УДК 517.9

АСИМПТОТИЧЕСКИЕ СВОЙСТВА ЛИНЕЙНЫХ, СТОХАСТИЧЕСКИХ И ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНО-АЛГЕБРАИЧЕСКИХ СИСТЕМ

А. А. ЛЕВАКОВ[1]***, С. А. МАЗАНИК***[1]***, Г. П. РАЗМЫСЛОВИЧ***[1]

[1]*Белорусский государственный университет, пр. Независимости, 4, 220030, г. Минск, Республика Беларусь*

Представлен обзор результатов по теории линейных, стохастических и дифференциально-алгебраических систем, полученных сотрудниками кафедры высшей математики Белорусского государственного университета в 2011–2015 гг. Описаны свойства множеств и предельных множеств неприводимости как функций параметров, характеризующих ограниченность коэффициентов и степень малости возмущений линейных дифференциальных систем. Приведены теоремы существования решений стохастического эволюционного функционального уравнения, стохастического волнового уравнения и стохастических дифференциальных уравнений со стандартным и дробным броуновскими движениями. Для линейных дифференциально-алгебраических систем даны критерий спектральной приводимости и условия регуляризируемости систем с запаздыванием, а также общих линейных стационарных систем управления, допускающих операторную запись, критерии H-управляемости и полной H-управляемости систем со многими запаздываниями и распределенным запаздыванием по управлению.

Ключевые слова: линейные дифференциальные системы; преобразования Ляпунова; стохастические дифференциальные уравнения; слабые решения; дифференциально-алгебраические системы; управляемость; управление спектром.

ASYMPTOTIC PROPERTIES OF LINEAR, STOCHASTIC AND DIFFERENTIAL-ALGEBRAIC SYSTEMS

A. A. LEVAKOV[a]***, S. A. MAZANIK***[a]***, G. P. RAZMYSLOVICH***[a]

[a]*Belarusian State University, Nezavisimosti avenue, 4, 220030, Minsk, Republic of Belarus*

The paper contains a survey of the results on the theory of linear, stochastic and differential-algebraic systems obtained by the members of the department of higher mathematics of the Belarusian State University in 2011–2015 years. Properties of irreducibility sets and limit irreducibility sets of linear differential systems treated as functions of parameters which characterize the boundedness of coefficients and infinitesimality of perturbations are described. Existence theorems of solutions of a stochastic evolution functional equation, a stochastic wave equation and stochastic differential equations with standard and fractional Brownian motions are presented. Necessary and sufficient conditions of the spectral reducibility, conditions of the regularizability of differential-algebraic systems with delay in state and general linear systems that can be written in an operator form are presented. Criteria of H-controllability and complete H-controllability of the systems with numerous delays and distributed delay on control are given.

Key words: linear differential systems; Liapunov transformations; stochastic differential equations; weak solutions; differential-algebraic systems; controllability; feedback control.

Образец цитирования:

Леваков А. А., Мазаник С. А., Размыслович Г. П. Асимптотические свойства линейных, стохастических и дифференциально-алгебраических систем // Вестн. БГУ. Сер. 1, Физика. Математика. Информатика. 2016. № 3. С. 125–142.

For citation:

Levakov A. A., Mazanik S. A., Razmyslovich G. P. Asymptotic properties of linear, stochastic and differential-algebraic systems. *Vestnik BGU. Ser. 1, Fiz. Mat. Inform.* 2016. No. 3. P. 125–142 (in Russ.).

Авторы:

Анатолий Афанасьевич Леваков – доктор физико-математических наук, профессор; профессор кафедры высшей математики факультета прикладной математики и информатики.

Сергей Алексеевич Мазаник – доктор физико-математических наук, профессор; заведующий кафедрой высшей математики факультета прикладной математики и информатики.

Георгий Прокофьевич Размыслович – кандидат физико-математических наук, доцент; доцент кафедры высшей математики факультета прикладной математики и информатики.

Authors:

Anatoli Levakov, doctor of science (physics and mathematics), full professor; professor at the department of higher mathematics, faculty of applied mathematics and computer science.
levakov@tut.by

Sergei Mazanik, doctor of science (physics and mathematics), full professor; head of the department of higher mathematics, faculty of applied mathematics and computer science.

Georgii Razmyslovich, PhD (physics and mathematics), docent; associate professor at the department of higher mathematics, faculty of applied mathematics and computer science.

Научные исследования, проводимые на кафедре высшей математики БГУ, в основном связаны с задачами асимптотической теории линейных дифференциальных систем, стохастических дифференциальных уравнений и включений, дифференциально-алгебраических систем. Работы по этим направлениям были начаты в Беларуси в конце 1950-х гг., их возглавляли академик АН БССР Н. П. Еругин и профессор Ю. С. Богданов (заведовал кафедрой с 1971 по 1982 г.). В настоящее время исследования продолжаются под руководством академика НАН Беларуси Н. В. Гайшуна и академика НАН Беларуси Н. А. Изобова (заведовал кафедрой с 1995 по 1999 г.). В данной статье представлен краткий обзор основных результатов, полученных сотрудниками кафедры за последнее пятилетие (итоги исследований за предыдущие годы содержатся в [1, 2]).

Множества неприводимости линейных дифференциальных систем

Рассмотрим исходные линейные дифференциальные системы

$$\dot{x} = A(t)x,\ x \in \boldsymbol{R}^n,\ \|A(t)\| \le a < +\infty,\ t \in I = [0, +\infty), \tag{1}$$

с кусочно-непрерывными ограниченными на I коэффициентами. Наряду с системами (1) исследуем возмущенные системы

$$\dot{y} = \big(A(t) + Q(t)\big)y,\ y \in \boldsymbol{R}^n,\ t \in I, \tag{2}$$

также с кусочно-непрерывными на полуоси I коэффициентами и с возмущениями, удовлетворяющими либо условию

$$\|Q(t)\| \le C_Q e^{-\sigma t},\ \sigma > 0,\ t \in I, \tag{3}$$

либо более общему условию

$$\lambda[Q] \equiv \overline{\lim_{t \to +\infty}}\, t^{-1} \ln\|Q(t)\| \le -\sigma < 0. \tag{4}$$

Эти возмущения для $\sigma = 0$ как в случае (3), так и в случае (4) дополнительно считаем исчезающими на бесконечности: $Q(t) \to 0$ при $t \to +\infty$.

Отметим, что система (1) приводима по Ляпунову к системе (2) (асимптотически эквивалентна), если существует линейное преобразование $x = L(t)y$ с абсолютно непрерывной невырожденной на I матрицей Ляпунова L, $\sup\limits_{t \in I}\left(\|L(t)\| + \|L^{-1}(t)\| + \left\|\dfrac{dL(t)}{dt}\right\|\right) < +\infty$, переводящее систему (1) в систему (2).

Определение 1. Множества $N_r(a, \sigma)$ и $N_\rho(a, \sigma)$ всех тех систем (1) с матрицами коэффициентов A, для каждой из которых существует неприводимая к ней система (2) с матрицей Q, удовлетворяющей, соответственно, либо условию (3), либо более общему условию (4), называются множествами неприводимости.

Данные множества связаны [3] очевидным включением $N_r(a, \sigma) \subset N_\rho(a, \sigma)$ при $\sigma \in (0, 2a]$, и из результатов работы [4] следует, что эти множества являются непустыми при $\sigma \in (0, 2a]$ и пустыми при $\sigma > 2a$.

Множества $N_{r,\rho}(\sigma) \equiv \lim\limits_{a \to +\infty} N_{r,\rho}(a, \sigma)$ будем называть [5] предельными множествами неприводимости.

Каждой системе (1) поставим в соответствие множество $R_r(A)$ (множество $R_\rho(A)$) всех тех значений параметра $\sigma > 0$, для которых возмущенная система (2) с любым возмущением Q, удовлетворяющим условию (3) (условию (4)), приводима к исходной системе (1). Множества $R_{r,\rho}(\cdot)$ инвариантны относительно преобразований Ляпунова, т. е. $R_{r,\rho}(A) = R_{r,\rho}(B)$ для любых двух линейных систем (1) с матрицами коэффициентов A и B, приводимых друг к другу некоторым преобразованием Ляпунова.

Непосредственно из определения множеств неприводимости и множеств $R_r(A)$, $R_\rho(A)$ следует, что критерием принадлежности системы (1) множеству неприводимости $N_r(a, \sigma)$, $N_\rho(a, \sigma)$, $a \ge 0, \sigma \ge 0$, является выполнение условий $\sup\limits_{t \ge 0}\|A(t)\| \le a$ и $\sigma \notin R_r(A)$, $\sigma \notin R_\rho(A)$.

Свойства множеств и предельных множеств неприводимости как функций параметров a и σ исследованы в работах [5–10]. В частности, доказаны следующие утверждения.

Теорема 1. *Для множеств неприводимости* $N_r(a, \sigma)$, $N_\rho(a, \sigma)$ *и предельных множеств неприводимости* $N_r(\sigma)$, $N_\rho(\sigma)$ *выполнены строгие включения*

$$N_{r,\rho}(a_1, \sigma) \subset N_{r,\rho}(a_2, \sigma)\ \forall\ 0 \le a_1 < a_2,\ \forall\ \sigma \in [0,\ 2a_2],$$

$$N_{r,\rho}(a, \sigma_2) \subset N_{r,\rho}(a, \sigma_1)\ \forall\ 0 < \sigma_1 < \sigma_2 \le 2a,\ \ N_{r,\rho}(\sigma_2) \subset N_{r,\rho}(\sigma_1)\ \forall\ 0 \le \sigma_1 < \sigma_2.$$

Как функции параметра σ множества неприводимости $N_r(a, \sigma)$ и предельные множества неприводимости $N_r(\sigma)$ разрывны и слева и справа, в то время как множества $N_\rho(a, \sigma)$ и $N_\rho(\sigma)$ разрывны справа и непрерывны слева, что устанавливают следующие теоремы.

Теорема 2. *Для множеств неприводимости* $N_r(a, \sigma)$, $N_\rho(a, \sigma)$ *для любых* $a > 0$ *и* $\sigma_0 \in (0,\ 2a]$ *выполнены соотношения*

$$\lim_{\sigma \to \sigma_0 + 0} N_{r,\rho}(a, \sigma) \subset N_{r,\rho}(a, \sigma_0),\ \ \lim_{\sigma \to \sigma_0 - 0} N_r(a, \sigma) \supset N_r(a, \sigma_0),\ \ \lim_{\sigma \to \sigma_0 - 0} N_\rho(a, \sigma) = N_\rho(a, \sigma_0).$$

Теорема 3. *Для предельных множеств неприводимости* $N_r(\sigma)$, $N_\rho(\sigma)$ *для любого* $\sigma > 0$ *выполнены соотношения*

$$\lim_{\sigma \to \sigma_0 + 0} N_{r,\rho}(\sigma) \subset N_{r,\rho}(\sigma_0),\ \ \lim_{\sigma \to \sigma_0 - 0} N_r(\sigma) \supset N_r(\sigma_0),\ \ \lim_{\sigma \to \sigma_0 - 0} N_\rho(\sigma) = N_\rho(\sigma_0).$$

Следующее утверждение описывает непрерывность (разрывность) множеств неприводимости как функций параметра a.

