

СВОБОДНЫЕ ОСЕСИММЕТРИЧНЫЕ КОЛЕБАНИЯ ЧИСТОГО ИЗГИБА КОМПОЗИЦИОННОЙ СТРУКТУРНО-НЕОДНОРОДНОЙ КРУГЛОЙ ПЛАСТИНЫ ПОСТОЯННОЙ ТОЛЩИНЫ

A. С. КРАВЧУК¹⁾, Г. И. МИХАСЕВ¹⁾, И. А. ТАРАСЮК¹⁾

¹⁾Белорусский государственный университет, пр. Независимости, 4, 220030, г. Минск, Республика Беларусь

Получено новое дифференциальное уравнение изгибных осесимметричных колебаний круглой пластины из однородного линейно-упругого и вязкоупругого однородно стареющего материалов, решением которого является функция Вебера – Эрмита. В итоговом уравнении колебаний круглой пластины снижен порядок частных производных по координате до второго в отличие от четвертого порядка в работах В. Л. Бидермана. Определены собственные частоты изгибных осесимметричных колебаний круглой пластины в зависимости от модуля упругости для однородного линейно-упругого материала, а также в зависимости от мгновенного модуля упругости и ядра ползучести для наследственного уравнения вязкоупругости однородно стареющего материала. Уравнение изгибных осесимметричных колебаний круглой пластины и определение ее собственных частот обобщены на случай композиционных структурно-неоднородных упругого и вязкоупругого однородно стареющего материалов пластины.

Ключевые слова: композиционный материал; эффективные деформационные характеристики; гипотеза Фойгта; гипотеза Рейсса; приближение Хилла; вязкоупругий однородно стареющий материал.

FREE AXISYMMETRIC OSCILLATIONS OF PURE BENDING OF COMPOSITE STRUCTURAL HETEROGENEOUS CIRCULAR PLATE OF CONSTANT THICKNESS

A. S. KRAVCHUK^a, G. I. MIKHASEV^a, I. A. TARASYUK^a

^aBelarusian State University, Nezavisimosti avenue, 4, 220030, Minsk, Republic of Belarus

New differential equation of bending axisymmetric oscillations of homogeneous linearly elastic and viscoelastic homogeneously aging circular plate was obtained. The solution of this equation is the Weber – Hermite function. Partial derivatives order in the differential equation of circular plate oscillations was reduced to the second order in contrast to the fourth one in V. L. Biderman works. Natural frequencies of bending axisymmetric oscillations of circular plate were determined depending on elastic modulus

Образец цитирования:

Кравчук А. С., Михасев Г. И., Тарасюк И. А. Свободные осесимметричные колебания чистого изгиба композиционной структурно-неоднородной круглой пластины постоянной толщины // Вестн. БГУ. Сер. 1, Физика. Математика. Информатика. 2016. № 3. С. 154–159.

For citation:

Kravchuk A. S., Mikhasev G. I., Tarasyuk I. A. Free axisymmetric oscillations of pure bending of composite structural heterogeneous circular plate of constant thickness. *Vestnik BGU. Ser. 1, Fiz. Mat. Inform.* 2016. No. 3. P. 154–159 (in Russ.).

Авторы:

Александр Степанович Кравчук – доктор физико-математических наук, доцент; профессор кафедры био- и наномеханики механико-математического факультета.
Геннадий Иванович Михасев – доктор физико-математических наук, профессор; заведующий кафедрой био- и наномеханики механико-математического факультета.
Иван Александрович Тарасюк – аспирант кафедры био- и наномеханики механико-математического факультета. Научный руководитель – А. С. Кравчук.

