

УРАВНЕНИЯ ДВИЖЕНИЯ СИСТЕМЫ ТОЧЕЧНЫХ ЗАРЯДОВ С ТОЧНОСТЬЮ ДО ЧЛЕНОВ ПОРЯДКА v^3/c^3

А. Н. ФУРС¹⁾

¹⁾Белорусский государственный университет, пр. Независимости, 4, 220030, г. Минск, Республика Беларусь

Выведены уравнения движения системы точечных зарядов с точностью до членов порядка v^3/c^3 , при этом ускорения зарядов выражены через их текущие положения и скорости. Эти уравнения содержат члены как отвечающие кулоновскому взаимодействию, так и описывающие изменение импульса электромагнитного поля и радиационные потери. Отдельно рассмотрены уравнения баланса импульса зарядов и создаваемого ими электромагнитного поля. Полученные общие соотношения применены для описания рассеяния точечных заряженных частиц с учетом радиационного трения. Численно оценено полное сечение захвата частиц с одинаковыми массами и противоположными по знаку зарядами.

Ключевые слова: электромагнитное взаимодействие точечных зарядов; уравнения движения; импульс электромагнитного поля; рассеяние заряженных частиц.

EQUATIONS OF MOTION OF A POINT CHARGE SYSTEM WITH ACCURACY OF THE v^3/c^3 ORDER TERMS

A. N. FURS^a

^aBelarusian State University, Nezavisimosti avenue, 4, 220030, Minsk, Republic of Belarus

Equations of motion of a system of point charges are derived with accuracy of the v^3/c^3 order terms. The accelerations of the point charges are expressed in terms of their current positions and velocities. The equations include both the Coulomb terms and the terms corresponding to a change of the electromagnetic field momentum and radiation losses. The momentum balance equations of the charges and their electromagnetic field are separately discussed. The general relations obtained are applied to describe scattering of point charged particles with account to radiation friction. The total trapping cross section of the particles with the same masses and charges opposite in sign is numerically evaluated.

Key words: electromagnetic interaction of point charges; equations of motion; electromagnetic field momentum; scattering of charged particles.

Известно, что система точечных зарядов со скоростями v , малыми по сравнению со скоростью света в вакууме c , может быть описана функцией Лагранжа только с точностью до членов порядка v^2/c^2 (приближение Дарвина [1, 2]). Это связано с тем, что поле излучения движущихся зарядов, обладающее собственными степенями свободы, появляется уже в третьем приближении по v/c . Лишь в особых случаях при отсутствии дипольного излучения здесь существует функция Лагранжа с точностью до членов порядка v^4/c^4 [3]. Изложенное выше, однако, не означает, что для системы N точечных зарядов нельзя составить уравнения движения в любых высших порядках v/c . Они могут быть формально представлены как

$$m_i \mathbf{a}_i = \mathbf{f}_i(\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_N; \mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_N), \quad (1)$$

Образец цитирования:

Фурс А. Н. Уравнения движения системы точечных зарядов с точностью до членов порядка v^3/c^3 // Вестн. БГУ. Сер. 1, Физика. Математика. Информатика. 2016. № 3. С. 43–50.

For citation:

Furs A. N. Equations of motion of a point charge system with accuracy of the v^3/c^3 order terms. *Vestnik BGU. Ser. 1, Fiz. Mat. Inform.* 2016. No. 3. P. 43–50 (in Russ.).

Автор:

Александр Николаевич Фурс – доктор физико-математических наук, доцент, профессор кафедры теоретической физики и астрофизики физического факультета.

Author:

Alexander Furs, doctor of science (physics and mathematics), docent, professor at the department of theoretical physics and astrophysics, faculty of physics.
fursan@bsu.by

где векторные функции $\mathbf{f}_i$ положений $\mathbf{r}_j$ и скоростей $\mathbf{v}_j$ зарядов записываются в виде разложений по степеням c^{-1} . В настоящей работе такие уравнения получены для разложений функций $\mathbf{f}_i$ до членов третьего порядка включительно. Они могут быть использованы для численного моделирования движения точечных зарядов (в пренебрежении квантовыми эффектами), к примеру, при изучении рассеяния заряженных частиц. С уравнениями движения тесно связан также обсуждаемый далее вопрос о балансе суммарного импульса точечных зарядов и импульса создаваемого ими электромагнитного поля.