Теорема 4. *Для множеств* $N_r(a, \sigma)$, $N_\rho(a, \sigma)$ *для любых* $a_0 > 0$ *выполнены соотношения*

$$\lim_{a \to a_0 + 0} N_{r,\rho}(a, \sigma) = N_{r,\rho}(a_0, \sigma),\ \ \forall \sigma \ge 0,$$

$$\lim_{a \to a_0 - 0} N_{r,\rho}(a, \sigma) = N_{r,\rho}(a_0, \sigma),\ \ \forall \sigma > 2a_0;\ \ \lim_{a \to a_0 - 0} N_{r,\rho}(a, \sigma) \subset N_{r,\rho}(a_0, \sigma),\ \ \forall \sigma \le 2a_0.$$

Свойства решений стохастических дифференциальных систем

Рассмотрим стохастическое эволюционное функциональное уравнение

$$dX(t) = AX(t)dt + f(t, X_t)dt + g(t, X_t)dW(t),\ \ t \in R_+,\ X \in H, \tag{5}$$

где $R_+ = [0, +\infty)$; H – сепарабельное гильбертово пространство; A – генератор компактной C_0-полугруппы $S(\cdot)$ на H (т. е. при любом $t > 0$ оператор $S(t)$ компактен, в частности, таким является оператор, порожденный эволюционным уравнением параболического типа); $X_t = \{X(t+\tau) \mid -h \le \tau \le 0\} \in C_h = C([-h,\ 0],\ H)$; h – время запаздывания; функции $f : R_+ \times C_h \to H$, $g : R_+ \times C_h \to L_2^0$ измеримы по Борелю; $W(t)$ – Q-винеровский процесс со значениями в сепарабельном гильбертовом пространстве U, Q – ограниченный симметрический положительно определенный оператор на U; L_2^0 – пространство операторов Гильберта – Шмидта $B : U_0 \to H$ с нормой $\|B\| = \left(\sum_{i=1}^{\infty} \|Bu_i\|^2\right)^{1/2}$ (u_i – полный ортонормированный базис в гильбертовом пространстве $U_0 = Q^{1/2}U$, состоящем из элементов пространства U, скалярное произведение в котором задается следующим образом:

$$\langle u, v \rangle_{U_0} = \langle Q^{-1/2}u,\ Q^{-1/2}v \rangle_U,\ u, v \in U_0).$$

Построим многозначные отображения

$$F(t,\varphi)=\bigcap_{\delta>0}\overline{co}\left[f\left(t,[\varphi]_\delta\right)\right]_\delta,\ \ G(t,\varphi)=\bigcap_{\delta>0}\overline{co}\left[g\left(t,[\varphi]_\delta\right)\right]_\delta,\ \ (t,\varphi)\in R_+\times C_h.$$

Определение 2. Пусть задана вероятностная мера λ на $(C_h,\ \beta(C_h))$. Если существуют:

1) вероятностное пространство $(\Omega,\mathcal{F},P)$ с потоком σ-алгебр (F_t), $t\geq -h$; 2) F_t-моменты остановки τ, τ_n, $n\geq 1$, со значениями в $(0,+\infty]$, $\tau_n\underset{n\to\infty}{\uparrow}\tau$ п. н.; 3) F_t-согласованный процесс $X(t)$, определенный при $t\in[-h,\tau)$; 4) F_t-согласованный Q-винеровский процесс $W(t)$, $t\in R_+$; 5) непрерывный F_t-согласованный процесс $\psi(t)$, $t\in[-h,0]$, имеющий распределение λ; 6) измеримые F_t-согласованные процессы $v(t)$, $u(t)$, $t\in R_+$, такие, что выполняются условия: а) $\lim\sup_{t\uparrow\tau}\|X(t)\|=\infty$ при $\tau<+\infty$, процесс $X(t)$ имеет непрерывные траектории при $t\in[-h,\tau)$ п. н.; б) $v(t)\in F(t,X_t)$, $u(t)\in G(t,X_t)$ для $\mu\times P$ почти всех $(t,\omega)\in[0,\tau)\times\Omega$, где μ – мера Лебега на R_+, и $\int_0^{T\wedge\tau_n}\left(\|v(s)\|+\|u(s)\|^2_{L_2^0}\right)ds<\infty$ для любого натурального n и любого $T\in R_+$; в) с вероятностью 1 для всех $t\in[-h,\tau)$ выполняется соотношение

$$X(t)=\begin{cases}\psi(t),\ t\in[-h,0],\\ S(t)\psi(0)+\int_0^t S(t-s)v(s)ds+\int_0^t S(t-s)u(s)dW(s),\ t\in[0,\tau).\end{cases}$$

Тогда набор $(\Omega,\mathcal{F},P,F_t,W(t),X(t),v(t),u(t),\tau)$ (или кратко $X(t)$, $t\leq\tau$) называется β-мартингальным решением уравнения (5) с начальным распределением λ, а случайная величина τ называется моментом взрыва β-мартингального решения.

Будем считать, что функция $h(t,\varphi)$, $t\in R_+$, $\varphi\in C_h$, со значениями в гильбертовом пространстве E имеет линейный порядок роста, если существует постоянная $C>0$, что $\|h(t,\varphi)\|_E\leq C\left(1+\|\varphi\|_{C_h}\right)$ для любых $t\in R_+$, $\varphi\in C_h$.

Функция $h(t,\varphi)$, $t\in R_+$, $\varphi\in C_h$, со значениями в гильбертовом пространстве E называется локально ограниченной, если для любого натурального n существует постоянная C_n такая, что $\|h(t,\varphi)\|_E\leq C_n$ для любых $t\in R_+$, $\varphi\in C_h$, $\|\varphi\|_{C_h}\leq n$.

Имеет место следующая теорема существования β-мартингального решения уравнения (5), полученная в работе [11].

Теорема 5. *Пусть отображения $f(t,\varphi)$ и $g(t,\varphi)$ измеримы по Борелю и локально ограничены, при каждом $t>0$ оператор $S(t)$ компактен. Тогда для любой заданной вероятностной меры λ на $(C_h,\ \beta(C_h))$ уравнение* (5) *имеет β-мартингальное решение с начальным распределением λ.*

Рассмотрим стохастическое волновое уравнение

$$\frac{\partial^2u(t,x)}{\partial t^2}=\Delta u(t,x)+f\left(t,x,u(x)\right)+g\left(t,x,u(x)\right)\dot W(t,x),\ \ t\in R_+,\ x\in\boldsymbol{O},\tag{6}$$

с начальными условиями

$$u(0,x)=u_0(x),\ \ x\in\bar{\boldsymbol{O}},\tag{7}$$

$$\frac{\partial u}{\partial t}(0,x)=u_1(x),\ \ x\in\bar{\boldsymbol{O}},\tag{8}$$

и нулевыми граничными условиями Дирихле, где $\boldsymbol{O}$ – ограниченная область в R^d с гладкой границей; $R_+ = (0, +\infty)$; Δ – оператор Лапласа в R^d; функции $f : R_+ \times \boldsymbol{O} \times R \to R$, $g : R_+ \times \boldsymbol{O} \times R \to R$ измеримы по Борелю; $u_0 : \bar{\boldsymbol{O}} \to R$, $u_1 : \bar{\boldsymbol{O}} \to R$ – заданные функции такие, что $u_0(x) = 0$, $x \in \partial\boldsymbol{O}$. Запишем задачу (6)–(8) как стохастическое эволюционное уравнение в гильбертовом пространстве. Определим пространства

$$L_V^2 = L^2(\bar{\boldsymbol{O}}, R), \ H_v^2 = W^{2,2}(\bar{\boldsymbol{O}}, R),$$

$$H_V^1 = \left\{ z(\cdot) \in W^{1,2}(\bar{\boldsymbol{O}}, R) \middle| z(x) = 0, \, x \in \partial\boldsymbol{O} \right\},$$

$$E = H_V^1 \times L_V^2, \ E_1 = L_V^2 \times H_V^{-1}.$$

Пусть $y(t) = u(t, \cdot) \in H_V^1$, $z(t) = \dfrac{\partial u}{\partial t}(t, \cdot) \in L_V^2$, $t \in R_+$; $X(t) = \begin{pmatrix} y(t) \\ z(t) \end{pmatrix} \in E$. Определим функции $\boldsymbol{f} : R_+ \times \times H_V^1 \to E$, $\boldsymbol{g} : R_+ \times H_V^1 \to \boldsymbol{L}_2(L_V^2, E)$ следующим образом: $\boldsymbol{f} = \begin{pmatrix} 0 \\ \boldsymbol{f}_1 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{g} = \begin{pmatrix} 0 \\ \boldsymbol{g}_1 \end{pmatrix}$, где функции $\boldsymbol{f}_1 : R_+ \times H_V^1 \to L_V^2$, $\boldsymbol{g}_1 : R_+ \times H_V^1 \to \boldsymbol{L}_2(L_V^2, L_V^2)$ находятся по правилу

$$\left(\boldsymbol{f}_1(t, \varphi)\right)(x) = f\left(t, x, \varphi(x)\right), \ t \in R_+, \ \varphi \in H_V^1, \ x \in R^d,$$

$$\left(\boldsymbol{g}_1(t, \varphi)v\right)(x) = g\left(t, x, \varphi(x)\right)v(x), \ t \in R_+, \ \varphi \in H_V^1, \ v \in L_V^2, \ x \in R^d.$$

Определим оператор $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 0 & I \\ \Delta & 0 \end{pmatrix}$, $D(\boldsymbol{A}) = H_V^2 \times H_V^1$, который является генератором C_0-полугруппы $P(t) = \begin{pmatrix} S(t) & C(t) \\ AC(t) & S(t) \end{pmatrix}$, $t \in R_+$, на гильбертовом пространстве E, которая не компактна при $t > 0$. Тогда задачу (6) – (8) можно переписать следующим образом:

$$dX(t) = \boldsymbol{A}X(t) + \boldsymbol{f}\left(t, X(t)\right)dt + \boldsymbol{g}\left(t, X(t)\right)d\boldsymbol{W}(t), \ t \in R_+, \ X \in E, \ X(0) = \boldsymbol{\Psi},$$

где $\boldsymbol{\Psi} = \begin{pmatrix} \psi_0 \\ \psi_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_0(\cdot) \\ u_1(\cdot) \end{pmatrix} \in E$. Построим многозначные отображения $F : R_+ \times H_V^1 \to cl(E)$, $G : R_+ \times H_V^1 \to cl\left(\boldsymbol{L}_2(L_V^2, E)\right)$ следующим образом: $F = \begin{pmatrix} 0 \\ F_1 \end{pmatrix}$, $G = \begin{pmatrix} 0 \\ G_1 \end{pmatrix}$, где отображения $F_1 : R_+ \times H_V^1 \to cl(L_V^2)$, $G_1 : R_+ \times H_V^1 \to cl\left(\boldsymbol{L}_2(L_V^2, L_V^2)\right)$ определяются равенствами

$$F_1(t, \varphi) = \bigcap_{\delta > 0} \overline{co}\left[\boldsymbol{f}_1\left(t, [\varphi]_\delta\right)\right]_\delta, \ G_1(t, \varphi) = \bigcap_{\delta > 0} \overline{co}\left[\boldsymbol{g}_1\left(t, [\varphi]_\delta\right)\right]_\delta, \ (t, \varphi) \in R_+ \times H_V^1.$$

Определение 3. Если существуют: 1) вероятностное пространство $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ с потоком σ-алгебр (F_t), $t \ge 0$; 2) F_t- моменты остановки τ, τ_n, $n \ge 1$, со значениями в $(0, +\infty]$, $\tau_n \underset{n \to \infty}{\uparrow} \tau$ п. н.; 3) F_t-согласованный процесс $X(t) = \begin{pmatrix} y(t) \\ z(t) \end{pmatrix} \in E$, определенный при $t \in [0, \tau)$; 4) F_t-согласованный Q-винеровский процесс $\boldsymbol{W}(t)$, $t \in R_+$, со значениями в L_V^2; 5) измеримые F_t-согласованные процессы

$$v(t)=\begin{pmatrix}0\\ v_1(t)\end{pmatrix}\in E,\ t\in R_+,\quad u(t)=\begin{pmatrix}0\\ u_1(t)\end{pmatrix}\in \boldsymbol{L}_2\left(L_V^2, E\right),\ t\in R_+,$$

такие, что выполняются условия: а) $\limsup_{t\uparrow\tau}\|X(t)\|=\infty$ при $\tau<+\infty$, процесс $X(t)$ имеет непрерывные в E_1 траектории при $t\in[0,\tau)$ п. н.; б) $v(t)\in F(t, y(t)), u(t)\in G(t, y(t))$ для $\mu\times P$ почти всех $(t,\omega)\in[0,\tau)\times\Omega$, где $\int\limits_0^{T\wedge\tau_n}\left(\|v(s)\|+\|u(s)\|_{L_2}^2\right)ds<\infty$ для любого натурального n и любого $T\in R_+$; в) с вероятностью 1 для всех $t\in[0,\tau)$ в пространстве E_1 выполняется соотношение

$$X(t)=P(t)\Psi+\int\limits_0^t P(t-s)v(s)ds+\int\limits_0^t P(t-s)u(s)d\boldsymbol{W}(s),\ t\in[0,\tau),$$

то набор $(\Omega, \mathcal{F}, P, F_t, \boldsymbol{W}(t), X(t), v(t), u(t), \tau)$ (или кратко $X(t), t\le\tau$) называется β-мартингальным решением задачи (6)–(8), а случайная величина τ называется моментом взрыва β-мартингального решения.

В следующей теореме приводятся условия существования β-мартингального решения задачи (6)–(8) [12].

Теорема 6. *Пусть функции* $f(t,x,\varphi)$ *и* $g(t,x,\varphi)$ *измеримы по Борелю и локально ограничены;* $u_0(\cdot)\in H_V^1$, $u_1(\cdot)\in L_V^2$. *Тогда задача (6)–(8) имеет* β-*мартингальное решение.*

Далее, в теоремах 7–10 приводятся условия существования слабых решений стохастических дифференциальных уравнений и включений со стандартным и дробным броуновскими движениями [13–16].

