

ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНАЯ ТЕОРИЯ ДИФФУЗИИ КАНАЛИРОВАННЫХ ЧАСТИЦ ПО ПОПЕРЕЧНОЙ ЭНЕРГИИ И РАСЧЕТ ДЛИНЫ ДЕКАНАЛИРОВАНИЯ

В. В. ТИХОМИРОВ¹⁾

¹⁾НИУ «Институт ядерных проблем» Белорусского государственного университета,
ул. Бобруйская, 11, 220030, г. Минск, Республика Беларусь

Предложено уравнение диффузии каналированных частиц по поперечной энергии, впервые учитывающее как вклад четвертой степени угла некогерентного рассеяния в дисперсию поперечной энергии, так и катастрофическое деканалирование, вызываемое некогерентным рассеянием частиц на большие углы. Это уравнение сведено к задаче Штурма – Лиувилля, которая используется для строгого введения и численного расчета с процентной точностью длины деканалирования и доли положительно заряженных каналированных частиц, проиллюстрированных примерами Протонного суперсинхротрона, Большого адронного и Будущего кольцевого коллайдеров. В то же время применение развитого строгого подхода к случаю отрицательно заряженных частиц подтверждает вывод, сделанный нами ранее на основе экспериментальных исследований и моделирования методом Монте-Карло, о том, что для данных частиц эффективная длина деканалирования может быть введена только на основе одновременного учета интенсивных процессов деканалирования и реканалирования.

Ключевые слова: каналирование; длина деканалирования; поперечная энергия; уравнение диффузии.

QUANTITATIVE THEORY OF CHANNELING PARTICLE DIFFUSION IN THE TRANSVERSE ENERGY AND DIRECT EVALUATION OF THE DECHANNELING LENGTH

V. V. TIKHOMIROV^a

^aResearch Institute for Nuclear Problems of Belarusian State University,
Bobrujskaja street, 11, 220030, Minsk, Republic of Belarus

A new diffusion equation is suggested to correctly describe the channeling particle diffusion in the transverse energy taking into consideration both the contribution of the fourth power of the incoherent scattering angle to the transverse energy dispersion and the catastrophic dechanneling process, caused by the large-angle single incoherent scattering. This equation is reduced to the Sturm – Liouville problem applied both to rigorously introduce and evaluate numerically with a one-percent precision the dechanneling length as well as the percentage of the channeling positively-charged particles for the Super Proton Synchrotron, Large Hadron Collider and Future Circular Collider energies. On the opposite, the application of the correctly formulated diffusion theory to the case of negatively charged particles confirms our previous conclusion, made on the basis of the experimental studies and Monte Carlo simulations, that the application of the effective dechanneling length concept is possible for them only after consideration of both the intensive particle dechanneling and rechanneling processes.

Key words: channeling; dechanneling length; transverse energy; diffusion equation.

Образец цитирования:

Тихомиров В. В. Последовательная теория диффузии каналированных частиц по поперечной энергии и расчет длины деканалирования // Вестн. БГУ. Сер. 1, Физика. Математика. Информатика. 2016. № 3. С. 21–28.

For citation:

Tikhomirov V. V. Quantitative theory of channeling particle diffusion in the transverse energy and direct evaluation of the dechanneling length. *Vestnik BGU. Ser. 1, Fiz. Mat. Inform.* 2016. No. 3. P. 21–28 (in Russ.).

Автор:

Виктор Васильевич Тихомиров – доктор физико-математических наук, профессор; заведующий лабораторией ядерной оптики и космомикробиологии.

Author:

Viktor Tikhomirov, doctor of science (physics and mathematics), full professor; head of the laboratory of nuclear optics and cosmomicrphysics.
vvtikh@mail.ru

Каналирование заряженных частиц в кристаллах предоставляет уникальные возможности управления их пучками и излучением. В случае электронов оно позволяет создать новые квазимонохроматические источники рентгеновских и гамма-квантов [1]. Благодаря каналированию кристаллы могут быть использованы для вывода и коллимации пучков протонов и ядер ускорителей сверхвысоких энергий [2, 3], даже таких, как Большой адронный коллайдер (БАК) и Будущий кольцевой коллайдер (БКК).