Силы, действующие на точечные заряды

Для нахождения сил, действующих на каждый из N зарядов, сначала рассчитаем электромагнитное поле, создаваемое зарядом q , находящимся в момент времени t в положении $\mathbf{r}(t)$. Плотность точечного заряда и плотность его тока определяются выражениями:

$$\rho(\mathbf{x}, t) = q\delta(\mathbf{x} - \mathbf{r}(t)); \quad \mathbf{j}(\mathbf{x}, t) = q\mathbf{v}(t)\delta(\mathbf{x} - \mathbf{r}(t)), \quad (2)$$

где $\mathbf{x}$ – радиус-вектор точки наблюдения; $\mathbf{v} = d\mathbf{r}/dt$ – скорость заряда; $\delta(\mathbf{x} - \mathbf{r}(t))$ – дельта-функция. Запаздывающие потенциалы имеют вид [1]

$$\varphi(\mathbf{x}, t) = \int d^3\mathbf{x}' \frac{\rho(\mathbf{x}', t - R/c)}{R}; \quad \mathbf{A}(\mathbf{x}, t) = \frac{1}{c} \int d^3\mathbf{x}' \frac{\mathbf{j}(\mathbf{x}', t - R/c)}{R},$$

где $R = |\mathbf{x} - \mathbf{x}'|$; их разложения в ряды по степеням R/c

$$\begin{aligned} \varphi &= \int d^3\mathbf{x}' \frac{\rho}{R} - \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \int d^3\mathbf{x}' \rho R + \frac{1}{2c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \int d^3\mathbf{x}' \rho R^2 - \frac{1}{6c^3} \frac{\partial^3}{\partial t^3} \int d^3\mathbf{x}' \rho R^3 + O(c^{-4}); \\ \mathbf{A} &= \frac{1}{c} \int d^3\mathbf{x}' \frac{\mathbf{j}}{R} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial}{\partial t} \int d^3\mathbf{x}' \mathbf{j} R + O(c^{-3}). \end{aligned}$$

Подставляя сюда (2), получаем

$$\varphi = q \left(\frac{1}{R} + \frac{1}{2c^2} \frac{\partial^2 R}{\partial t^2} - \frac{1}{6c^3} \frac{\partial^3 R^2}{\partial t^3} \right) + O(c^{-4}); \quad \mathbf{A} = q \left(\frac{\mathbf{v}}{cR} - \frac{\mathbf{a}}{c^2} \right) + O(c^{-3}), \quad (3)$$

где теперь $R = |\mathbf{x} - \mathbf{r}(t)|$ – расстояние от заряда до точки наблюдения; $\mathbf{a}$ – ускорение заряда.

Электрическое и магнитное поля заряда находятся по формулам:

$$\mathbf{E} = -\nabla\varphi - \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}; \quad \mathbf{B} = [\nabla \mathbf{A}], \quad (4)$$

где квадратные скобки обозначают векторное произведение. Подставляем уравнения (3) в (4) и при этом учитываем, что $\nabla R = \mathbf{R}/R$, где $\mathbf{R} = \mathbf{x} - \mathbf{r}(t)$:

$$\begin{aligned} \mathbf{E} &= q \left[\frac{\mathbf{R}}{R^3} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\mathbf{R}}{R} \right) + \frac{\mathbf{v}}{R} \right) + \frac{1}{3c^3} \frac{\partial^3 \mathbf{R}}{\partial t^3} + \frac{1}{c^3} \frac{\partial \mathbf{a}}{\partial t} \right] + O(c^{-4}); \\ \mathbf{B} &= \frac{q}{c} \frac{[\mathbf{v}\mathbf{R}]}{R^3} + O(c^{-3}). \end{aligned} \quad (5)$$

Затем принимаем во внимание то, что $\partial \mathbf{R} / \partial t = -d\mathbf{r}/dt = -\mathbf{v}$. Кроме того, дифференцируя по времени обе части соотношения $R^2 = \mathbf{R}^2$, имеем $\partial R / \partial t = -\mathbf{v}\mathbf{R}/R$. Тогда

$$\frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\mathbf{R}}{R} \right) + \frac{\mathbf{v}}{R} = \frac{\mathbf{v}}{2R} + \frac{(\mathbf{v}\mathbf{R})\mathbf{R}}{2R^3}.$$

Выполнив до конца дифференцирования по t в (5), окончательно получаем

$$\mathbf{E} = q \left[\frac{\mathbf{R}}{R^3} + \frac{1}{c^2} \left(\frac{v^2 \mathbf{R}}{2R^3} - \frac{3(\mathbf{vR})^2 \mathbf{R}}{2R^5} - \frac{\mathbf{a}}{2R} - \frac{(\mathbf{aR})\mathbf{R}}{2R^3} \right) + \frac{2}{3c^3} \mathbf{J} \right] + O(c^{-4}); \quad (6)$$

$$\mathbf{B} = \frac{q}{c} \frac{[\mathbf{vR}]}{R^3} + O(c^{-3}),$$

где введена производная ускорения $\mathbf{J} = d\mathbf{a}/dt$ (называемая рывком).