Рассмотрим d-мерное стохастическое дифференциальное уравнение с запаздыванием

$$dX(t)=f(t, X(t), S_tX)dt+g(t, X(t), S_tX)dW(t)+b(t, X(t), T_tX)dB^H(t),\ t\in R_+, \tag{9}$$

где $W(t)$ – r_1-мерное стандартное броуновское движение; $B^H(t)$ – r_2-мерное дробное броуновское движение с показателем Херста $H\in\left(\frac{1}{2},1\right)$, $R_+=[0,+\infty)$;

$$T_tX=\left(X(t-h_1),\dots,X(t-h_k)\right)\in R^{kd},$$

$$S_tX=\left(T_tX,\left\{X(t+\tau)\middle|-h\le\tau\le 0\right\}\right)\in E,\ E=R^{kd}\times C\left([-h,0],R^d\right),$$

$$h=h_1>h_2>\dots>h_{k-1}>h_k>0,\ h>0,$$

есть время запаздывания, $k\ge 1$.

Для любого $(t,X,\varphi)\in R_+\times R^d\times E$ построим наименьшие выпуклые замкнутые множества $F(t,X,\varphi)$, $A(t,X,\varphi)$, содержащие соответственно точки $f(t,X,\varphi)$, $gg^T(t,X,\varphi)$, и все предельные точки $f(t,X',\varphi')$, $gg^T(t,X',\varphi')$ при $(X',\varphi')\to(X,\varphi)$.

Для произвольного множества индексов $\{\alpha_1,\dots,\alpha_l\}\subseteq N_d$, $\alpha_1<\dots<\alpha_l$, определим множество $G(\alpha_1,\dots,\alpha_l)$ следующим образом. Выберем строки матрицы g с номерами $\alpha_1,\dots,\alpha_l$, пусть $\alpha_{l+1}<\dots<\alpha_d$ – номера оставшихся строк. Построим матрицу $\sigma_{\alpha_1,\dots,\alpha_l}=\left(g_{\alpha_i}g_{\alpha_j}^T\right)_{i,j=1}^l$, где g_{α_i} – строка с номером α_i матрицы g, а также построим множество $G_1(\alpha_1,\dots,\alpha_l)$, состоящее из всех точек $\left(t,x_{\alpha_1},\dots,x_{\alpha_l}\right)$ таких, что для любой открытой окрестности $U_{\left(t,x_{\alpha_1},\dots,x_{\alpha_l}\right)}$ точки $\left(t,x_{\alpha_1},\dots,x_{\alpha_l}\right)$ существует число $a>0$, с которым интеграл

$$\int\limits_{U_{\left(t,\, x_{\alpha_1},\, \ldots,\, x_{\alpha_l}\right)}} \sup_{\left(x_{\alpha_{l+1}},\, \ldots,\, x_{\alpha_d},\, \varphi\right) \in D_2^a} \left(\det \sigma_{\alpha_1, \ldots, \alpha_l}\left(t,\, x_1, \ldots, x_d,\, \varphi\right)\right)^{-1} dt dx_{\alpha_1} \cdots dx_{\alpha_l}$$

либо не определен, либо равен бесконечности, где $D_2^a = \left\{\left(x_{\alpha_{l+1}}, \ldots,\, x_{\alpha_d},\, \varphi\right) \Big| \left(x_{\alpha_{l+1}}^2 + \ldots + x_{\alpha_d}^2\right)^{1/2} + \|\varphi\| \le a\right\}$;

множество $G_2\left(\alpha_1, \ldots, \alpha_l\right)$, состоящее из всех точек $\left(t,\, x_{\alpha_1}, \ldots, x_{\alpha_l}\right)$, принадлежащих дополнению $G_1^c\left(\alpha_1, \ldots, \alpha_l\right)$ множества $G_1\left(\alpha_1, \ldots, \alpha_l\right)$, таких, что для любой открытой окрестности $U_{\left(t,\, x_{\alpha_1},\, \ldots,\, x_{\alpha_l}\right)}$ точки $\left(t,\, x_{\alpha_1}, \ldots, x_{\alpha_l}\right)$ существует число $a > 0$, с которым функция

$$\sup_{\left(x_{\alpha_{l+1}},\, \ldots,\, x_{\alpha_d},\, \varphi\right) \in D_2^a} \left(\det \sigma_{\alpha_1, \ldots, \alpha_l}\left(t,\, x_1, \ldots, x_d,\, \varphi\right)\right)^{-1} : U_{\left(t,\, x_{\alpha_1},\, \ldots,\, x_{\alpha_l}\right)} \to [0,\, \infty]$$

не является измеримой по Борелю (под дополнением множества $G_1\left(\alpha_1, \ldots, \alpha_l\right)$ понимаем дополнение в пространстве переменных $\left(t,\, x_{\alpha_1}, \ldots, x_{\alpha_l}\right)$, а под открытой окрестностью – окрестность, открытую в пространстве тех же переменных $\left(t,\, x_{\alpha_1}, \ldots, x_{\alpha_l}\right)$). Положим

$$G\left(\alpha_1, \ldots, \alpha_l\right) = G_1\left(\alpha_1, \ldots, \alpha_l\right) \bigcup G_2\left(\alpha_1, \ldots, \alpha_l\right).$$

Скалярная функция $z\left(t,\, x_1, \ldots, x_d\right)$ удовлетворяет следующему *условию* А: если существует множество индексов $\left\{\alpha_1, \ldots, \alpha_l\right\} \subseteq N_d,\ \alpha_1 < \ldots < \alpha_l$, такое, что: 1) функция z при каждых фиксированных $\left(t,\, x_{\alpha_1}, \ldots, x_{\alpha_l}\right)$ непрерывна по переменным $\left(x_{\alpha_{l+1}}, \ldots,\, x_{\alpha_d},\, \varphi\right)$, где $\left\{\alpha_{l+1}, \ldots, \alpha_d\right\} = N_d \setminus \left\{\alpha_1, \ldots, \alpha_l\right\}$; 2) в пространстве переменных $\left(t,\, x_{\alpha_1}, \ldots, x_{\alpha_l}\right)$ существует замкнутое множество V, содержащее множество $G\left(\alpha_1, \ldots, \alpha_l\right)$ такое, что множество $\left\{\left(t,\, x_1, \ldots, x_d,\, \varphi\right) \Big| \left(t,\, x_{\alpha_1}, \ldots, x_{\alpha_l}\right) \in V\right\}$ принадлежит множеству точек непрерывности отображения z, а функция $\sigma_{\alpha_1, \ldots, \alpha_l}$ непрерывна по переменным $\left(x_{\alpha_{l+1}}, \ldots,\, x_{\alpha_d},\, \varphi\right)$ при каждых фиксированных $\left(t,\, x_{\alpha_1}, \ldots, x_{\alpha_l}\right) \in V^c$.

Функция $z\left(t,\, X,\, \varphi_1,\, \varphi_2\right)$, $t \in R_+$, $X \in R^d$, $\varphi_1 \in R^{kd}$, $\varphi_2 \in C\left(\left[-h,\, 0\right],\, R^d\right)$, со значениями в $R^{d \times l}$ удовлетворяет следующему *условию* Б: если для любого $a > 0$ выполнено условие

$$\lim_{q \downarrow 0} \sup_{\left(t,\, X,\, \varphi_1,\, \varphi_2\right),\, \left(t,\, X,\, \varphi_1,\, \bar{\varphi}_2\right) \in \Gamma(0,\, a),\, \|\varphi_2 - \bar{\varphi}_2\| \le q} \left| z\left(t,\, X,\, \varphi_1,\, \varphi_2\right) - z\left(t,\, X,\, \varphi_1,\, \bar{\varphi}_2\right) = 0,\right.$$

где $\Gamma\left(0,\, a\right) = \left\{\left(t,\, X,\, \varphi_1,\, \varphi_2\right) \in R_+ \times R^d \times R^{kd} \times C\left(\left[-h,\, 0\right],\, R^d\right) \Big| t + |X| + |\varphi_1| + \|\varphi_2\| \le a\right\}$.

Функция $z : R_+ \times R^d \times R^{kd} \to R^m$ удовлетворяет $\left(\delta,\, \rho\right)$-*локальному условию Гёльдера*, если для любого натурального n существует постоянная L_n такая, что

$$\left| z\left(t,\, X,\, \varphi\right) - z\left(s,\, Y,\, \psi\right)\right| \le L_n\left(|t - s|^\delta + |X - Y|^\rho + |\varphi - \psi|^\rho\right)$$

для любых $\left(t,\, X,\, \varphi\right), \left(s,\, Y,\, \psi\right) \in \left[0,\, n\right] \times B_d^n \times B_{kd}^n$. Функция $z : R_+ \times R^d \times R^{kd} \to R^m$ удовлетворяет $\left(\delta,\, \rho\right)$-*глобальному условию Гёльдера*, если постоянная L_n не зависит от n.

Для каждых $\alpha \in \left(0, \frac{1}{2}\right)$, $a, b \in R$, $a < b$, определим пространство $\boldsymbol{H}_\alpha[a, b]$ измеримых функций $z : [a, b] \to R^d$ с нормой $\|z(\cdot)\|_{\boldsymbol{H}_\alpha[a, b]} := \sup\limits_{t \in [a, b]} |z(t)|_\alpha < \infty$,

где $|z(t)|_\alpha = |z(t)| + \int\limits_a^t \frac{|z(t) - z(s)|}{(t - s)^{\alpha + 1}} ds.$

Для произвольных $\alpha \in \left(0, \frac{1}{2}\right)$, $a, b \in R$, $a < b$, через $C^\alpha[a, b]$ обозначим пространство непрерывных по Гёльдеру с показателем α функций $z : [a, b] \to R^d$ с нормой

$$\|z\|_{C^\alpha[a, b]} = \sup_{t \in [a, b]} |z(t)| + \sup_{a \le s < t \le b} \frac{|z(t) - z(s)|}{(t - s)^\alpha}.$$

Пусть $C^{\alpha, p}\left(\alpha \in \left(0, \frac{1}{2}\right), p \le 0\right)$ – метрическое пространство измеримых функций $z : [p, \infty] \to R^d$ с метрикой $d_{C^\alpha}(z_1, z_2) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} 2^{-n}\left(\|z_1 - z_2\|_{C^\alpha[p, n]} \wedge 1\right)$. Через $C_0^{\alpha, p}$, соответственно $C_0^\alpha[a, b]$, обозначим множество функций $z \in C^{\alpha, p}$, соответственно $z \in C^\alpha[a, b]$, удовлетворяющих условию

$$\lim_{q \to +0} \sup_{0 < |t - s| < q} \frac{|z(t) - z(s)|}{(t - s)^\alpha} = 0.$$

Определение 4. Пусть заданы вероятностная мера ν на $\left(C^{1/2}[-h, 0], \beta\left(C^{1/2}[-h, 0]\right)\right)$ и число $\eta \in \left(0, \frac{1}{2}\right)$. Если существует процесс $X(t)$, $t \ge -h$, заданный на некотором вероятностном пространстве $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ с потоком σ-алгебр $(F_t)_{t \ge 0}$, удовлетворяющий условиям: 1) процесс $X(t)$, $t \in [-h, 0]$, является F_0-измеримым, и для любого $A \in \beta\left(C^{1/2}[-h, 0]\right)$ выполняется равенство $P\left(\left(X(t), t \in [-h, 0]\right) \in A\right) = \nu(A)$; 2) существует F_t-момент остановки τ со значениями в $(0, +\infty]$ п. н. такой, что процесс $X(t)$, $t \in R_+$, является измеримым F_t-согласованным, для почти всех $\omega \in \Omega$ траектории процесса $X(t)$ непрерывны по Гёльдеру с показателем η на любом отрезке из $[0, \tau)$, а также $\limsup\limits_{t \to \tau - 0} |X(t)| = \infty$ при $\tau < \infty$; 3) существуют стандартное F_t-броуновское движение $W(t)$ и F_0-измеримое дробное броуновское движение $B^H(t)$; 4) существуют измеримые F_t-согласованные процессы $v(t)$, $u(t)$, $t \in R_+$, такие, что

$$v(t, \omega) \in F\left(t, X(t, \omega), S_t X(\omega)\right), \; uu^T(t, \omega) \in A\left(t, X(t, \omega), S_t X(\omega)\right)$$

для $\mu \times P$ почти всех $(t, \omega) \in (0, \tau] \times \Omega$; 5) для любого момента остановки σ, $0 \le \sigma < \tau$, и любого $L \in R_+$ п. н. выполняется условие

$$\int\limits_0^{T \wedge \sigma} \left(|v(s)| + |u(s)|^2\right) ds + \|b(\cdot, X(\cdot), TX)\|_{\boldsymbol{H}_\eta[0, L \wedge \sigma]} < \infty;$$

6) с вероятностью 1 для всех $t \in [0, \tau)$ выполняется соотношение

$$X(t) = X(0) + \int_0^t v(s)ds + \int_0^t u(s)dW(s) + \int_0^t b(s,\ X(s),\ T_s X)dB^H(s),$$

то набор $(\Omega, \mathcal{F}, P, F_t, X, v, u, \boldsymbol{W}, B^H, \tau)$ (или, короче, $X(t)$) называется β-слабым решением уравнения (9) с начальным распределением ν, имеющим непрерывные по Гёльдеру порядка η траектории (до момента взрыва τ). Если

$$v(t, \omega) = f(t,\ X(t, \omega),\ S_t X(\omega)),\ u(t, \omega) = g(t,\ X(t, \omega),\ S_t X(\omega))$$

для $\mu \times P$ почти всех $(t, \omega) \in [0, \tau) \times \Omega$, то β-слабое решение называется слабым решением.