Authors:

Alexander Kravchuk, doctor of science (physics and mathematics), docent; professor at the department of bio- and nanomechanics, faculty of mechanics and mathematics.
ask_belarus@inbox.ru

Gennadi Mikhasev, doctor of science (physics and mathematics), full professor; head of the department of bio- and nanomechanics, faculty of mechanics and mathematics.
mikhasev@bsu.by

Ivan Tarasyuk, postgraduate student at the department of bio- and nanomechanics, faculty of mechanics and mathematics.
jege.the.owl@gmail.com

in the case of homogeneous linearly elastic plate material and depending on instantaneous elastic modulus and creep kernel in the case of viscoelastic homogeneously aging plate material. The differential equation of bending axisymmetric oscillations of circular plate and determination of plate natural frequencies were generalized to the case of composite structurally heterogeneous elastic and viscoelastic homogeneously aging plate materials.

Key words: composite material; effective deformation characteristics; Voigt hypothesis; Reuss hypothesis; Hill approximation; viscoelastic homogeneously aging material.

Результатом классического вывода изгибных колебаний пластины постоянной толщины является бигармоническое уравнение [1, с. 16; 2, с. 277]. Столь высокий порядок дифференциального оператора обусловлен тем, что при выводе, кроме нормальных деформаций, используются еще и деформации сдвига [3, с. 280–282]. Однако это противоречит исходным предположениям, которые полностью соответствуют гипотезам технической теории чистого изгиба балок [4, с. 174; 5, с. 255].

В частности, в списке гипотез значится следующий постулат Бернулли: «Вертикальные линии, проведенные перпендикулярно плоскости пластины, при деформации только наклоняются, но не искривляются» [4, с. 175], т. е. предполагается, что сдвигов нет.

Более того, изгиб пластины должен происходить при действии только моментов на ее краях, а не под действием фактически перерезывающей нагрузки, которой по-другому постулату деформации тонких пластин [4, с. 174–175] просто не должно быть, так как волокна пластины друг с другом не взаимодействуют в поперечном направлении.

Осесимметричные колебания однородной круглой пластины

При выводе уравнения колебаний пластины будем придерживаться известного набора гипотез [4, с. 174], полностью соответствующих гипотезам теории чистого изгиба балок, однако сам вывод этого уравнения и его конечный вид не имеют аналогов в литературе.

Предполагается, что круглая пластина радиусом R имеет постоянную толщину h . Пусть центр пластины совпадает с началом декартовой системы координат. Изучим сектор пластины угловой мерой $d\theta$. Это даст возможность при выборе закрепления в начале координат рассматривать изгиб балки переменной ширины, но постоянной толщины.

Будем использовать приближенное дифференциальное уравнение изогнутой оси балки в виде сектора с учетом выбора осей координат

$$\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} = \frac{M_r}{E J_r(r)}, \quad (1)$$

где u – вертикальное перемещение сектора круглой пластины под действием момента; E – модуль упругости материала; угол $d\theta$ настолько мал, что поперечное сечение балки можно считать плоским, тогда

$J_r(r) \approx \frac{rd\theta h^3}{12}$ – переменный момент инерции прямоугольного сечения балки в виде сектора.

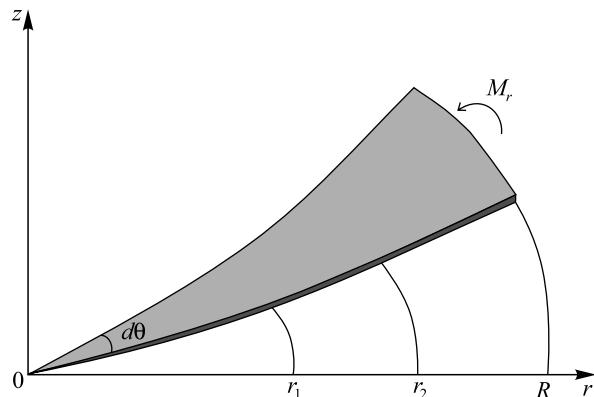


Рис. 1. Нагружение моментом балки в виде сектора

Рассмотрим фрагмент балки между точками r_1 и r_2 (рис. 1). На основании (1) приращение момента ΔM_r на данном участке будет иметь вид

$$\begin{aligned} \Delta M_r &= E \frac{r_2 d\theta h^3}{12} \left. \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} \right|_{r=r_2} - E \frac{r_1 d\theta h^3}{12} \left. \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} \right|_{r=r_1} = \\ &= \frac{Eh^3 d\theta}{12} \int_{r_1}^{r_2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} \right) dr. \end{aligned} \quad (2)$$