На точечный заряд q_i ($i = 1, 2, \dots, N$) со стороны других зарядов действует сила

$$\mathbf{F}_i = q_i \left(\mathbf{E} + \frac{1}{c} [\mathbf{v}_i \mathbf{B}] \right), \quad (7)$$

причем $\mathbf{E}$ и $\mathbf{B}$ представляют результирующие электрическое и магнитное поля $N-1$ зарядов, исключая заряд q_i . В силу уравнений (6) и (7) получаем

$$\begin{aligned} \mathbf{F}_i = \sum_{j(j \neq i)} q_i q_j \left[\frac{\mathbf{r}_{ij}}{r_{ij}^3} + \frac{1}{c^2} \left(\frac{v_j^2 \mathbf{r}_{ij}}{2r_{ij}^3} - \frac{3(\mathbf{v}_j \mathbf{r}_{ij})^2 \mathbf{r}_{ij}}{2r_{ij}^5} - \frac{\mathbf{a}_j}{2r_{ij}} - \frac{(\mathbf{a}_j \mathbf{r}_{ij}) \mathbf{r}_{ij}}{2r_{ij}^3} + \right. \right. \\ \left. \left. + \frac{[\mathbf{v}_j [\mathbf{v}_j \mathbf{r}_{ij}]]}{r_{ij}^3} \right) + \frac{2\mathbf{J}_j}{3c^3} \right] + O(c^{-4}), \end{aligned} \quad (8)$$

где $\mathbf{r}_{ij} = \mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j$ – вектор, направленный от j -го заряда к i -му ($\mathbf{r}_{ij} = -\mathbf{r}_{ji}$); $r_{ij} = |\mathbf{r}_{ij}|$ – расстояние между i -м и j -м зарядами.

Сумма всех сил $\mathbf{F}_i$ (8) оказывается ненулевой:

$$\mathbf{F} = \sum_i \mathbf{F}_i = \mathbf{F}^{(2)} + \mathbf{F}^{(3)} + O(c^{-4}) \neq 0. \quad (9)$$

В (9) выделены части суммарной силы $\mathbf{F}$, содержащие c^{-2} и c^{-3} :

$$\mathbf{F}^{(2)} = \frac{1}{2c^2} \sum_{i, j(i \neq j)} q_i q_j \left(\frac{v_j^2 \mathbf{r}_{ij}}{r_{ij}^3} - 3 \frac{(\mathbf{v}_j \mathbf{r}_{ij})^2 \mathbf{r}_{ij}}{r_{ij}^5} - \frac{\mathbf{a}_j}{r_{ij}} - \frac{(\mathbf{a}_j \mathbf{r}_{ij}) \mathbf{r}_{ij}}{r_{ij}^3} + \frac{[[\mathbf{v}_j \mathbf{v}_j] \mathbf{r}_{ij}]]}{r_{ij}^3} \right); \quad (10)$$

$$\mathbf{F}^{(3)} = \frac{2}{3c^3} \sum_{i, j(i \neq j)} q_i q_j \mathbf{J}_j. \quad (11)$$

Неравенство $\mathbf{F} \neq 0$ возникает потому, что третий закон Ньютона для любой пары зарядов q_i и q_j выполняется лишь в ведущей (кулоновской) части $q_i q_j \mathbf{r}_{ij}/r_{ij}^3$ взаимодействия зарядов. Другими словами, суммарный импульс системы зарядов не сохраняется. Данный факт хорошо известен и объясняется тем, что, кроме импульса зарядов, требуется также учитывать импульс электромагнитного поля, ими создаваемого [1, 4]. Для корректного составления уравнений движения зарядов рассмотрим далее вклад электромагнитного поля в общий импульс системы.

Импульс электромагнитного поля системы зарядов

Баланс суммарного импульса точечных зарядов $\mathbf{p}_m^*$ и импульса электромагнитного поля $\mathbf{p}_f^*$ определяется следующими уравнениями:

$$\frac{d}{dt} (\mathbf{p}_m^* + \mathbf{p}_f^*) = \oint_S dS \boldsymbol{\sigma}; \quad \mathbf{p}_m^* = \sum_i \mathbf{p}_i^*, \quad (12)$$

где $\mathbf{p}_i^*$ – импульс i -го заряда; $\boldsymbol{\sigma}$ – максвелловский тензор натяжений. Правая часть первого из соотношений (12) представляет (со знаком «минус») поток импульса электромагнитного поля через бесконечно удаленную замкнутую поверхность S , окружающую заряды, и является ненулевой при наличии излучения, уносящего импульс. При отсутствии излучения суммарный импульс зарядов и электромагнитного поля сохраняется.

Импульс электромагнитного поля, расчет которого производится далее, определяется формулой

$$\mathbf{p}_f^* = \frac{1}{4\pi c} \int d^3 \mathbf{x} [\mathbf{E} \mathbf{B}], \quad (13)$$

где $\mathbf{E}$ и $\mathbf{B}$ – результирующие электрическое и магнитное поля N зарядов, а интегрирование в (13) проводится по всему трехмерному пространству. Для обеспечения требуемой точности достаточно подставить в соотношение (13) первые члены разложений (6):

$$\mathbf{p}_f^* = \frac{1}{4\pi c^2} \left(\sum_i q_i^2 \int d^3 \mathbf{x} \frac{[\mathbf{R}_i [\mathbf{v}_i \mathbf{R}_i]]}{R_i^6} + \sum_{i, j (i \neq j)} q_i q_j \int d^3 \mathbf{x} \frac{[\mathbf{R}_i [\mathbf{v}_j \mathbf{R}_j]]}{R_i^3 R_j^3} \right) + O(c^{-4}), \quad (14)$$