В определении β-слабого решения интеграл по стандартному броуновскому движению – интеграл Ито, интеграл по дробному броуновскому движению – потраекторный интеграл Римана – Стилтьеса.

Теорема 7. *Пусть функции* $f(t, X, \varphi)$, $g(t, X, \varphi)$ *измеримы по Борелю и локально ограничены, функция* $b(t, X, \varphi_1)$ *удовлетворяет* (δ, ρ)*-локальному условию Гёльдера, где* $\delta > 1 - H$, $\rho > 2 - 2H$. *Тогда для любой, заданной на* $\left(C^{1/2}[-h, 0], \beta\left(C^{1/2}[-h, 0]\right)\right)$ *вероятностной меры* ν *и любого* $\eta \in \left(0, \frac{1}{2}\right)$ *уравнение (9) имеет* β*-слабое решение с начальным распределением* ν*, непрерывными по Гёльдеру с показателем* η *траекториями и бесконечным моментом взрыва п. н.*

Теорема 8. *Пусть функции* $f(t, X, \varphi)$, $g(t, X, \varphi)$ *измеримы по Борелю и локально ограничены, компоненты функций* $f(t, X, \varphi)$, $\sigma(t, X, \varphi)$ *удовлетворяют условиям* А *и* Б*, функция* $b(t, X, \varphi_1)$ *удовлетворяет* (δ, ρ)*-локальному условию Гёльдера,* $\delta > 1 - H$, $\rho > 2 - 2H$. *Тогда для любой, заданной на* $\left(C^{1/2}[-h, 0], \beta\left(C^{1/2}[-h, 0]\right)\right)$ *вероятностной меры* ν *и любого* $\eta \in \left(0, \frac{1}{2}\right)$ *уравнение (9) имеет слабое решение* $X(t)$ *с начальным распределением* ν *и непрерывными по Гёльдеру с показателем* η *траекториями.*

Рассмотрим стохастическое дифференциальное включение

$$dX(t) \in F(t,\ X,\ (t))dt + G_W(t,\ X(t))dW(t) + G_B(t,\ X(t))dB^H(t),\ X \in R^d,\ t \in R_+, \tag{10}$$

где $W(t)$ – r_1-мерное стандартное броуновское движение; $B^H(t)$ – r_2-мерное дробное броуновское движение с показателем Херста $H \in \left(\frac{1}{2}, 1\right)$; R^d – d-мерное евклидово пространство; $R_+ = [0, +\infty)$;

$F: R_+ \times R^d \to 2^{R^d}$; $G_W: R_+ \times R^d \to 2^{R^{d \times r_1}}$; $G_B: R_+ \times R^d \to 2^{R^{d \times r_2}}$.

Для многозначного отображения $L: R_+ \times R^d \to 2^{R^{d \times l}}$ и процесса $z: R_+ \times L_1(\Omega, R^d)$, заданного на вероятностном пространстве $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ и согласованного с потоком σ-алгебр (F_t), через $S(L \circ z)$ обозначим множество всех F_t-согласованных процессов $y: R_+ \to L_1(\Omega, R^d)$ таких, что для $\mu \times P$ почти всех $(t, \omega) \in R_+ \times \Omega$ выполняется включение $y(t, \omega) \in L(t, z(t, \omega))$, где μ – мера Лебега на R_+.

Многозначное отображение $L: R_+ \times R^d \to 2^{R^{d \times l}}$ удовлетворяет *условию* В, если отображение $L(t, X)$ измеримо по Борелю, локально ограничено и выполняется одно из следующих условий: $В_1$ – при каждом $t_0 \in R_+$ отображение $X \to L(t_0, X)$ полунепрерывно сверху и принимает непустые компактные выпуклые значения; $В_2$ – при каждом $t_0 \in R_+$ отображение $X \to L(t_0, X)$ полунепрерывно снизу и принимает непустые замкнутые значения.

Многозначное отображение $L: R_+ \times R^d \to 2^{R^{d\times l}}$ удовлетворяет *условию* Г, если оно принимает непустые компактные выпуклые значения и существуют $\delta > 1 - H$, $\rho > 2 - 2H$ такие, что отображение $L(t, X)$ удовлетворяет *локальному условию Гёльдера* по t и по X с показателями δ и ρ соответственно, т. е. для любого натурального n существует постоянная C_n, при которой

$$\alpha\left(L(t, X), L(s, Y)\right) \le C_n\left(|X - Y|^\rho + |t - s|^\delta\right)$$

для любых

$$(t, X), (s, Y) \in [0, n] \times B_d[0, n].$$

Многозначное отображение $L: R_+ \times R^d \to 2^{R^{d\times l}}$ удовлетворяет *условию* Д, если оно измеримо по Борелю, принимает непустые компактные выпуклые значения, удовлетворяет *локальному условию Липшица* по X, т. е. для любых T, $a > 0$ существует постоянная $L_{a,T}$, при которой для любых $t \in [0, T]$, X, $Y \in R^d$, $|X| \le a$, $|Y| \le a$, выполняется неравенство

$$\alpha\left(L(t, X), L(t, Y)\right) \le L_{a,T}|X - Y|,$$

и имеет линейный порядок роста по X, т. е. для любого $T > 0$ существует постоянная M_T, при которой для любых $t \in [0, T]$, $X \in R_d$ выполняется неравенство $\alpha\left(L(t, X), 0\right) \le M_T\left(1 + |X|\right)$.

Многозначное отображение $L: R_+ \times R^d \to 2^{R^{d\times l}}$ удовлетворяет *условию* Е, если оно принимает непустые компактные выпуклые значения и удовлетворяет *локальному условию Гёльдера* по t с показателем $\delta > 1 - H$ и глобальному условию Липшица по X, т. е. для любого $T > 0$ существует постоянная K_T, при которой для любых t, $s \in [0, T]$, $X, Y \in R_d$ выполняется неравенство

$$\alpha\left(L(t, X), L(s, Y)\right) \le K_T\left(|t - s|^\delta + |X - Y|\right).$$

Определение 5. Пусть заданы вероятностная мера ν на $\left(R^d, \beta\left(R^d\right)\right)$ и число $\eta \in \left(0, \frac{1}{2}\right)$. Если существует процесс $X(t)$, заданный на некотором вероятностном пространстве $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ с потоком σ-алгебр (F_t), удовлетворяющий условиям: 1) существует F_t-момент остановки τ (момент взрыва) со значениями в промежутке $(0, +\infty]$ п. н. такой, что процесс $X(t)$ является измеримым F_t-согласованным, для почти всех $\omega \in \Omega$ траектории процесса $X(t)$ непрерывны по Гёльдеру с показателем η на любом отрезке из $[0, \tau)$, а также $\limsup\limits_{t\to\tau-0}|X(t)| = \infty$ при $\tau < \infty$; 2) существуют стандартное F_t-броуновское движение $W(t)$ и F_0-измеримое дробное броуновское движение $B^H(t)$; 3) существуют измеримые F_t-согласованные процессы $v(t)$, $u(t)$ и F_t-согласованный процесс $\sigma(t)$ такие, что для $\mu \times P$ почти всех $(t, \omega) \in [0, \tau) \times \Omega$ выполняются включения

$$v(t, \omega) = F\left(t, X(t, \omega)\right),\ uu^T(t, \omega) \in A_W\left(t, X(t, \omega)\right),\ \sigma(t, \omega) \in G_B\left(t, X(t, \omega)\right);$$

для почти всех $\omega \in \Omega$ траектории процесса $\sigma(t)$ непрерывны по Гёльдеру с показателем $\alpha > 1 - H$ на любом отрезке из $[0, \tau)$; для любого момента остановки κ, $0 \le \kappa < \tau$, и любого $T \in R_+$ п. н. выполняется условие $\int\limits_0^{T\wedge\kappa}\left(|v(s)| + |u(s)|^2\right)ds + \|\sigma(\cdot)\|_{\boldsymbol{H}_\eta, T\wedge\kappa} < \infty$; 4) с вероятностью 1 для всех $t \in [0, \tau)$ выполняется соотношение

$$X(t) = X(0) + \int\limits_0^t v(s)ds + \int\limits_0^t u(s)dW(s) + \int\limits_0^t \sigma(s)dB^H(s);$$

5) $P\left(X(0)\in A\right)=\nu(A)$ для любого $A\in\beta\left(R^d\right)$, то набор $\left(\Omega, \mathcal{F}, P, F_t, X, v, u, \sigma, \boldsymbol{W}, B^H, \tau\right)$ (или кратко $X(t),\ t<\tau$) называется *слабым решением* включения (10) с начальным распределением ν, имеющим непрерывные по Гёльдеру порядка η траектории (до момента взрыва τ).

Определение 6. Слабое решение $X(t),\ t<\tau$, называется *сильным*, если процесс $X(t)$ согласован с потоком σ-алгебр, порожденным броуновскими движениями $W(t)$, $B^H(t)$ и начальным условием $X(0)$.

Теорема 9. *Пусть многозначные отображения $F(t, X)$ и $A_W(t, X)$ удовлетворяют условию* В, *а многозначное отображение $G_B(t, X)$ – условию* Г. *Тогда для любой, заданной на $\left(R^d, \beta\left(R^d\right)\right)$ вероятностной меры ν и любого числа $\eta\in\left(0, \frac{1}{2}\right)$ включение (10) имеет слабое решение $X(t)$ с начальным распределением ν и непрерывными по Гёльдеру с показателем η траекториями.*

Теорема 10. *Пусть многозначные отображения $F(t, X)$ и $G_W(t, X)$ удовлетворяют условию* Д, *многозначное отображение $G_B(t, X)$ – условию* Е. *Тогда для любой, заданной на $\left(R^d, \beta\left(R^d\right)\right)$ вероятностной меры ν и любого $\eta\in\left(0, \min\left\{\delta, \frac{1}{2}\right\}\right)$ включение (10) имеет сильное решение $X(t)$, определенное на всем промежутке $[0, +\infty)$, с начальным распределением ν и непрерывными по Гёльдеру с показателем η траекториями.*

Дифференциально-алгебраические системы

Рассмотрим стационарную систему управления, не разрешенную относительно производной

$$A_0\dot{x}(t)=Ax(t)+A_1x(t-h)+Bu(t), \tag{11}$$

где $x\in R^n$; $u\in R^r$; A_0, A и A_1 – $(n\times n)$-матрицы; B – $(n\times r)$-матрица; $h>0$ – постоянное запаздывание.

Замкнем систему (11) динамическим регулятором вида

$$\sum_{i=0}^{m}\sum_{j=0}^{k}G_{ij}u^{(i)}(t-jh)=\sum_{j=0}^{k}Q_j(x-jh), \tag{12}$$

где m, k – некоторые целые неотрицательные числа; G_{ij}, Q_j – постоянные матрицы размерами $r\times r$ и $r\times n$ соответственно, $i=\overline{0, m}$, $j=\overline{0, k}$.

Определение 7. Систему (11) назовем спектрально приводимой, если замыкание ее некоторым регулятором вида (12) приводит к системе (11), (12), спектр которой конечен, т. е. конечно множество корней функции

$$\delta(\lambda)=\det\begin{bmatrix}D(\lambda), & B\\ Q(\lambda), & G(\lambda)\end{bmatrix},$$

где $\begin{cases} D(\lambda)=\lambda A_0-A-A_1e^{-\lambda h},\\ Q(\lambda)=\sum\limits_{j=0}^{k}Q_je^{-j\lambda h},\\ G(\lambda)=\sum\limits_{i=0}^{m}\sum\limits_{j=0}^{k}G_{ij}\lambda^i e^{-j\lambda h}.\end{cases}$

Имеет место следующее утверждение [17, 18].