Возможности использования процесса каналирования определяются его устойчивостью, наиболее емко характеризуемой длиной деканалирования. Как правило, предсказания величины последней при высоких энергиях получают моделированием методом Монте-Карло. Однако, поскольку при энергиях БАК и БКК длины деканалирования положительно заряженных частиц и ядер достигают метров и десятков метров, моделирование становится все более затратным и обладает заметной статистической погрешностью. В случае же отрицательно заряженных частиц извлечение численных значений длины деканалирования как из данных эксперимента, так и из результатов моделирования принципиально осложняется эффектом объемного захвата [4, 5], играющим гораздо более заметную роль, чем в случае положительного заряда частиц. Сказанное демонстрирует важность проблемы прямого вычисления длины деканалирования, решению которой и посвящена данная статья.

С самого начала исследований эффекта каналирования было предложено [6, 7] описывать его как диффузию частиц по поперечной энергии (энергии поперечного колебательного движения относительно кристаллических осей или плоскостей [1, 3, 6–8]). В работе [8] был представлен метод получения длины деканалирования путем нахождения наименьшего собственного значения уравнения диффузии частиц по поперечной энергии, записанного для случая рассеяния нерелятивистских ионов электронами атомов кристалла. Поскольку углы каналирования нерелятивистских ионов существенно превышают максимальный угол [9] $\theta_{\max} = m/M$ – угол рассеяния иона массой M электроном массой m , то сформулированное в [8] уравнение вполне оправданно не включало вклада четвертой степени угла рассеяния в коэффициент диффузии и не учитывало эффекта катастрофического рассеяния, приводящего к мгновенному деканалированию.

Однако оба эти допущения теряют применимость при рассеянии на ядрах, которое в [8] не учитывалось. Они также теряют применимость и при предпринятом в [10, 3] переходе к случаю ультрарелятивистских протонов, поскольку угол $\theta_{\max}$ начинает существенно превышать угол каналирования. Для корректного расчета длины деканалирования ультрарелятивистских протонов, ядер и отрицательно заряженных частиц в настоящей работе впервые предложено уравнение диффузии канализованных частиц по поперечной энергии, учитывающее как вклад четвертой степени угла рассеяния в коэффициент диффузии, так и эффект катастрофического деканалирования. На основе этого уравнения проведен расчет длин плоскостного деканалирования протонов, ускоряемых на крупнейших ускорителях, а также продемонстрирована существенная ограниченность представления о каналировании как о квазипериодическом поперечном движении в случае отрицательно заряженных частиц.

Уточненное уравнение диффузии частиц по поперечной энергии

Согласно модели усредненного потенциала Й. Линдхарда [1, 3, 6, 7] движение заряженных частиц под малыми углами к кристаллическим плоскостям описывается усредненным вдоль них атомным потенциалом $V(x)$ (точнее, потенциальной энергией). Трансляционная симметрия последнего позволяет ввести энергию поперечного движения¹

$$\epsilon_{\perp} = \frac{\epsilon v_x^2}{2} + V(x) = \frac{p_x^2}{2\epsilon} + V(x), \quad (1)$$

где ϵ – полная энергия частицы; $v_x(\epsilon_{\perp}, x) = \sqrt{2[\epsilon_{\perp} - V(x)]/\epsilon}$, $p_x = \epsilon v_x$ – проекции ее скорости и импульса на нормальную плоскостям ось x . В классическом (неквантовом) пределе частицы канализуют, если $\epsilon_{\perp} \leq V_{\max}$, где $V_{\max}$ – максимальная величина усредненного потенциала. Поперечное движение канализованных частиц ограничено точками поворота $x_l(\epsilon_{\perp})$ и $x_r(\epsilon_{\perp})$ и характеризуется периодом

$$T(\epsilon_{\perp}) = 2 \int_{x_l(\epsilon_{\perp})}^{x_r(\epsilon_{\perp})} \frac{dx}{v_x(x)},$$

а также нормированной на единицу функцией распределения

¹ Используется система единиц $\hbar = c = 1$.

$$f_{\varepsilon_{\perp}}(x) = \frac{2}{T v_x(\varepsilon_{\perp}, x)}.$$

Консервативное движение в потенциале $V(x)$ неизбежно возмущается некогерентным рассеянием на ядрах и электронах атомов кристалла. Некогерентное отклонение частицы на угол θ_x в точке x приводит к изменению поперечной энергии (1) на

$$\varepsilon'_{\perp} = \varepsilon [v_x(x) + \theta_x]^2 / 2 + V(x) = \varepsilon_{\perp} + \varepsilon v_x(x) \theta_x + \varepsilon \theta_x^2 / 2. \quad (2)$$