где $\mathbf{R}_i = \mathbf{x} - \mathbf{r}_i$ и $R_i = |\mathbf{R}_i|$. Далее, для того чтобы найти первый из интегралов в уравнении (14), учтем, что его векторная часть коллинеарна скорости $\mathbf{v}_i$, и воспользуемся сферическими координатами с углом θ , отсчитываемым от направления $\mathbf{v}_i$:

$$\int d^3 \mathbf{x} \frac{[\mathbf{R}_i [\mathbf{v}_i \mathbf{R}_i]]}{R_i^6} = \int \frac{d^3 \mathbf{R}}{R^6} (R^2 \mathbf{v}_i - (\mathbf{v}_i \mathbf{R}) \mathbf{R}) = \mathbf{v}_i \int \frac{d^3 \mathbf{R}}{R^6} \left(R^2 - \frac{(\mathbf{v}_i \mathbf{R})^2}{v_i^2} \right) = \frac{8\pi \mathbf{v}_i}{3} \lim_{a \rightarrow 0} \frac{1}{a}.$$

Таким образом, интеграл является расходящимся, а выражение для $\mathbf{p}_f^*$ содержит бесконечно большие слагаемые (что является следствием допущения о том, что заряды точечные). Включаем эти слагаемые в импульсы $\mathbf{p}_i^*$ «голых» зарядов:

$$\mathbf{p}_i = \mathbf{p}_i^* + \frac{2q_i^2 \mathbf{v}_i}{3c^2} \lim_{a \rightarrow 0} \frac{1}{a},$$

считая импульсы «одетых» зарядов $\mathbf{p}_i$ конечными и равными их наблюдаемым значениям $m_i \mathbf{v}_i / \sqrt{1 - v_i^2/c^2}$ (так называемая процедура перенормировки масс). В результате выражения (12) и (14) принимают вид

$$\frac{d}{dt} (\mathbf{p}_m + \mathbf{p}_f) = \oint_S d\mathbf{S} \boldsymbol{\sigma}; \quad \mathbf{p}_m = \sum_i \mathbf{p}_i; \quad \mathbf{p}_f = \frac{1}{4\pi c^2} \sum_{i, j (i \neq j)} q_i q_j \int d^3 \mathbf{x} \frac{[\mathbf{R}_i [\mathbf{v}_j \mathbf{R}_j]]}{R_i^3 R_j^3} + O(c^{-4}), \quad (15)$$

при этом все входящие в (15) величины будут конечными.

Интеграл в выражении для импульса поля $\mathbf{p}_f$ представляется в виде

$$\int d^3 \mathbf{x} \frac{[\mathbf{R}_i [\mathbf{v}_j \mathbf{R}_j]]}{R_i^3 R_j^3} = \mathbf{v}_j \int \frac{d^3 \mathbf{x}}{R_i^3 R_j^3} \mathbf{R}_i \mathbf{R}_j - \mathbf{v}_j \int \frac{d^3 \mathbf{x}}{R_i^3 R_j^3} \mathbf{R}_i \otimes \mathbf{R}_j, \quad (16)$$

где символ $\otimes$ обозначает тензорное произведение векторов. При этом интеграл в последнем слагаемом соотношения (16) является симметричным тензором и может зависеть только от вектора $\mathbf{r}_{ij}$, направленного от заряда q_j к заряду q_i :

$$\int \frac{d^3 \mathbf{x}}{R_i^3 R_j^3} \mathbf{R}_i \otimes \mathbf{R}_j = b_1 + b_2 \frac{\mathbf{r}_{ij} \otimes \mathbf{r}_{ij}}{r_{ij}^2}; \quad b_1 + b_2 = \int \frac{d^3 \mathbf{x}}{R_i^3 R_j^3} \frac{(\mathbf{r}_{ij} \mathbf{R}_i)(\mathbf{r}_{ij} \mathbf{R}_j)}{r_{ij}^2}, \quad (17)$$

где b_1 и b_2 – неизвестные коэффициенты, а второе из соотношений (17) получается при умножении первого слева и справа на вектор $\mathbf{r}_{ij}/r_{ij}$. Учитывая, что $\mathbf{R}_j = \mathbf{R}_i + \mathbf{r}_{ij}$, и используя при интегрировании сферические координаты с углом θ , отсчитываемым от направления $\mathbf{r}_{ij}$, после несложных, но громоздких вычислений устанавливаем, что правая часть второго из уравнений (17) обращается в нуль. Находя след тензоров в обеих частях первого из уравнений (17), получаем

$$b_1 = -b_2 = \frac{1}{2} \int \frac{d^3 \mathbf{x}}{R_i^3 R_j^3} \mathbf{R}_i \mathbf{R}_j,$$

следовательно, соотношение (16) принимает вид

$$\int d^3 \mathbf{x} \frac{[\mathbf{R}_i [\mathbf{v}_j \mathbf{R}_j]]}{R_i^3 R_j^3} = \frac{1}{2} \left(\mathbf{v}_j + \frac{(\mathbf{v}_j \mathbf{r}_{ij}) \mathbf{r}_{ij}}{r_{ij}^2} \right) \int \frac{d^3 \mathbf{x}}{R_i^3 R_j^3} \mathbf{R}_i \mathbf{R}_j. \quad (18)$$