Теорема 11. *Система (11) спектрально приводима тогда и только тогда, когда конечно множество общих корней миноров n-го порядка матрицы $\left[D(\lambda); B\right]$.*

Этот результат обобщается на случай стационарных систем с кратными запаздываниями вида [19]

$$\sum_{i=0}^{k}\sum_{j=0}^{\alpha} A_{ij}x^{(i)}(t-jh) = \sum_{i=0}^{m}\sum_{j=0}^{\beta} B_{ij}u^{(i)}(t-jh),$$

где $x \in R^n$; $u \in R^r$; A_{ij}, B_{ij} – $(n\times n)$-, $(n\times r)$-матрицы соответственно; α, β, k, m – неотрицательные целые числа; $h > 0$ – постоянное запаздывание.

Рассмотрим стационарную систему

$$D(p)x(t) = Bu(t) \tag{13}$$

с r-мерным управлением (входом) $u(t)$, n-вектор-траекторией $x(t)$ и m-мерным выходом

$$y(t) = Cx(t), \tag{14}$$

где $p = \dfrac{d}{dt}$ – оператор дифференцирования; $D(\lambda)$ – $(n\times n)$-матрица, элементами которой являются целые функции комплексной переменной λ; B, C – $(n\times r)$-, $(m\times n)$-матрицы соответственно.

Определение 8. Систему (13) назовем регуляризируемой с помощью обратной линейной связи по выходу (14), если найдется $(r\times m)$-матрица Q такая, что замыкание системы (13), (14) управлением $u(t) = Qy(t)$ приводит к регулярной системе $(D(p) - BQC)x(t) = 0$, т. е. такой, у которой характеристическая функция $\delta(\lambda) = \det[D(\lambda) - BQC]$ является ненулевой.

Верна следующая теорема [20].

Теорема 12. *В случае $d(\lambda) \equiv 0$ система (13) с одним входом ($r = 1$) или одним выходом ($m = 1$) регуляризуема линейной обратной связью по выходу (14) тогда и только тогда, когда найдется такое λ_0, что $CF(\lambda_0)B \neq 0$, где $F(\lambda)$ – присоединенная (союзная) матрица к матрице $D(\lambda)$; $d(\lambda) = \det D(\lambda)$.*

В общем случае показано [21], что если $d(\lambda) \equiv 0$, то для регуляризуемости системы (13), (14) достаточно, чтобы нашлось такое λ_0, что $CF(\lambda_0)B \neq 0$.

Для трехмерной ($n = 3$) системы (13), (14) с двумя входами ($r = 2$) доказано [22], что если $d(\lambda) \equiv 0$ и $CF(\lambda)B \equiv 0$, то такая система будет регуляризуема тогда и только тогда, когда существует число λ_0 такое, что $CG(\lambda_0)C^T \neq 0$.

Здесь

$$G(\lambda) = \begin{bmatrix} 0, & \Delta_1(\lambda), & -\Delta_2(\lambda) \\ -\Delta_1(\lambda), & 0, & \Delta_3(\lambda) \\ \Delta_2(\lambda), & -\Delta_3(\lambda), & 0 \end{bmatrix},$$

где $\Delta_k(\lambda) = \det[d_k(\lambda); B]$; $d_k(\lambda)$ – k-й столбец матрицы $D(\lambda)$, $k = 1, 2, 3$.

Рассмотрим теперь систему управления вида

$$A_0\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) + \sum_{i=1}^{m} B_i u(t-h_i),\ t \geq 0, \tag{15}$$

с начальным условием

$$x(0) = x_0,\ u_0(\cdot) = \{u(t) = \varphi(t),\ t \in [-h_m, 0)\}, \tag{16}$$

где $x \in R^n$; $u \in R^r$; A_0, A, B, B_i, $i = \overline{1, m}$, – постоянные матрицы соответствующих размеров; u – r-мерное достаточно гладкое управление; $h_i > 0$, $i = \overline{1, m}$, – числа (запаздывания), причем $h_1 < h_2 < \ldots < h_m$; x_0 – заданный n-вектор; $\varphi(t)$ – заданная кусочно-непрерывная r-вектор-функция на промежутке $[-h_m, 0)$.

Считаем, что матрица $A_0 \neq 0$, $\det A_0 = 0$ и k_0 – индекс матрицы A_0.

Систему (15) будем называть регулярной, если регулярен пучок матриц $\left(\lambda A_0 - A\right)$, т. е. найдется число $\lambda_0 \in C$ такое, что $\det\left(\lambda_0 A_0 - A\right) \neq 0$.

Пусть H – некоторая $(n \times n)$-матрица, а A_0^+ – псевдообратная для матрицы A_0.

Первоначально предположим, что матрица $A = 0$, а это значит, что система (11) является нерегулярной.

Определение 9. Управление $u(t)$, $t \geq 0$, назовем допустимым, если при этом управлении система (15) имеет решение хотя бы при одном начальном условии (16).

Определение 10. Нерегулярная система (15) называется H-управляемой, если для любого начального условия (16) найдутся момент времени t_1, $0 < t_1 < \infty$, и управление $u(t)$, $t \in \left[0, t_1 - h_m\right)$, $u(t) \equiv 0$, при $t \geq t_1 - h_m$ такие, что решение системы (15), (16) удовлетворяет условию $Hx(t_1) = 0$.

Пусть для матриц A_0, A_0^+, B_i выполняется условие

$$\left(E_n - A_0 A_0^+\right) B_i = 0, 1 \leq i \leq m. \tag{17}$$

Доказано [23, 24], что управление $u(t)$, $t \geq 0$, является допустимым для системы (15) тогда и только тогда, когда

$$\left(E_n - A_0 A_0^+\right) B_0 u(t) = 0. \tag{18}$$

Теорема 13. *При выполнении условия (17) в классе допустимых управлений (18) нерегулярная система (15) H-управляема тогда и только тогда, когда*

$$\operatorname{rank}\left[HA_0^+ B_0\left(E_n - D^+ D\right)\right] = \operatorname{rank}\left[HA_0^+ B_0\left(E_n - D^+ D\right), H\right],$$

где $D = \left(E_n - A_0 A_0^+\right) B_0$, $B_0 = B + \sum\limits_{i=1}^{m} A_0 A_0^+ B_i$.

Проблемы H-управляемости и полной H-управляемости регулярной системы (15) исследованы в работах [25–27].

Рассмотрим регулярную систему управления

$$A_0 \dot{x}(t) = Ax(t) + \int_0^h B(s) u(t - s) ds, \ t \geq 0, \tag{19}$$

с начальным условием

$$x(0) = x_0, \ u_0(\cdot) = \left\{u(t) = \varphi(t), \ t \in [-h, 0]\right\}, \tag{20}$$

где $x \in R^n$; $u \in R^r$ – достаточно гладкое управление; A_0, A – постоянные $(n \times n)$-матрицы; $h(h > 0)$ – число (запаздывание); $B(s)$, $s \in [0, h]$, – $(n \times r)$ достаточно гладкая матричная функция $\left(B(s) \equiv 0, s \notin [0, h]\right)$; x_0 – заданный n-вектор; $\varphi(t)$ – заданная кусочно-непрерывная r-вектор-функция.

Определение 11. Регулярную систему (19) назовем H-управляемой, если для любого допустимого начального состояния (20) найдутся момент времени t_1, $0 < t_1 < +\infty$, и k_0 раз непрерывно дифференцируемое управление $u(t)$, $t \in \left[0, t_1 - h\right)$, $u(t) \equiv 0$, $t \geq t_1 - h$, такие, что решение $x(t)$, $t \geq 0$, системы (19), (20) удовлетворяет условию $Hx(t_1) = 0$.

Определение 12. Регулярную систему (19) назовем полностью H-управляемой, если для любого допустимого начального состояния (20) найдутся момент времени t_1, $0 < t_1 < +\infty$, и k_0 раз непрерывно дифференцируемое управление $u(t)$, $t \in \left[0, t_1 - h\right)$, $u(t) \equiv 0$, $t \geq t_1 - h$, такие, что решение $x(t)$, $t \geq 0$, системы (19), (20) удовлетворяет условию $Hx(t) \equiv 0$, $t \geq t_1$.

Введем в рассмотрение так называемые базовые матрицы C_i, $i \in N_0$, которые являются решениями системы матричных уравнений:

$$C_0 = C_0A_0C_0,\ A_0C_0A = AC_0A_0,$$
$$C_jA_0C_i = -C_{j+i},\ C_jA_0C_0 = 0,$$
$$C_0A_0C_i = 0,\ C_jAC_0 = 0,\ C_0AC_i = 0,$$
$$A_0C_i = AC_{i+1} + \delta_i^0 E,\ AC_m = 0,$$
$$C_iA_0 = C_{i+1}A + \delta_i^0 E,\ C_mA = 0,\ i, j = \overline{1, m-1},$$

где δ_i^0 – символ Кронекера; E – единичная $(n \times n)$-матрица; m – индекс пары матриц (A_0, A). Пусть

$$\sum_{i=0}^{m}\left(\frac{d^i}{ds^i}\right)\left[C_iB(s)\right]_{|s=h} = 0. \tag{21}$$

Обозначим через

$$\hat{A}_0 = \left(\lambda_0A_0 - A\right)^{-1}A_0,\ \hat{A} = \left(\lambda_0A_0 - A\right)^{-1}A,\ \hat{B} = \left(\lambda_0A_0 - A\right)^{-1}B_1,$$

$$B_1 = A_0\int_0^h e^{-C_0A\tau}\left(\sum_{i=0}^{m}\left(\frac{d^i}{d\tau^i}\right)\left[C_iB(\tau)\right]\right)d\tau.$$

Построим определяющие уравнения вида

$$Y_{t+1} = \hat{A}_0^d\hat{A}Y_t + \hat{A}_0^d\hat{B}U_t^1,\ U_{t+1}^i = U_i^{i+1},\ i = \overline{1, k-1},$$

$$U_{t+1}^k = U_{t+k},\ P_t = C\left[Y_t, U_t^1, \ldots, U_t^k\right],\ t \ge 0,$$

где

$$Y_t \equiv 0;\ t = \overline{0, k-1};\ U_t \equiv 0,\ t \ne k;\ U_k = E_r;$$

$$C = \left[\hat{A}_0\hat{A}_0^d, \left(E_n - \hat{A}_0\hat{A}_0^d\right)\hat{A}^d\hat{B}, \ldots, (-1)^{k-1}\left(E_n - \hat{A}_0\hat{A}_0^d\right)\left(\hat{A}_0\hat{A}_0^d\right)^{k-1}\hat{A}^d\hat{B}\right];$$

$\hat{A}_0^d\,\hat{A}^d$ – обратные матрицы Дразина для матриц $\hat{A}_0, A$ соответственно.

Обозначим через P_t^* решение определяющих уравнений при условии $Y_1 = E_n,\ U_t \equiv 0$ при $t \ge 0$.

Пусть для системы (19) выполняется условие (21). Тогда справедливы следующие теоремы [28–30].

Теорема 14. *Система (19) H-управляема тогда и только тогда, когда выполняется равенство*

$$\operatorname{rank}\left(HP_1^*, HP_i, i = \overline{1, n+k}\right) = \operatorname{rank}\left(HP_i, i = \overline{1, n+k}\right).$$

Теорема 15. *Для полной H-управляемости системы (19) необходимо и достаточно, чтобы выполнялось условие*

$$\operatorname{rank}\left(L, \bar{H}P_i, i = \overline{k+1, n+k}\right) = \operatorname{rank}\left(L, \bar{H}\right),$$

где

$$L = \begin{bmatrix} HP_k & \ldots & HP_1 \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ HP_{n+2k-1} & \ldots & HP_{n+k} \end{bmatrix},\ \bar{H} = \begin{bmatrix} HP_1^* \\ \ldots \\ HP_{n+k}^* \end{bmatrix}.$$

Представленные результаты не охватывают всех исследований по асимптотической теории дифференциальных систем, проведенных сотрудниками кафедры. Бóльшая часть результатов, не упомянутых выше, опубликованы в работах [31–58].