Приращение момента инерционных сил определяется следующим образом:

$$\rho h \frac{r_2^2 d\theta}{2} \left. \left(r \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} \right) \right|_{r=r_2} - \rho h \frac{r_1^2 d\theta}{2} \left. \left(r \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} \right) \right|_{r=r_1} = \frac{\rho h d\theta}{2} \int_{r_1}^{r_2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^3 \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} \right) dr. \quad (3)$$

Приравнивая (2) и (3) и интегрируя результат по θ на интервале $[0, 2\pi]$, получаем уравнение изгибных колебаний однородной балки прямоугольного переменного сечения

$$\int_{r_1}^{r_2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^3 \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{Eh^2}{6\rho} r \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} \right) dr = 0. \quad (4)$$

Поменяв порядок интегрирования и дифференцирования, проинтегрируем (4):

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{Eh^2}{6\rho} \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{C}{r_2 - r_1} \frac{1}{r^3},$$

где C – некоторая константа. Учитывая произвольность выбора r_1 и r_2 , получаем, что $C = 0$:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{a^2}{r^2} \frac{\partial^2 u}{\partial r^2}, \quad (5)$$

где $a = \sqrt{\frac{Eh^2}{6\rho}}$.

Уравнение (5) фактически получено в предположении, что центр круглой пластины закреплен. Исходя из решения (5), можно получить перемещения круглой пластины u^* с закрепленным краем, произведя замену $u^*(r, t) = u(r, t) - u(R, t)$.

Решение уравнения (5) находится с помощью метода Фурье с учетом того, что перемещения должны быть действительными и конечными. При краевом условии гладкости собственных форм центра

круглой пластины $\frac{\partial u}{\partial r} \Big|_{r=0} = 0$ и начальном условии $\frac{\partial u}{\partial t} \Big|_{t=0} = 0$ решение уравнения (5) будет иметь вид

$$u = \sum_{j=1}^{\infty} C_j \left(D_{-1/2} \left[(i+1)r\sqrt{\lambda_j} \right] + D_{-1/2} \left[-(i+1)r\sqrt{\lambda_j} \right] \right) \cos(a\lambda_j t), \quad (6)$$

где $D_{-1/2}[z]$ – функция параболического цилиндра (функция Вебера – Эрмита) [6, с. 123]; $i = \sqrt{-1}$, C_j – произвольные вещественные константы.

Для удовлетворения второго краевого условия на границе пластины $u \Big|_{r=R} = 0$ достаточно, чтобы было выполнено уравнение

$$D_{-1/2} \left[(i+1)R\sqrt{\lambda_j} \right] + D_{-1/2} \left[-(i+1)R\sqrt{\lambda_j} \right] = 0. \quad (7)$$

Отметим, что (7) имеет бесконечное число корней μ_j . Отсюда следует, что для удовлетворения условия неподвижности края изгибаемой круглой пластины достаточно положить $\lambda_j = \frac{\mu_j^2}{R^2}$. С помощью непосредственных вычислений можно определить серию значений μ_j : $\mu_1 \approx 2,003\ 15$; $\mu_2 \approx 3,200\ 96$; $\mu_3 \approx 4,063\ 98$.