Наконец, интеграл в правой части уравнения (18), вычисленный в сферических координатах, оказывается равным $4\pi/r_{ij}$. Таким образом, окончательное выражение для импульса электромагнитного поля системы N точечных зарядов, согласно (15) и (18), имеет вид

$$\mathbf{p}_f = \frac{1}{2c^2} \sum_{i,j(i \neq j)} q_i q_j \left(\frac{\mathbf{v}_j}{r_{ij}} + \frac{(\mathbf{v}_j \mathbf{r}_{ij}) \mathbf{r}_{ij}}{r_{ij}^3} \right) + O(c^{-4}). \quad (19)$$

Нетрудно отыскать скорость изменения импульса поля, учитывая, что $d\mathbf{v}_j/dt = \mathbf{a}_j$, $d\mathbf{r}_{ij}/dt = \mathbf{v}_i - \mathbf{v}_j$ и $dr_{ij}/dt = (\mathbf{v}_i - \mathbf{v}_j) \mathbf{r}_{ij}/r_{ij}$. Несложные расчеты показывают, что

$$\frac{d\mathbf{p}_f}{dt} = -\mathbf{F}^{(2)} + O(c^{-4}),$$

где сила $\mathbf{F}^{(2)}$ была найдена ранее (см. (10)). Таким образом, первое из уравнений (15) принимает вид

$$\frac{d\mathbf{p}_m}{dt} = \mathbf{F}^{(2)} + \oint_S d\mathbf{S} \boldsymbol{\sigma} + O(c^{-4}). \quad (20)$$

Максвелловский тензор натяжений имеет вид

$$\boldsymbol{\sigma} = \frac{1}{4\pi} \left(\mathbf{E} \otimes \mathbf{E} + \mathbf{B} \otimes \mathbf{B} - \frac{1}{2} (\mathbf{E}^2 + \mathbf{B}^2) \right).$$

Подставляя сюда разложения полей (6), представляем этот тензор как сумму членов разных порядков $\boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{\sigma}^{(0)} + \boldsymbol{\sigma}^{(2)} + \boldsymbol{\sigma}^{(3)} + O(c^{-4})$. При этом $\boldsymbol{\sigma}^{(0)}$ с увеличением R убывает как R^{-4} , $\boldsymbol{\sigma}^{(2)}$ – как R^{-3} , а $\boldsymbol{\sigma}^{(3)}$ – как R^{-2} . Следовательно, ненулевой вклад в поток импульса через бесконечно удаленную замкнутую поверхность S вносит только $\boldsymbol{\sigma}^{(3)}$:

$$\oint_S d\mathbf{S} \boldsymbol{\sigma} = \oint_S d\mathbf{S} \boldsymbol{\sigma}^{(3)} + O(c^{-4}); \quad \boldsymbol{\sigma}^{(3)} = \frac{2}{3c^3} \frac{1}{4\pi} \sum_{i,j} \frac{q_i q_j}{R_i^3} (\mathbf{R}_i \otimes \mathbf{J}_j + \mathbf{J}_j \otimes \mathbf{R}_i - \mathbf{R}_i \mathbf{J}_j).$$

Для бесконечно удаленного элемента поверхности векторы $\mathbf{R}_i$, направленные к нему, можно считать одинаковыми и равными $\mathbf{R}$ (соответственно, $R_i = R$), при этом сам элемент имеет вид $d\mathbf{S} = \mathbf{R} R d\Omega$, где $d\Omega$ – элемент телесного угла. В результате

$$\oint_S d\mathbf{S} \boldsymbol{\sigma} = \frac{2}{3c^3} \sum_{i,j} q_i q_j \mathbf{J}_j + O(c^{-4}). \quad (21)$$

Сравнивая это выражение с (11), заключаем, что

$$\oint_S d\mathbf{S} \boldsymbol{\sigma} = \mathbf{F}^{(3)} + \sum_i \mathbf{F}_{ri} + O(c^{-4}),$$

где $\mathbf{F}_{ri}$ – сила радиационного трения, действующая на заряд q_i :

$$\mathbf{F}_{ri} = \frac{2q_i^2}{3c^3} \mathbf{J}_i. \quad (22)$$

Соотношение (20) принимает вид

$$\frac{d\mathbf{p}_m}{dt} = \mathbf{F}^{(2)} + \mathbf{F}^{(3)} + \sum_i \mathbf{F}_{ri} + O(c^{-4}). \quad (23)$$

Уравнения движения точечных зарядов

С учетом выражения для $\mathbf{p}_m$ из формулы (15), а также соотношений (9) и (23) нетрудно установить уравнения движения точечных зарядов с точностью до членов третьего порядка:

$$\frac{d\mathbf{p}_i}{dt} = \mathbf{F}_i + \mathbf{F}_{ti} + O(c^{-4}), \quad (24)$$