Для описания рассеяния частиц в веществе в разных ситуациях широко используется приближение Фоккера – Планка [1, 3, 11, 12], в рамках которого рассеяние на большие углы в работах [8, 10, 12] не учитывалось. Следуя хорошо известной процедуре [11] и используя обозначения [12], введем нормированные на единицу функции распределения частиц в одномерном фазовом пространстве и по поперечной энергии

$$F(\varepsilon_{\perp}, x, z) = \varphi(\varepsilon_{\perp}, z) f_{\varepsilon_{\perp}}(x), \quad \varphi(\varepsilon_{\perp}, z) \equiv \frac{1}{N} \frac{dN}{d\varepsilon_{\perp}}. \quad (3)$$

Зависимость (3) от длины пробега z вдоль плоскостей определяется уравнением [12]

$$\frac{\partial F}{\partial z} = - \frac{\partial}{\partial \varepsilon_{\perp}} \left(\frac{\Delta \varepsilon_{\perp}}{\Delta z} F \right) + \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial \varepsilon_{\perp}^2} \left(\frac{(\Delta \varepsilon_{\perp})^2}{\Delta z} F \right) - w F, \quad (4)$$

где

$$\frac{\Delta \varepsilon_{\perp}}{\Delta z} = \frac{\Delta \varepsilon_{\perp}(\varepsilon_{\perp}, x)}{\Delta z} = \int (\varepsilon'_{\perp} - \varepsilon_{\perp}) d\Sigma, \quad \frac{(\Delta \varepsilon_{\perp})^2}{\Delta z} = \frac{(\Delta \varepsilon_{\perp})^2(\varepsilon_{\perp}, x)}{\Delta z} = \int (\varepsilon'_{\perp} - \varepsilon_{\perp})^2 d\Sigma, \quad (5)$$

$$w = w(\varepsilon_{\perp}, x) = \int d\Sigma^C \quad (6)$$

есть скорости нарастания с z средних величин $\varepsilon_{\perp}$ и $\varepsilon_{\perp}^2$ вследствие некогерентного рассеяния и вероятность катастрофического деканализирования соответственно. Для того чтобы провести наглядный аналитический расчет коэффициентов (5), для макроскопического сечения рассеяния частиц на ядрах и электронах атомов кристалла будем использовать упрощенное выражение

$$d\Sigma = \frac{4\alpha^2 [Z^2 n_n(x) + n_e(x)]}{\beta^2 p^2 (\theta^2 + \theta_1^2)^2} d\theta_x d\theta_y,$$

в котором угол θ_1 учитывает экранирование, а зависящие лишь от поперечной координаты x концентрации ядер $n_n(x)$ и электронов $n_e(x)$ получаются усреднением их трехмерных величин вдоль кристаллической плоскости. Как видно из (1) и (2), второй интеграл (5) содержит расходящийся на верхнем пределе вклад θ^4 , которым в [8, 10] полностью пренебрегалось. Его адекватное описание возможно только при учете катастрофического деканализирования (6). Введем для его описания граничные углы

$$\theta_{\pm}(\varepsilon_{\perp}, x) = -v_x(\varepsilon_{\perp}, x) \pm \sqrt{2(V_{\max} - V(x))}/\varepsilon,$$

при рассеянии на которые поперечная энергия (2) сравнивается с максимумом усредненного потенциала. Коэффициенты (5) найдем интегрированием по интервалу $\theta_{-}(\varepsilon_{\perp}, x) \leq \theta_x \leq \theta_{+}(\varepsilon_{\perp}, x)$ и всем углам θ_y рассеяния в плоскости yz :

$$\frac{\Delta \varepsilon_{\perp}(\varepsilon_{\perp}, x)}{\Delta z} = \frac{\pi \alpha^2}{\beta^3 p} [Z^2 n_n(x) + n_e(x)] \left\{ \ln \left[\frac{\theta_{+}(x) + \sqrt{\theta_{+}^2(x) + \theta_1^2}}{\theta_{-}(x) + \sqrt{\theta_{-}^2(x) + \theta_1^2}} \right] + \frac{\theta_{-}(x)}{\sqrt{\theta_{-}^2(x) + \theta_1^2}} - \frac{\theta_{+}(x)}{\sqrt{\theta_{+}^2(x) + \theta_1^2}} \right\}; \quad (7)$$