Авторы выражают признательность академику Н. А. Изобову, доцентам В. И. Булатову, М. М. Васьковскому, В. В. Крахотко за внимание к работе, предоставленные материалы и конструктивное обсуждение содержания статьи.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК (*REFERENCES*)

1. *Леваков А. А., Мазаник С. А., Размыслович Г. П.* Асимптотические характеристики решений динамических систем // Выбраныя навуковыя працы БДУ. Т. VI. Матэматыка. 2001. С. 323–356 [Levakov A. A., Mazanik S. A., Razmyslovich G. P. Asimptoticheskie kharakteristiki reshenij dinamicheskikh sistem. *Vybranyya navukovye pratsy BDU.* Vol. VI. Matjematyka. 2001. P. 323–356 (in Russ.)].

2. *Леваков А. А., Мазаник С. А., Размыслович Г. П.* Асимптотические свойства динамических систем // Вестн. БГУ. Сер. 1, Физика. Математика. Информатика. 2011. № 3. С. 97–102 [Levakov A. A., Mazanik S. A., Razmyslovich G. P. Asymptotic properties of dynamical systems. *Vestnik BGU. Ser. 1, Fiz. Mat. Inform.* 2011. No. 3. P. 97–102 (in Russ.)].

3. *Изобов Н. А., Мазаник С. А.* Общий признак приводимости линейных дифференциальных систем и свойства коэффициентов приводимости // Дифференц. уравнения. 2007. Т. 43, № 2. С. 191–202 [Izobov N. A., Mazanik S. A. A General Test for the Reducibility of Linear Differential Systems and Properties of the Reducibility Coefficient. *Differentsial'nye uravn.* 2007. Vol. 43, No. 2. P. 191–202 (in Russ.)].

4. *Изобов Н. А., Мазаник С. А.* Об асимптотически эквивалентных линейных системах при экспоненциально убывающих возмущениях // Дифференц. уравнения. 2006. Т. 42, № 2. С. 168–174 [Izobov N. A., Mazanik S. A. On Linear Systems Asymptotically Equivalent Under Exponentially Decaying Perturbations. *Differentsial'nye uravn.* 2006. Vol. 42, No. 2. P. 168–174 (in Russ.)].

5. *Изобов Н. А., Мазаник С. А.* О множествах линейных дифференциальных систем, к которым неприводимы возмущенные линейные системы // Дифференц. уравнения. 2011. Т. 47, № 11. С. 1545–1550 [Izobov N. A., Mazanik S. A. On Sets of Linear Differential Systems to Which Perturbed Linear Systems Cannot Be Reduced. *Differentsial'nye uravn.* 2011. Vol. 47, No. 11. P. 1545–1550 (in Russ.)].

6. *Изобов Н. А., Мазаник С. А.* Параметрические свойства множеств неприводимости линейных дифференциальных систем // Дифференц. уравнения. 2015. Т. 51, № 8. С. 979–989 [Izobov N. A., Mazanik S. A. Parametric Properties of Irreducibility Sets of Linear Differential Systems. *Differentsial'nye uravn.* 2015. Vol. 51, No. 8. P. 979–989 (in Russ.)].

7. *Изобов Н. А., Мазаник С. А.* Множества неприводимости линейных систем // Еругинские чтения – 2011 : тез. докл. XIV Междунар. науч. конф. по дифференц. уравнениям (Новополоцк, 12–14 мая 2011 г.). Новополоцк, 2011. С. 33–34 [Izobov N. A., Mazanik S. A. Mnozhestva neprivodimosti linejnykh sistem. *Eruginskie chteniya – 2011* : tez. dokl. XIV Mezhdunar. nauchn. konf. po differents. uravn. (Novopolotsk, 12–14 May 2011). Novopolotsk, 2011. P. 33–34 (in Russ.)].

8. *Изобов Н. А., Мазаник С. А.* О линейных дифференциальных системах, к которым неприводимы возмущенные линейные системы // Дифференц. уравнения. 2011. Т. 47, № 6. С. 912 [Izobov N. A., Mazanik S. A. On sets of linear differential systems to which perturbed linear systems cannot be reduced. *Differentsial'nye uravn.* 2011. Vol. 47, No. 6. P. 912 (in Russ.)].

9. *Изобов Н. А., Мазаник С. А.* Параметрические свойства множеств неприводимости линейных дифференциальных систем // XI Белорусская математическая конференция : тез. междунар. конф. (Минск, 5–9 нояб. 2012 г.) : в 5 ч. Минск, 2012. Ч. 2. С. 29 [Izobov N. A., Mazanik S. A. Parametricheskie svojstva mnozhestv neprivodimosti linejnykh differentsial'nykh sistem. *XI Belorusskaya matematicheskaya konferentsiya* : tez. mezhdunar. konf. (Minsk, 5–9 Novemb. 2012) : in 5 parts. Minsk, 2012. Part 2. P. 29 (in Russ.)].

10. *Изобов Н. А., Мазаник С. А.* Предельные множества неприводимости линейных дифференциальных систем как функции параметра // Шестые Богдановские чтения по обыкновенным дифференциальным уравнениям : материалы Междунар. матем. конф. (Минск, 7–10 дек. 2015 г.) : в 2 ч. Минск, 2015. Ч. 1. С. 28–30 [Izobov N. A., Mazanik S. A. Predel'nye mnozhestva neprivodimosti linejnykh differentsial'nykh sistem kak funktsii parametra. *Shestye Bogdanovskie chteniya po obyknovennym differentsial'nym uravneniyam* : materialy Mezhdunar. mat. konf. (Minsk, 7–10 Dec. 2015) : in 2 parts. Minsk, 2015. Part 1. P. 28–30 (in Russ.)].

11. *Васьковский М. М.* Существование β-мартингальных решений стохастических эволюционных функциональных уравнений параболического типа с измеримыми локально ограниченными коэффициентами // Дифференц. уравнения. 2012. Т. 48, № 8. С. 1080–1095 [Vas'kovskij M. M. Existence of β-martingale solutions of stochastic evolution functional equations of parabolic tipe with measurable locally bounded coefficients. *Differentsial'nye uravn.* 2012. Vol. 48, No. 8. P. 1080–1095 (in Russ.)].

12. *Васьковский М. М.* Теорема существования решений стохастического волнового уравнения с разрывными неограниченными коэффициентами // Дифференц. уравнения. 2013. Т. 49, № 8. С. 955–962 [Vas'kovskij M. M. Existence theorem for a stochastic wave equation with discontinuous unbounded coefficients. *Differentsial'nye uravn.* 2013. Vol. 49, No. 8. P. 955–962 (in Russ.)].

13. *Леваков А. А., Васьковский М. М.* Существование слабых решений стохастических дифференциальных уравнений со стандартным и дробным броуновскими движениями и с разрывными коэффициентами // Дифференц. уравнения. 2014. Т. 50, № 2. С. 187–200 [Levakov A. A., Vas'kovskij M. M. Existence of weak solutions of stochastic differential equations with standard and fractional Brownian motions and with discontinuous coefficients. *Differentsial'nye uravn.* 2014. Vol. 50, No. 2. P. 187–200 (in Russ.)].

14. *Леваков А. А., Васьковский М. М.* Существование слабых решений стохастических дифференциальных уравнений со стандартным и дробным броуновскими движениями, с разрывными коэффициентами и с частично вырожденным оператором диффузии // Дифференц. уравнения. 2014. Т. 50, № 8. С. 1060–1076 [Levakov A. A., Vas'kovskij M. M. Sushchestvovanie slabykh reshenii stokhasticheskikh differentsial'nykh uravnenii so standartnym i drobnym brounovskimi dvizheniyami, s razryvnymi koeffitsientami i s chastichno vyrozhdennym operatorom diffuzii. *Differentsial'nye uravn.* 2014. Vol. 50, No. 8. P. 1060–1076 (in Russ.)].

15. *Васьковский М. М.* Существование слабых решений стохастических дифференциальных уравнений с запаздыванием со стандартным и дробным броуновскими движениями // Изв. НАН Беларуси. Сер. физ.-матем. наук. 2015. № 1. С. 22–34 [Vas'kovskij M. M. Existence of weak solutions of stochastic delay differential equations driven by standard and fractional Brownian motions. *Izv. NAN Belarusi*. *Ser. fiziko-mat. nauk.* 2015. No. 1. P. 22–34 (in Russ.)].

16. *Леваков А. А., Васьковский М. М.* Существование решений стохастических дифференциальных включений со стандартным и дробным броуновскими движениями // Дифференц. уравнения. 2015. Т. 51, № 8. С. 997–1003 [Levakov A. A., Vas'kovskij M. M. Sushchestvovanie reshenii stokhasticheskikh differentsial'nykh vklyuchenii so standartnym i drobnym brounovskimi dvizheniyami. *Differentsial'nye uravn.* 2015. Vol. 51, No. 8. P. 997–1003 (in Russ.)].

17. *Булатов В. И.* Критерий спектральной приводимости линейных систем с запаздыванием, не разрешенных относительно производной // АМАДЕ-2011 : тез. докл. Междунар. матем. конф. (Минск, 12–17 сент. 2011 г.). Минск, 2011. С. 33 [Bulatov V. I. Kriteri spektralnoj privodimosti linejnykh sistem s zapazdyvaniem, ne razreshennykh otnositel'no proizvodnoj. *AMADE-2011* : tez. dokl. Mezhdunar. mat. konf. (Minsk, 12–17 Sept. 2011). Minsk, 2011. P. 33 (in Russ.)].

18. *Булатов В. И.* Спектральная приводимость систем с запаздыванием, не разрешенных относительно производной // Аналитические методы анализа и дифференциальных уравнений : тр. 6-й Междунар. конф. (Минск, 12–17 сент. 2011 г.). Минск, 2012. С. 33–35 [Bulatov V. I. Spektral'naya privodimost' sistem s zapazdyvaniem, ne razreshennykh otnositel'no proizvodnoj. *Analiticheskie metody analiza i differentsial'nykh uravnenij* : tr. 6 Mezhdunar. konf. (Minsk, 12–17 Sept. 2011). Minsk, 2012. P. 33–35 (in Russ.)].

19. *Булатов В. И.* Критерий спектральной приводимости не разрешенных относительно производной систем управления с кратными запаздываниями // XI Белорусская математическая конференция : тез. докл. междунар. конф. (Минск, 5–9 нояб. 2012 г.) : в 5 ч. Минск, 2012. Ч. 2. С. 100–101 [Bulatov V. I. Kriterij spektral'noj privodimosti ne razreshennykh otnositel'no proizvodnoj sistem upravleniya s kratnymi zapazdyvaniyami. *XI Belorusskaya matematicheskaya konferentsiya* : tez. dokl. mezhdunar. konf. (Minsk, 5–9 Novemb. 2012) : in 5 parts. Minsk, 2012. Part 2. P. 100–101 (in Russ.)].

20. *Булатов В. И.* Об условиях конечности спектра линейных неоднородных систем с запаздыванием, не разрешенных относительно производной // Математическое моделирование и дифференциальные уравнения : тез. докл. 3-й Междунар. науч. конф. (Брест, 17–22 сент. 2012 г.). Брест, 2012. С. 51–52 [Bulatov V. I. Ob usloviyakh konechnosti spektra linejnykh neodnorodnykh sistem s zapazdyvaniem, ne razreshennykh otnositel'no proizvodnoj. *Matematicheskoe modelirovanie i differentsial'nye uravneniya* : tez. dokl. 3 Mezhdunar. nauchn. konf. (Brest, 17–22 Sept. 2012). Brest, 2012. P. 51–52 (in Russ.)].

21. *Булатов В. И.* Условия регуляризируемости общих линейных систем управления, допускающих операторную запись // Динамические системы: устойчивость, управление, оптимизация : тез. докл. XV Междунар. конф. (Минск, 1–5 окт. 2013 г.). Минск, 2013. С. 87–88 [Bulatov V. I. Usloviya regulyariziruemosti obshhikh linejnykh sistem upravleniya, dopuskayushhikh operatornuyu zapis'. *Dinamicheskie sistemy: ustojchivost', upravlenie, optimizatsiya* : tez. dokl. XV Mezhdunar. konf. (Minsk, 1–5 Oct. 2013). Minsk, 2013. P. 87–88 (in Russ.)].

22. *Булатов В. И.* Условия регуляризируемости общих дифференциальных систем управления третьего порядка с двумя входами // Шестые Богдановские чтения по обыкновенным дифференциальным уравнениям : материалы Междунар. матем. конф. (Минск, 7–10 дек. 2015 г.) : в 2 ч. Минск, 2015. Ч. 2. С. 12–13 [Bulatov V. I. Usloviya regulyariziruemosti obshhikh differentsial'nykh sistem upravleniya tret'ego poryadka s dvumya vkhodami. *Shestye Bogdanovskie chteniya po obyknovennym differentsial'nym uravneniyam* : materialy Mezhdunar. mat. konf. (Minsk, 7–10 Dec. 2015) : in 2 parts. Minsk, 2015. Part 2. P. 12–13 (in Russ.)].