где силы $\mathbf{F}_i$ определяются согласно (8), а силы $\mathbf{F}_{ti}$ – в соответствии с (22) и $\mathbf{p}_i = m_i \mathbf{v}_i / \sqrt{1 - v_i^2/c^2}$. Отметим, что силы радиационного трения $\mathbf{F}_{ti}$ появляются в (24) автоматически ввиду уравнений (21), в которых наряду со слагаемыми с $i \neq j$ присутствуют и слагаемые с $i = j$. В развернутом виде (23) записывается следующим образом:

$$\begin{aligned} \frac{d\mathbf{p}_i}{dt} = \sum_{j(j \neq i)} q_i q_j \left[\frac{\mathbf{r}_{ij}}{r_{ij}^3} + \frac{1}{c^2} \left(\frac{v_j^2 \mathbf{r}_{ij}}{2r_{ij}^3} - \frac{3}{2} \frac{(\mathbf{v}_j \mathbf{r}_{ij})^2 \mathbf{r}_{ij}}{r_{ij}^5} - \frac{\mathbf{a}_j}{2r_{ij}} - \frac{(\mathbf{a}_j \mathbf{r}_{ij}) \mathbf{r}_{ij}}{2r_{ij}^3} + \right. \right. \\ \left. \left. + \frac{[\mathbf{v}_i [\mathbf{v}_j \mathbf{r}_{ij}]]}{r_{ij}^3} \right) \right] + \frac{2}{3c^3} \sum_j q_i q_j \mathbf{J}_j + O(c^{-4}). \end{aligned} \quad (25)$$

Уравнения (25) являются дифференциальными уравнениями третьего порядка относительно положений зарядов $\mathbf{r}_i(t)$. Они неудовлетворительны в том отношении, что могут содержать нефизические решения, соответствующие самоускорению зарядов. Например, уравнение движения одиночного заряда

$$m \frac{d}{dt} \frac{v}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} = \frac{2q^2}{3c^3} \frac{d^2 v}{dt^2} + O(c^{-4})$$

наряду с физическим решением $v = \text{const}$ содержит и решение, отвечающее самопроизвольному нарастанию скорости заряда. Для исключения таких решений понизим порядок уравнений (25) до второго. Для этого запишем разложение в ряд импульса заряда и его производной по времени:

$$\mathbf{p}_i = m_i \mathbf{v}_i \left(1 + \frac{v_i^2}{2c^2} \right) + O(c^{-4}); \quad \frac{d\mathbf{p}_i}{dt} = m_i \mathbf{a}_i + \frac{m_i v_i^2 \mathbf{a}_i}{2c^2} + \frac{m_i (\mathbf{v}_i \mathbf{a}_i) \mathbf{v}_i}{c^2} + O(c^{-4}). \quad (26)$$

Тогда уравнения (25) в нулевом приближении принимают вид

$$m_i \mathbf{a}_i = \sum_{j(j \neq i)} \frac{q_i q_j}{r_{ij}^3} \mathbf{r}_{ij} + O(c^{-2}) \quad (27)$$

и соответствуют учету только кулоновского взаимодействия нерелятивистски движущихся зарядов. В этом же приближении рыбок зарядов дается выражением

$$\mathbf{J}_j = \frac{d\mathbf{a}_j}{dt} = \frac{1}{m_j} \sum_{k(k \neq j)} q_j q_k \left(\frac{\mathbf{v}_{jk}}{r_{jk}^3} - 3 \frac{(\mathbf{v}_{jk} \mathbf{r}_{jk}) \mathbf{r}_{jk}}{r_{jk}^5} \right) + O(c^{-2}), \quad (28)$$

где введено обозначение $\mathbf{v}_{jk} = \mathbf{v}_j - \mathbf{v}_k$. Подставляя теперь величины $\mathbf{a}_i$ из (27) как в уравнение (25), так и во второе из уравнений (26), а величины $\mathbf{J}_j$ (28) – в уравнения (25), окончательно получаем

$$\begin{aligned} m_i \mathbf{a}_i = \sum_{j(j \neq i)} q_i q_j \left[\frac{\mathbf{r}_{ij}}{r_{ij}^3} + \frac{1}{c^2} \left(\frac{v_j^2 - 2\mathbf{v}_i \mathbf{v}_j - v_i^2}{2r_{ij}^3} \mathbf{r}_{ij} - \frac{3}{2} \frac{(\mathbf{v}_j \mathbf{r}_{ij})^2 \mathbf{r}_{ij}}{r_{ij}^5} - \frac{(\mathbf{v}_i \mathbf{r}_{ij}) \mathbf{v}_{ij}}{r_{ij}^3} \right) \right] - \\ - \frac{1}{2c^2} \sum_{j(j \neq i)} \sum_{k(k \neq j)} \frac{q_i q_j^2 q_k}{m_j} \left(\frac{\mathbf{r}_{jk}}{r_{ij} r_{jk}^3} + \frac{(\mathbf{r}_{jk} \mathbf{r}_{ij}) \mathbf{r}_{ij}}{r_{ij}^3 r_{jk}^3} \right) + \\ + \frac{2}{3c^3} \sum_j \sum_{k(k \neq j)} \frac{q_i q_j^2 q_k}{m_j} \left(\frac{\mathbf{v}_{jk}}{r_{jk}^3} - 3 \frac{(\mathbf{v}_{jk} \mathbf{r}_{jk}) \mathbf{r}_{jk}}{r_{jk}^5} \right) + O(c^{-4}). \end{aligned} \quad (29)$$