Таким образом, исходя из (6), собственные частоты свободных изгибных колебаний круглой пластины определяются выражением

$$\omega_j = a\lambda_j = \frac{\mu_j^2}{R^2} \sqrt{\frac{Eh^2}{6\rho}}. \quad (8)$$

Вязкоупругие осесимметричные колебания однородной круглой пластины

При ползучести предполагается, что деформации происходят так медленно, что задача рассматривается как квазистатическая, т. е. массоинерционные характеристики элемента пластины не оказывают влияния на характер ее деформирования. Исследуем установившуюся ползучесть материала сектора. В соответствии с наследственной теорией ползучести для сектора из одного однородного стареющего материала, подверженного чистому изгибу, рассмотрим уравнение состояния [7, с. 72]:

$$\varepsilon(t) = \frac{1}{E(t)} \left[\sigma(t) + \int_0^t \sigma(\tau) \Gamma(t, \tau) d\tau \right],$$

где $E(t)$ – мгновенный модуль упругости; $\Gamma(t, \tau)$ – ядро ползучести.

В случае квазистатической ползучести при постоянном изгибающем моменте приближенное дифференциальное уравнение перемещений сектора имеет вид [5, с. 273]

$$\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} = \frac{1}{\rho(t)} = \frac{M_r}{J(r)E(t)} \left[1 + \int_0^t \Gamma(t, \tau) d\tau \right].$$

Не повторяя дословно вывод выражения (5), получаем уравнение, учитывающее ползучесть пластины при изгибных колебаниях:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{a(t)^2}{r^2} \frac{\partial^2 u}{\partial r^2}, \quad (9)$$

$$\text{где } a(t) = \sqrt{\frac{E(t)h^2}{6\rho \left[1 + \int_0^t \Gamma(t, \tau) d\tau \right]}}.$$

Собственные частоты изгибных колебаний определяются выражением

$$\omega_j(t) = \frac{\mu_j^2}{R^2} \sqrt{\frac{E(t)h^2}{6\rho \left[1 + \int_0^t \Gamma(t, \tau) d\tau \right]}}. \quad (10)$$

На рис. 2 представлена зависимость собственных частот колебаний (10) круглой пластины от времени при $R = 1$ м, $h = 0,01$ м, $E(t) = 0,7 \cdot 10^{11}$ Па, $\rho = 8330$ кг/м³, $\Gamma(t, \tau) = 0,3 \cdot e^{-10^{-11}(t-\tau)}$.

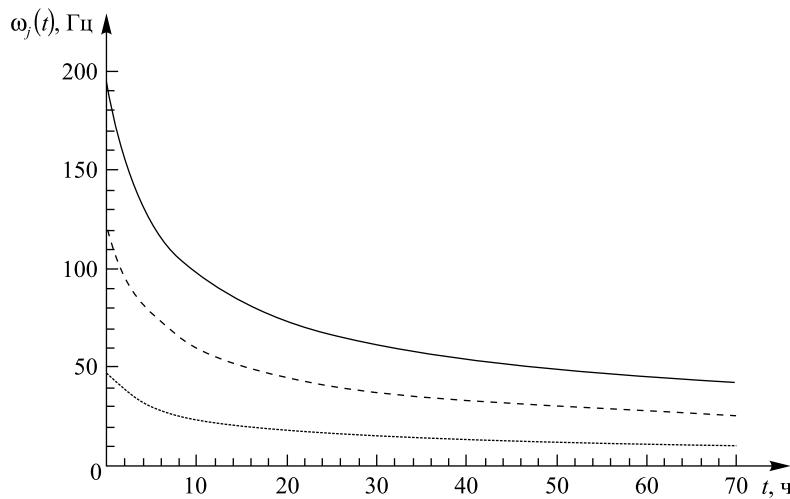


Рис. 2. Зависимость собственных частот колебаний круглой пластины от времени t : $\omega_1(t)$; - - - $\omega_2(t)$; — $\omega_3(t)$

Осьсимметричные колебания композиционной круглой пластины

Методика решения задач чистого изгиба композиционных балок изложена в работах [8, 9]. Все допущения относительно линейных размеров ΔR макроточек композиционных материалов ($\Delta R < r_2 - r_1$), а также применения гипотез Фойгта и Рейсса в данном случае тоже верны. Из условия наличия

неоднородностей в материале пластины в соответствии с характером вывода уравнения (5) можно утверждать, что количеством N достоверно вычисленных частот является значение, удовлетворяющее неравенству $\frac{R}{N} \gg \Delta R$, т. е. длина волны $\frac{R}{N}$ должна быть больше размера неоднородности минимум в 10 раз.