23. *Размыслович Г. П., Крахотко В. В.* Управляемость на подпространство одной нерегулярной дифференциально-алгебраической системы со многими запаздываниями по управлению // Еругинские чтения – 2011 : тез. докл. XIV Междунар. науч. конф. по дифференц. уравнениям (Новополоцк, 12–14 мая 2011 г.). Новополоцк, 2011. С. 83–84 [Razmyslovich G. P., Krakhotko V. V. Upravlyaemost' na podprostranstvo odnoi neregulyarnoj differentsial'no-algebraicheskoj sistemy so mnogimi zapazdyvaniyami po upravleniyu. *Eruginskie chteniya – 2011* : tez. dokl. XIV Mezhdunar. nauchn. konf. po differentsial'nym uravn. (Novopolotsk, 12–14 May 2011). Novopolotsk, 2011. P. 83–84 (in Russ.)].

24. *Размыслович Г. П., Крахотко В. В.* К проблеме *H*-управляемости нерегулярных дифференциально-алгебраических систем со многими запаздываниями по управлению // Вестн. БГУ. Сер. 1, Физика. Математика. Информатика. 2012. № 2. С. 143–145 [Razmyslovich G. P., Krakhotko V. V. On a problem of the *H*-controllability nonregular differential-algebraic systems with many delays in control. *Vestnik BGU. Ser. 1, Fiz. Mat. Inform.* 2012. No. 2. P. 143–145 (in Russ.)].

25. *Крахотко В. В., Размыслович Г. П.* Управляемость на подпространство регулярных дифференциально-алгебраических систем с запаздыванием по управлению // АМАДЕ-2011 : тез. докл. Междунар. матем. конф. (Минск, 12–17 сент. 2011 г.). Минск, 2011. С. 85–96 [Krakhotko V. V., Razmyslovich G. P. Upravlyaemost' na podprostranstvo regulyarnykh differentsial'no-algebraicheskikh sistem s zapazdyvaniem po upravleniyu. *AMADE-2011* : tez. dokl. Mezhdunar. mat. konf. (Minsk, 12–17 Sept. 2011). Minsk, 2011. P. 85–96 (in Russ.)].

26. *Крахотко В. В., Размыслович Г. П.* Полная управляемость на подпространство дифференциально-алгебраических систем с распределенным запаздыванием по управлению // Математическое моделирование и дифференциальные уравнения : тез. докл. 3-й Междунар. науч. конф. (Брест, 17–22 сент. 2012 г.). Брест, 2012. С. 31–33 [Krakhotko V. V., Razmyslovich G. P. Polnaya upravlyaemost' na podprostranstvo differentsial'no-algebraicheskikh sistem s raspredelennym zapazdyvaniem po upravleniyu. *Matematicheskoe modelirovanie i differentsial'nye uravneniya* : tez. dokl. 3 Mezhdunar. nauchn. konf. (Brest, 17–22 Sept. 2012). Brest, 2012. P. 31–33 (in Russ.)].

27. *Крахотко В. В., Размыслович Г. П.* Управляемость на подпространство регулярных дифференциально-алгебраических систем со многими запаздываниями // Дифференц. уравнения. 2012. Т. 48, № 7. С. 1060–1062 [Krakhotko V. V., Razmyslovich G. P. Controllability onto a subspace of regular differential-algebraic systems with numerous delays. *Differentsial'nye uravn.* 2012. Vol. 48, No. 7. P. 1060–1062 (in Russ.)].

28. *Крахотко В. В., Размыслович Г. П.* О представлении решения дифференциально-алгебраической системы с распределенным запаздыванием по управлению // Еругинские чтения – 2013 : тез. докл. XV Междунар. науч. конф. по дифференц. уравнениям (Гродно, 13–16 мая 2013 г.) : в 2 ч. Минск, 2013. Ч. 1. С. 81 [Krakhotko V. V., Razmyslovich G. P. O predstavlenii resheniya differentsial'no-algebraicheskoj sistemy s raspredelennym zapazdyvaniem po upravleniyu. *Eruginskie chteniya – 2013* : tez. dokl. XV Mezhdunar. nauchn. konf. po differentsial'nym uravn. (Grodno, 13–16 May 2013) : in 2 parts. Minsk, 2013. Part 1. P. 81 (in Russ.)].

29. *Крахотко В. В., Размыслович Г. П. H*-управляемость регулярных дифференциально-алгебраических систем с распределенным запаздыванием по управлению // Изв. Ин-та математики и информатики УдГУ. 2012. Вып. 1 (39). С. 71–72 [Krakhotko V. V., Razmyslovich G. P. *H*-controllability of regular differential-algebraic systems with a distributed in control. *Izv. Inst. mat. i inform. Udmurt. gos. univ.* 2012. Vol. 1 (39). P. 71–72 (in Russ.)].

30. *Размыслович Г. П., Крахотко В. В.* Управляемость регулярных дифференциально-алгебраических систем с распределенным запаздыванием по управлению // Вестн. БГУ. Сер. 1, Физика, Математика, Информатика. 2014. № 1. С. 114–116 [Razmyslovich G. P., Krakhotko V. V. Controllability of the regular differential-algebraic systems with a distributed delay in the control. *Vestnik BGU. Ser. 1, Fiz. Mat. Inform.* 2014. No. 1. P. 114–116 (in Russ.)].

31. *Булатов В. И.* Критерий регуляризируемости линейной связью по выходу систем управления с запаздыванием с одним входом // Еругинские чтения – 2013 : тез. докл. XV Междунар. науч. конф. по дифференц. уравнениям (Гродно, 13–16 мая 2013 г.) : в 2 ч. Гродно, 2013. Ч. 1. С. 74 [Bulatov V. I. Kriterij regulyariziruemosti linejnoj svyaz'yu po vykhodu sistem upravleniya s zapazdyvaniem s odnim vkhodom. *Eruginskie chteniya – 2013* : tez. dokl. XV Mezhdunar. nauchn. konf. po differentsial'nym uravn. (Grodno, 13–16 May 2013) : in 2 parts. Grodno, 2013. Part 1. P. 74 (in Russ.)].

32. *Булатов В. И.* О некоторых условиях регуляризируемости общих линейных стационарных систем управления, допускающих операторную запись // Еругинские чтения – 2014 : тез. докл. XVI Междунар. науч. конф. по дифференц. уравнениям (Новополоцк, 20–22 мая 2014 г.) : в 2 ч. Новополоцк, 2014. Ч. 2. С. 89–90 [Bulatov V. I. O nekotorykh usloviyakh regulyariziruemosti obshhikh linejnykh statsionarnykh sistem upravleniya, dopuskayushhikh operatornuyu zapis'. *Eruginskie chteniya – 2014* : tez. dokl. XVI Mezhdunar. nauchn. konf. po differentsial'nym uravn. (Novopolotsk, 20–22 May 2014) : in 2 parts. Novopolotsk, 2014. Part 2. P. 89–90 (in Russ.)].

33. *Васьковский М. М.* О решениях стохастических гиперболических уравнений с измеримыми локально ограниченными коэффициентами // Вестн. БГУ. Сер. 1, Физика. Математика. Информатика. 2012. № 2. С. 115–121 [Vas'kovskii M. M. On solutions of stochastic hyperbolic delay equations with measurable locally bounded coefficients. *Vestnik BGU*. Ser. *1, Fiz. Mat. Inform.* 2012. No. 2. P. 115–121 (in Russ.)].

34. *Васьковский М. М.* Существование мартингальных решений абстрактных стохастических дифференциальных уравнений с разрывными локально ограниченными коэффициентами // Дифференц. уравнения. 2014. Т. 50, № 11. С. 1435–1440 [Vas'kovskij M. M. Sushhestvovanie martingal'nykh reshenij abstraktnykh stokhasticheskikh differentsial'nykh uravnenij s razryvnymi lokal'no-ogranichennymi koehffitsientami. *Differentsial'nye uravn.* 2014. Vol. 50, No. 11. P. 1435–1440 (in Russ.)].

35. *Васьковский М. М.* Существование мартингальных решений абстрактных стохастических дифференциальных уравнений с разрывными неограниченными правыми частями // XI Белорусская математическая конференция : тез. докл. Междунар. науч. конф. (Минск, 4–9 нояб. 2012 г.) : в 5 ч. Минск, 2012. Ч. 2. С. 15–16 [Vas'kovskij M. M. Sushhestvovanie martingal'nykh reshenij abstraktnykh stokhasticheskikh differentsial'nykh uravnenij s razryvnymi neogranichennymi pravymi chastyami. *XI Belorusskaya matematicheskaya konferentsiya* : tez. dokl. Mezhdunar. nauchn. konf. (Minsk, 4–9 Novemb. 2012) : in 5 parts. Minsk, 2012. Part 2. P. 15–16 (in Russ.)].

36. *Васьковский М. М.* Устойчивость и притяжение решений нелинейных стохастических дифференциальных уравнений со стандартным и дробным броуновским движением // Шестые Богдановские чтения по обыкновенным дифференциальным уравнениям : материалы Междунар. матем. конф. (Минск, 7–10 дек. 2015 г.) : в 2 ч. Минск, 2015. Ч. 2. С. 41–42 [Vas'kovskij M. M. Ustojchivost' i prityazhenie reshenij nelinejnykh stokhasticheskikh differentsial'nykh uravnenij so standartnym i drobnym brounovskim dvizheniem. *Shestye Bogdanovskie chteniya po obyknovennym differentsial'nym uravneniyam* : materialy Mezhdunar. matem. konf. (Minsk, 7–10 Dec. 2015) : in 2 parts. Minsk, 2015. Part 2. P. 41–42 (in Russ.)].

37. *Васьковский М. М., Задворный Я. Б.* О непрерывной зависимости решений стохастического волнового уравнения от начальных данных // АМАДЕ-2011 : тез. докл. междунар. конф. (Минск, 12–19 сент. 2011 г.). Минск, 2011. С. 38 [Vas'kovskij M. M., Zadvornyj Ya. B. O nepreryvnoj zavisimosti reshenij stokhasticheskogo volnovogo uravneniya ot nachal'nykh dannykh. *AMADE-2011* : tez. dokl. mezhdunar. konf. (Minsk, 12–19 Sept. 2011). Minsk, 2011. P. 38 (in Russ.)].

38. *Игнатенко В. В., Крахотко В. В., Размыслович Г. П.* К проблеме наблюдаемости непрерывных дифференциально-алгебраических систем // Автоматический контроль и автоматизация производственных процессов : материалы Междунар. науч.-техн. конф. (Минск, 17–18 мая 2012 г.). Минск, 2012. С. 262–263 [Ignatenko V. V., Krakhotko V. V., Razmyslovich G. P. K probleme nablyudaemosti nepreryvnykh differentsial'no-algebraicheskikh sistem. *Avtomaticheskij kontrol' i avtomatizatsiya proizvodstvennykh protsessov* : materialy Mezhdunar. nauchn.-tekh. konf. (Minsk, 17–18 May 2012). Minsk, 2012. P. 262–263 (in Russ.)].

39. *Игнатенко В. В., Крахотко В. В., Размыслович Г. П.* Управляемость дескрипторных линейных дискретных систем // Динамические системы: устойчивость, управление, оптимизация : тез. докл. XV Междунар. конф. (Минск, 1–5 окт. 2013 г.). Минск, 2013. С. 135–136 [Ignatenko V. V., Krakhotko V. V., Razmyslovich G. P. Upravlyaemost' deskriptornykh linejnykh diskretnykh sistem. *Dinamicheskie sistemy: ustojchivost', upravlenie, optimizatsiya* : tez. dokl. XV Mezhdunar. konf. (Minsk, 1–5 Oct. 2013). Minsk, 2013. P. 135–136 (in Russ.)].

40. *Крахотко В. В., Размыслович Г. П.* Задачи управляемости и наблюдаемости дискретных систем // Еругинские чтения – 2014 : тез. докл. XVI Междунар. науч. конф. (Новополоцк, 20–22 мая 2014 г.) : в 2 ч. Новополоцк, 2014. Ч. 1. С. 94–95 [Krakhotko V. V., Razmyslovich G. P. Zadachi upravlyaemosti i nablyudaemosti diskretnykh sistem. *Eruginskie chteniya – 2014* : tez. dokl. XVI Mezhdunar. nauchn. konf. (Novopolotsk, 20–22 May 2014) : in 2 parts. Novopolotsk, 2014. Part 1. P. 94–95 (in Russ.)].