Таким образом, уравнения (29) являются уравнениями движения N точечных зарядов, представленными в виде (1) и содержащими члены до c^{-3} включительно. При этом члены нулевого порядка в правой части (29) отвечают кулоновскому взаимодействию зарядов, члены второго порядка появляются в силу изменения импульса (19) электромагнитного поля зарядов и релятивистских поправок, а члены третьего порядка обусловлены силами радиационного трения, возникающими за счет излучения. Отметим, что последние исчезают, в частности если удельные заряды одинаковы ($q_i/m_i = \text{const}$), – в таком случае отсутствует электрическое дипольное излучение. Очевидно, что аналогичным образом могут быть выведены и члены более высоких порядков, входящие в уравнения движения.

В частном случае двух зарядов уравнения движения одного из них имеют вид

$$m_1 \mathbf{a}_1 = \frac{q_1 q_2}{r^3} \left[\mathbf{r}_{12} + \frac{\mathbf{r}_{12}}{c^2} \left(\frac{v_2^2 - v_1^2}{2} - \mathbf{v}_1 \mathbf{v}_2 - \frac{3(\mathbf{v}_2 \mathbf{r}_{12})^2}{2r^2} + \frac{q_1 q_2}{m_2 r} \right) - \frac{(\mathbf{v}_1 \mathbf{r}_{12}) \mathbf{v}_{12}}{c^2} \right] + \frac{2q_1^2 q_2}{3c^3 r^3} \left(\frac{q_1}{m_1} - \frac{q_2}{m_2} \right) \left(\mathbf{v}_{12} - 3 \frac{(\mathbf{v}_{12} \mathbf{r}_{12}) \mathbf{r}_{12}}{r^2} \right) + O(c^{-4}), \quad (30)$$

где $r = |\mathbf{r}_{12}|$ – расстояние между зарядами, а уравнение движения другого заряда получается из (30) при замене индексов 1 на 2 и наоборот.

В качестве примера применения общих уравнений (29) рассмотрим рассеяние двух заряженных точечных частиц с одинаковыми массами $m_1 = m_2 = m$ и равными, но противоположными по знаку зарядами $q_1 = -q_2 = q$. В системе центра масс частиц $\mathbf{r}_1 = -\mathbf{r}_2$ и $\mathbf{v}_1 = -\mathbf{v}_2$, поэтому $\mathbf{r}_{12} = 2\mathbf{r}_1$, $\mathbf{v}_{12} = 2\mathbf{v}_1$ и $r = 2|\mathbf{r}_1| = 2r_1$. Уравнение (30) принимает вид

$$\mathbf{a}_1 = -\frac{q^2}{4mr_1^3} \left[\mathbf{r}_1 + \frac{\mathbf{r}_1}{c^2} \left(v_1^2 - \frac{3(\mathbf{v}_1 \mathbf{r}_1)^2}{2r_1^2} - \frac{q^2}{2mr_1} \right) - 2 \frac{(\mathbf{v}_1 \mathbf{r}_1) \mathbf{v}_1}{c^2} \right] - \frac{q^4}{3m^2 c^3 r_1^3} \left(\mathbf{v}_1 - 3 \frac{(\mathbf{v}_1 \mathbf{r}_1) \mathbf{r}_1}{r_1^2} \right) + O(c^{-4}).$$

Удобно далее перейти к безразмерным величинам, выражая расстояния в единицах так называемого классического радиуса заряженной частицы $q^2/(mc^2)$, скорости – в единицах c , время – в единицах $q^2/(mc^3)$ и ускорения – в единицах mc^4/q^2 . Тогда

$$\mathbf{a}_1 = -\frac{1}{4r_1^3} \left[\mathbf{r}_1 + \mathbf{r}_1 \left(v_1^2 - \frac{3(\mathbf{v}_1 \mathbf{r}_1)^2}{2r_1^2} - \frac{1}{2r_1} \right) - 2(\mathbf{v}_1 \mathbf{r}_1) \mathbf{v}_1 \right] - \frac{1}{3r_1^3} \left(\mathbf{v}_1 - 3 \frac{(\mathbf{v}_1 \mathbf{r}_1) \mathbf{r}_1}{r_1^2} \right). \quad (31)$$