Фактически в уравнении (5) в соответствии с результатами работы [9] при вычислении коэффициента a модуль упругости однородного материала необходимо заменить эффективным значением Хилла для структурно-неоднородного композиционного материала, состоящего из n компонент, а плотность однородного материала – ее средним значением в соответствии с объемными долями γ_k указанных компонент

$$a = \sqrt{\frac{\langle E \rangle_X h^2}{6 \langle \rho \rangle}}, \quad (11)$$

где $\langle E \rangle_X = \frac{1}{2} \left(\left(\sum_{k=1}^n \frac{\gamma_k}{E_k} \right)^{-1} + \sum_{k=1}^n \gamma_k E_k \right)$; $\langle \rho \rangle = \sum_{k=1}^n \gamma_k \rho_k$; E_k – модуль упругости k -й компоненты; ρ_k – плотность k -й компоненты.

Собственные частоты структурно-неоднородной круглой пластины будут определяться уравнением, аналогичным (8):

$$\omega_j = \frac{\mu_j^2}{R^2} \sqrt{\frac{\langle E \rangle_X h^2}{6 \langle \rho \rangle}}. \quad (12)$$

На рис. 3 представлена зависимость собственных частот колебаний (12) круглой пластины от концентрации γ первого материала в двухкомпонентной смеси при $R = 1$ м, $h = 0,01$ м, $E_1 = 2 \cdot 10^{11}$ Па, $E_2 = 0,7 \cdot 10^{11}$ Па, $\rho_1 = 7850$ кг/м³, $\rho_2 = 8330$ кг/м³.

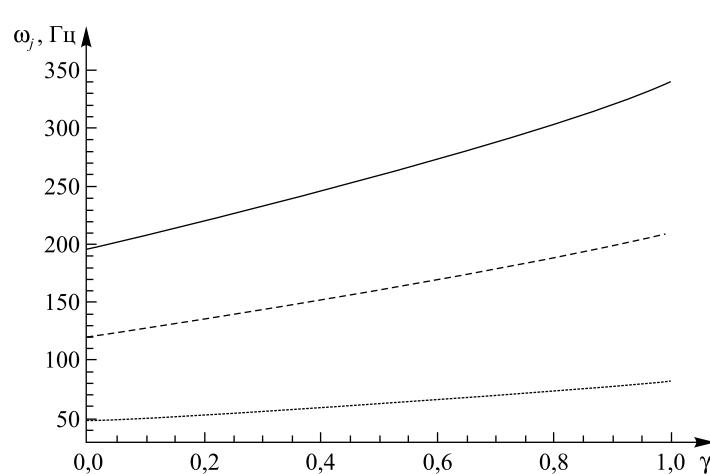


Рис. 3. Зависимость собственных частот колебаний круглой пластины от концентрации γ : ω_1 ; - - - ω_2 ; — ω_3

Вязкоупругие осесимметричные колебания композиционной круглой пластины

В соответствии с работой [8] аналогично вносим изменения в (9) и (11):

$$a(t) = \sqrt{\frac{\langle E(t) \rangle_X h^2}{6 \langle \rho \rangle \left[1 + \int_0^t \langle \Gamma(t, \tau) \rangle_X d\tau \right]}},$$

где $\langle \Gamma(t) \rangle_X = \frac{1}{2} \left(\left(\sum_{k=1}^n \frac{\gamma_k}{E_k(t)} \right)^{-1} \left(\sum_{k=1}^N \frac{\gamma_k \Gamma_k(t, \tau)}{E_k(t)} \right) + \sum_{k=1}^N \gamma_k^2 \Gamma_k(t, \tau) \right)$; $\langle E(t) \rangle_X = \frac{1}{2} \left(\left(\sum_{k=1}^n \frac{\gamma_k}{E_k(t)} \right)^{-1} + \sum_{k=1}^n \gamma_k E_k(t) \right)$.