41. *Крахотко В. В., Размыслович Г. П.* Алгоритм проверки критериев управляемости линейных стационарных систем // Информационные системы и технологии (CSIST'2013) : материалы Междунар. конгресса по информатике (Минск, 4–7 нояб. 2013 г.). Минск, 2013. С. 546–548 [Krakhotko V. V., Razmyslovich G. P. Algoritm proverki kriteriev upravlyaemosti linejnykh statsionarnykh sistem. *Informatsionnye sistemy i tekhnologii* (*CSIST'2013*) : materialy Mezhdunar. kongressa po informatike (Minsk, 4–7 Novemb. 2013). Minsk, 2013. P. 546–548 (in Russ.)].

42. *Крахотко В. В., Размыслович Г. П.* К управляемости дескрипторных дискретных линейных динамических систем // Теория управления и математическое моделирование : материалы Всерос. конф. с междунар. участием (Ижевск, 8–12 июня 2015 г.). Ижевск, 2015. С. 173–175 [Krakhotko V. V., Razmyslovich G. P. K upravlyaemosti deskriptornykh diskretnykh linejnykh dinamicheskikh sistem. *Teoriya upravleniya i matematicheskoe modelirovanie* : materialy Vseross. konf. s mezhdunar. uchastiem (Izhevsk, 8–12 June 2015). Izhevsk, 2015. P. 173–175 (in Russ.)].

43. *Крахотко В. В., Размыслович Г. П.* Некоторые задачи наблюдаемости дискретных динамических систем // XI Белорусская математическая конференция : тез. докл. междунар. конф. (Минск, 5–9 нояб. 2012 г.) : в 5 ч. Минск, 2015. Ч. 2. С. 114–115 [Krakhotko V. V., Razmyslovich G. P. Nekotorye zadachi nablyudaemosti diskretnykh dinamicheskikh sistem. *XI Belorusskaya matematicheskaya konferentsiya* : tez. dokl. mezhdunar. konf. (Minsk, 5–9 Novemb. 2012) : in 5 parts. Minsk, 2015. Part 2. P. 114–115 (in Russ.)].

44. *Крахотко В. В., Размыслович Г. П., Игнатенко В. В.* Управляемость линейных дискретных дескрипторных систем с чистым запаздыванием по состоянию // Шестые Богдановские чтения по обыкновенным дифференциальным уравнениям : материалы Междунар. матем. конф. (Минск, 7–10 дек. 2015 г.). Минск, 2015. Т. 2. С. 25–27 [Krakhotko V. V., Razmyslovich G. P., Ignatenko V. V. Upravlyaemost' linejnykh diskretnykh deskriptornykh sistem s chistym zapazdyvaniem po sostoyaniyu. *Shestye Bogdanovskie chteniya po obyknovennym differentsial'nym uravneniyam* : materialy Mezhdunar. mat. konf. (Minsk, 7–10 Dec. 2015). Minsk, 2015. Vol. 2. P. 25–27 (in Russ.)].

45. *Крахотко В. В., Размыслович Г. П., Игнатенко В. В.* К управляемости дифференциально-алгебраических систем с чистым запаздыванием по состоянию // Физико-математические науки : тез. докл. 79-й науч.-техн. конф. профессорско-преподавательского состава, научных сотрудников и аспирантов, БГТУ (Минск, 2–6 февр. 2015 г.). Минск, 2015. С. 32 [Krakhotko V. V., Razmyslovich G. P., Ignatenko V. V. K upravlyaemosti differentsial'no-algebraicheskikh sistem s chistym zapazdyvaniem po sostoyaniyu. *Fiziko-matematicheskie nauki* : tez. dokl. 79 nauchn.-tekh. konf. professorsko-prepodavatel'skogo sostava, nauchn. sotrudnikov i aspirantov, BGTU (Minsk, 2–6 Febr. 2015). Minsk, 2015. P. 32 (in Russ.)].

46. *Леваков А. А., Задворный Я. Б.* Устойчивые, притягивающие множества и аттракторы полудинамических систем в нелокально компактных метрических пространствах // Дифференц. уравнения. 2015. Т. 51, № 7. С. 851–860 [Levakov A. A., Zadvornyj Ya. B. Stable sets, attracting sets, and attractors of semidynamical systems in nonlocally compact metric spaces. *Differentsial'nye uravn.* 2015. Vol. 51, No. 7. P. 851–860 (in Russ.)].

47. *Леваков А. А.* Исследование устойчивости стохастических дифференциальных уравнений с помощью знакопостоянных функций Ляпунова // Дифференц. уравнения. 2011. Т. 47, № 9. С. 1258–1267 [Levakov A. A. Analysis of stochastic differential inclusions with the use of Lyapunov functions of constant sign. *Differentsial'nye uravn.* 2011. Vol. 47, No. 9. P. 1258–1267 (in Russ.)].

48. *Леваков А. А.* Метод функций Ляпунова для стохастических дифференциальных включений // Шестые Богдановские чтения по обыкновенным дифференциальным уравнениям : материалы Междунар. матем. конф. (Минск, 7–10 дек. 2015 г.) : в 2 ч. Минск, 2015. Ч. 2. С. 52–54 [Levakov A. A. Metod funktsij Lyapunova dlya stokhasticheskikh differentsial'nykh vklyuchenij. *Shestye Bogdanovskie chteniya po obyknovennym differentsial'nym uravneniyam* : materialy Mezhdunar. mat. konf. (Minsk, 7–10 Dec. 2015) : in 2 parts. Minsk, 2015. Part 2. P. 52–54 (in Russ.)].

49. *Леваков А. А., Васьковский М. М.* Существование и единственность решений стохастических дифференциальных уравнений со стандартным и дробным броуновским движением // Еругинские чтения – 2014 : тез. докл. XVI Междунар. науч. конф. (Новополоцк, 20–22 мая 2014 г.) : в 2 ч. Новополоцк, 2014. Ч. 2. С. 38–39 [Levakov A. A., Vas'kovskij M. M. Sushhestvovanie i edinstvennost' reshenij stokhasticheskikh differentsial'nykh uravnenij so standartnym i drobnym brounovskim dvizheniem. *Eruginskie chteniya – 2014* : tez. dokl. XVI Mezhdunar. nauchn. konf. (Novopolotsk, 20–22 May 2014) : in 2 parts. Novopolotsk, 2014. Part 2. P. 38–39 (in Russ.)].

50. *Леваков А. А., Васьковский М. М.* Теорема существования слабых решений стохастических дифференциальных уравнений с дробным броуновским движением и с разрывным коэффициентом сноса // XI Белорусская математическая конференция : тез. докл. Междунар. науч. конф. (Минск, 4–9 нояб. 2012 г.) : в 5 ч. Минск, 2012. Ч. 2. С. 39–40 [Levakov A. A., Vas'kovskij M. M. Teorema sushhestvovaniya slabykh reshenij stokhasticheskikh differentsial'nykh uravnenij s drobnym brounovskim dvizheniem i s razryvnym koehffitsientom snosa. *XI Belorusskaya matematicheskaya konferentsiya* : tez. dokl. Mezhdunar. nauchn. konf. (Minsk, 4–9 Novemb. 2012) : in 5 parts. Minsk, 2012. Part 2. P. 39–40 (in Russ.)].

51. *Леваков А. А., Васьковский М. М., Задворный Я. Б.* Структура окрестностей слабо притягивающих множеств G-систем // XI Белорусская математическая конференция : тез. докл. Междунар. науч. конф. (Минск, 4–9 нояб. 2012 г.) : в 5 ч. Минск, 2012. Ч. 2. С. 40–41 [Levakov A. A., Vas'kovskij M. M., Zadvornyj Ya. B. Struktura okrestnostej slabo prityagivayushhikh mnozhestv G-sistem. *XI Belorusskaya matematicheskaya konferentsiya* : tez. dokl. Mezhdunar. nauchn. konf. (Minsk, 4–9 Novemb. 2012) : in 5 parts. Minsk, 2012. Part 2. P. 40–41 (in Russ.)].

52. *Леваков А. А., Задворный Я. Б.* Теорема существования поглощающего множества и аттрактора L-системы // Еругинские чтения – 2014 : тез. докл. XVI Междунар. науч. конф. (Новополоцк, 20–22 мая 2014 г.) : в 2 ч. Новополоцк, 2014. Ч. 1. С. 65–66 [Levakov A. A., Zadvornyj Ya. B. Teorema sushhestvovaniya pogloshhayushhego mnozhestva i attraktora L-sistemy. *Eruginskie chteniya – 2014* : tez. dokl. XVI Mezhdunar. nauchn. konf. (Novopolotsk, 20–22 May 2014) : in 2 parts. Novopolotsk, 2014. Part 1. P. 65–66 (in Russ.)].

53. *Солоневич П. А., Васьковский М. М.* Теорема существования решений стохастических гиперболических уравнений с разрывными неограниченными коэффициентами // Еругинские чтения – 2011 : тез. докл. XIV Междунар. науч. конф. по дифференц. уравнениям (Новополоцк, 12–14 мая 2011 г.). Новополоцк, 2011. С. 157–158 [Solonevich P. A., Vas'kovskij M. M. Teorema sushhestvovaniya reshenij stokhasticheskikh giperbolicheskikh uravnenij s razryvnymi neogranichennymi koeffitsientami. *Eruginskie chteniya – 2011* : tez. dokl. XIV Mezhdunar. nauchn. konf. po differentsial'nym uravn. (Novopolotsk, 12–14 May 2011). Novopolotsk, 2011. P. 157–158 (in Russ.)].

54. *Izobov N. A., Mazanik S. A.* On Limit Irreducibility Sets of Linear Differential Systems // QUALITDE-2015 : Int. Workshop on the Qualitative Theory of Differ. Equ. (Tbilisi, 27–29 Dec. 2015). Tbilisi, 2015. P. 62–63. URL: /http://rmi.tsu.ge/eng/QUALITDE-2015_workshop2015.pdf (date of access: 15.04.2016) [Izobov N. A., Mazanik S. A. On Limit Irreducibility Sets of Linear Differential Systems. *QUALITDE-2015* : Int. Workshop on the Qualitative Theory of Differ. Equ. (Tbilisi, 27–29 Dec. 2015). Tbilisi, 2015. P. 62–63. URL: /http://rmi.tsu.ge/eng/QUALITDE-2015_workshop2015.pdf (date of access: 15.04.2016) (in Engl.)].

55. *Levakov A., Vaskovskii M.* Existence and uniqueness of solutions of stochastic differential equations driven by standard and fractional motions // QUALITDE-2014 : Int. Workshop on the Qualitative Theory of Differ. Equ. (Tbilisi, 18–20 Dec. 2014). Tbilisi, 2014 [Levakov A., Vaskovskii M. Existence and uniqueness of solutions of stochastic differential equations driven by standard and fractional motions. *QUALITDE-2014* : Int. Workshop on the Qualitative Theory of Differ. Equ. (Tbilisi, 18–20 Dec. 2014). Tbilisi, 2014 (in Engl.)].

56. *Vas'kovskii M., Solonevich P., Zadvorny Ya.* Dependence of β-martingale solutions of stochastic evolution functional equations on the initial data // ASMDA-2011 : proc. of the XIV Int. konf. on applied stochastic models and data analysis (Rome, 7–10 June 2011). Rome, 2011 [Vas'kovskii M., Solonevich P., Zadvorny Ya. Dependence of β-martingale solutions of stochastic evolution functional equations on the initial data. *ASMDA-2011* : proc. of the XIV Int. konf. on applied stochastic models and data analysis (Rome, 7–10 June 2011). Rome, 2011 (in Engl.)].

57. *Vaskouski M., Kastsevich K.* New signs of isosceles triangles // Int. J. Geometry. 2013. Vol. 2, № 2. P. 56–67 [Vaskouski M., Kastsevich K. New signs of isosceles triangles. *Int. J. Geometry*. 2013. Vol. 2, No. 2. P. 56–67 (in Engl.)].

58. *Vaskovskii M.* Existence of weak solutions of delay stochastic differential equations driven by infinite-dimensional brownian motion // SMTDA-2012 : proc. of the Int. Conf. on Stochastic Modeling Techniques and Data Analysis (Chania Crete, 5–8 June 2012). Greece, 2012 [Vaskovskii M. Existence of weak solutions of delay stochastic differential equations driven by infinite-dimensional brownian motion. *SMTDA-2012* : proc. of the Int. Conf. on Stochastic Modeling Techniques and Data Analysis (Chania Crete, 5–8 June 2012). Greece, 2012 (in Engl.)].

Статья поступила в редколлегию 28.04.2016.
Received by editorial board 28.04.2016.