermophysical properties. *Zadachi prikl. teor. uprug.* : mezhvuzovskii nauchn. sb. Saratov, 1985. P. 3–7 (in Russ.)].

3. *Уздалев А. И., Брюханова Е. Н.* Тепловое состояние двухсвязной пластины с теплофизическими характеристиками, зависящими от температуры // Прикладная теория упругости : межвуз. науч. сб. Саратов, 1983. С. 8–11 [Uzdalev A. I., Bryukhanova E. N. The thermal state of the doubly connected plates with the depending on the temperature thermophysical characteristics. *Prikl. teor. uprug.* : mezhvuzovskii nauchn. sb. Saratov, 1983. P. 8–11 (in Russ.)].

4. *Прудников А. П., Брычков Ю. А., Маричев О. И.* Интегралы и ряды. М., 1981.

Статья поступила в редколлегию 18.05.2016.
Received by editorial board 18.05.2016.