Аналогично (12) собственные частоты изгибных колебаний определяются выражением

$$\omega_j = \frac{\mu_j^2}{R^2} \sqrt{\frac{\langle E(t) \rangle_X h^2}{6\langle \rho \rangle \left[1 + \int_0^t \langle \Gamma(t, \tau) \rangle_X d\tau \right]}}.$$

Таким образом, получено новое дифференциальное уравнение изгибных осесимметричных колебаний круглой пластины из однородного линейно-упругого и вязкоупругого однородно стареющего материалов, решением которого является функция Вебера. В итоговом уравнении колебаний круглой пластины снижен порядок частных производных по координате до второго в отличие от четвертого порядка в работах В. Л. Бидермана.

Получены собственные частоты изгибных осесимметричных колебаний круглой пластины в зависимости от модуля упругости для однородного линейно-упругого материала, от мгновенного модуля упругости и ядра ползучести для наследственного уравнения вязкоупругости однородно стареющего материала.

Уравнение изгибных осесимметричных колебаний круглой пластины и определение ее собственных частот обобщены на случай композиционных структурно-неоднородных упругого и вязкоупругого однородно стареющего материалов пластины.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК (REFERENCES)

1. Пономарев С. Д., Бидерман В. Л., Лихарев К. К., Макушин В. М., Малинин Н. Н., Федосьев В. И. Расчеты на прочность в машиностроении : в 3 т. М., 1958. Т. 2 : Некоторые задачи прикладной теории упругости. Расчеты за пределами упругости. Расчеты на ползучесть.
2. Бидерман В. Л. Теория механических колебаний. М., 1980.
3. Доннелл Л. Г. Балки, пластины и оболочки. М., 1982.
4. Жемочкин Б. Н. Теория упругости. М., 1957.
5. Филин А. П. Прикладная механика твердого деформируемого тела : в 2 т. М., 1978. Т. 2 : Сопротивление материалов с элементами теории сплошных сред и строительной механики.
6. Бейтмен Г., Эрдейи А. Высшие трансцендентные функции : в 3 т. М., 1966. Т. 2 : Функции Бесселя, функции параболического цилиндра, ортогональные многочлены.
7. Ржаницын А. Р. Теория ползучести. М., 1968.
8. Кравчук А. С., Томило Е. В. Вязкоупругий чистый изгиб слоистых и композиционных призматических брусьев // Механика машин, механизмов и материалов. 2014. № 3 (28). С. 48–52 [Kravchuk A. S., Tomilo Y. V. Viscoelastic pure bending of laminated and composite prismatic beams. *Mekhanika mashin mehanizmov i materialov*. 2014. No. 3 (28). P. 48–52 (in Russ.)].
9. Кравчук А. С., Томило Е. В. Чистый изгиб слоистых и композиционных призматических брусьев из линейно-упругих материалов // Изв. НАН Беларуси. Сер. физ.-техн. наук. 2014. № 3. С. 15–20 [Kravchuk A. S., Tomilo Y. V. Pure bending of layered composite prismatic beams from linear elastic materials. *Izv. NAN Belarusi. Ser. fiziko-tekh. nauk = Proc. Natl. Acad. Nauk Belarus. Phys.-tech. ser.* 2014. No. 3. P. 15–20 (in Russ.)].

Статья поступила в редакцию 02.05.2016.
Received by editorial board 02.05.2016.