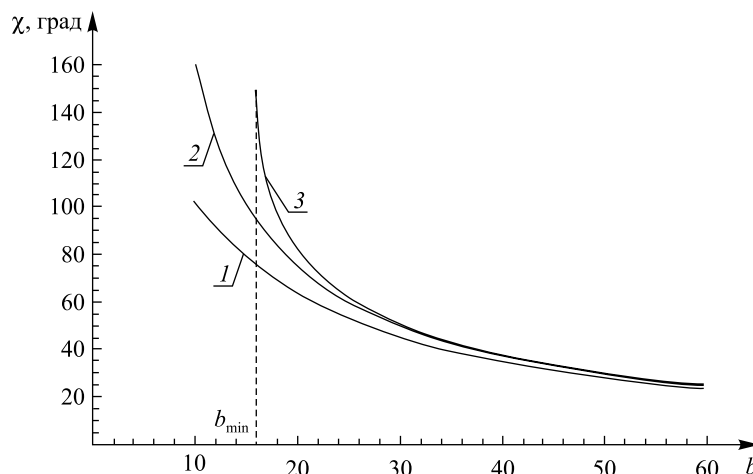
Очевидно, что траектории обеих частиц (как при финитном движении, так и при инфинитном) плоские, т. е. векторы $\mathbf{r}_1$, $\mathbf{v}_1$ и $\mathbf{a}_1$ лежат в плоскости, положение которой не изменяется с течением времени. Поэтому векторное уравнение (31) сводится к системе скалярных уравнений, например для проекций векторов на декартовы оси x и y . При этом $\mathbf{r}_1 = (x, y)$, $\mathbf{v}_1 = (v_x, v_y)$ и $r_1 = \sqrt{x^2 + y^2}$, а начальные условия в случае рассеяния имеют вид $x(-\infty) = -\infty$, $y(-\infty) = -b/2$, $v_x(-\infty) = v_0$, $v_y(-\infty) = 0$, где v_0 – начальная скорость частиц в системе центра масс; b – прицельное расстояние. Тогда угол рассеяния частиц χ определяется как

$$\chi = \arctg \frac{v_y(+\infty)}{v_x(+\infty)}.$$

Отметим, что в нулевом приближении, соответствующем учету только кулоновского взаимодействия частиц ($\mathbf{a}_1^{(0)} = -\mathbf{r}_1/(4r_1^3)$), этот угол равен [5]:

$$\chi^{(0)} = 2 \arctg(2v_0^2 b). \quad (32)$$

Зависимость угла рассеяния χ от прицельного расстояния b при начальной скорости частиц $v_0 = 0,2$ представлена на рисунке. Кривая 1 отвечает кулоновскому взаимодействию частиц (32). В приближении порядка c^{-2} при численном решении уравнений движения учитываются слагаемые только в квадратных скобках в (31) (на рисунке – кривая 2). Отметим, что здесь, как и в кулоновском приближении, скорость частиц после рассеяния такая же, как и до рассеяния при любых значениях параметра b : $v_1(+\infty) = v_2(+\infty) = v_0 = 0,2$. Таким образом, данное приближение является поправкой к основному вкладу, даваемому формулой (32).



Зависимость угла рассеяния частиц от прицельного расстояния в единицах $q^2/(mc^2)$:

1 – в кулоновском приближении; 2 – в приближении порядка c^{-2} ; 3 – в приближении порядка c^{-3}

Качественно иная картина наблюдается при учете всех слагаемых в правой части уравнения (31) (приближение порядка c^{-3} ; на рисунке – кривая 3). В этом приближении скорость частиц после рассеяния оказывается меньше начальной скорости v_0 из-за потерь энергии частиц на тормозное электромагнитное излучение. При этом имеется критическое значение $b_{\min}$ прицельного расстояния, при котором скорости $v_1(+\infty)$ и $v_2(+\infty)$ обращаются в нуль – для $v_0 = 0,2$ оно оказывается равным $b_{\min} \approx 16$ (см. рисунок). Если прицельное расстояние меньше, чем $b_{\min}$, то частицы не разлетаются после сближения, а «падают» друг на друга. Полное сечение захвата частиц составляет $\sigma = \pi b_{\min}^2$. Отметим, что значение $b_{\min}$ зависит от начальной скорости v_0 ($v_0 \ll c$) приближенно как $\sim 1/v_0$. При начальных скоростях частиц, сравнимых со скоростью света в вакууме, очевидно, требуется учитывать поправки порядков более высоких, чем c^{-3} .

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК (REFERENCES)

1. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Теория поля. М., 1973.
2. Darwin C. G. The dynamical motion of charged particles // *Philosoph. Magazine. Ser. 6.* 1920. Vol. 39, № 233. P. 537–551 [Darwin C. G. The dynamical motion of charged particles. *Philosoph. Magazine. Ser. 6.* 1920. Vol. 39, No. 233. P. 537–551 (in Engl.)].
3. Голубенков В. Н., Смородинский Я. А. Функция Лагранжа для системы одинаковых заряженных частиц // ЖЭТФ. 1957. Т. 31, № 3. С. 330 [Golubenkov V. N., Smorodinskii Ya. A. The Lagrangian function for a system of identically charged particles. *JETP.* 1957. Vol. 31, No. 3. P. 330 (in Russ.)].
4. Джесксон Дж. Классическая электродинамика. М., 1965.
5. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Механика. М., 1973.

Статья поступила в редколлегию 28.03.2016.
Received by editorial board 28.03.2016.