$$\frac{(\Delta \epsilon_{\perp})^2(\epsilon_{\perp}, x)}{\Delta z} = a(\epsilon_{\perp}, x) + b(\epsilon_{\perp}, x); \quad (8)$$

$$a(\epsilon_{\perp}, x) = 4[\epsilon_{\perp} - V(x)] \frac{\Delta \epsilon_{\perp}}{\Delta z}; \quad (9)$$

$$b(\epsilon_{\perp}, x) = \frac{\pi \alpha^2}{4} [Z^2 n_n(x) + n_e(x)] \left\{ \theta_+(x) \sqrt{\theta_+^2(x) + \theta_1^2} - \theta_-(x) \sqrt{\theta_-^2(x) + \theta_1^2} + \right. \\ \left. + \frac{2\theta_1^2 \theta_+(x)}{\sqrt{\theta_+^2(x) + \theta_1^2}} - \frac{2\theta_1^2 \theta_-(x)}{\sqrt{\theta_-^2(x) + \theta_1^2}} - 3\theta_1^2 \ln \left[\frac{\theta_+(x) + \sqrt{\theta_+^2(x) + \theta_1^2}}{\theta_-(x) + \sqrt{\theta_-^2(x) + \theta_1^2}} \right] \right\}. \quad (10)$$

Вероятность катастрофического деканализирования (6) находится интегрированием по дополнительной области углов $d\Sigma^C$ $\theta_x > \theta_+(\epsilon_{\perp}, x)$, $\theta_x < \theta_-(\epsilon_{\perp}, x)$, а также по всем углам рассеяния в плоскости uz , параллельной кристаллической:

$$w(\epsilon_{\perp}, x) = \frac{\pi \alpha^2}{\beta^2 p^2 \theta_1^2} [Z^2 n_n(x) + n_e(x)] \left\{ 2 + \frac{\theta_-(x)}{(\theta_-^2(x) + \theta_1^2)^{1/2}} - \frac{\theta_+(x)}{(\theta_+^2(x) + \theta_1^2)^{1/2}} \right\}. \quad (11)$$

Для простоты верхние пределы интегрирования в (7) – (11) взяты бесконечными.

Усреднение уравнения (4) по периоду колебаний при помощи операции

$$\langle \Phi(\epsilon_{\perp}, x) \rangle = \int_{x_l(\epsilon_{\perp})}^{x_r(\epsilon_{\perp})} \Phi(\epsilon_{\perp}, x) f_{\epsilon_{\perp}}(x) dx \quad (12)$$

приводит [12] к уравнению

$$\frac{\partial \phi(\epsilon_{\perp}, z)}{\partial z} = - \frac{\partial}{\partial \epsilon_{\perp}} \left(A(\epsilon_{\perp}) \frac{\partial}{\partial \epsilon_{\perp}} \frac{\phi(\epsilon_{\perp}, z)}{T(\epsilon_{\perp})} \right) + \frac{\partial^2}{\partial \epsilon_{\perp}^2} \left(B(\epsilon_{\perp}) \frac{\phi(\epsilon_{\perp}, z)}{T(\epsilon_{\perp})} \right) - W(\epsilon_{\perp}) \phi(\epsilon_{\perp}, z) \quad (13)$$

для функции распределения каналированных частиц по поперечной энергии, в котором

$$A(\epsilon_{\perp}) = \left\langle \frac{\Delta \epsilon_{\perp}(\epsilon_{\perp}, x)}{\Delta z} \right\rangle, \quad B(\epsilon_{\perp}) = \langle b(\epsilon_{\perp}, x) \rangle, \quad W(\epsilon_{\perp}) = \langle w(\epsilon_{\perp}, x) \rangle.$$

Стандартный прием [13], а также введение функции

$$u(\xi) = \frac{\phi(\epsilon_{\perp})}{T(\epsilon_{\perp})} = \frac{1}{N} \frac{dN}{T(\epsilon_{\perp}) d\epsilon_{\perp}} = \frac{1}{N} \frac{dN}{d\xi}$$

и переменной, пропорциональной числу квантовых состояний поперечного движения,

$$\xi(\epsilon_{\perp}) = \int_0^{\epsilon_{\perp}} T(\epsilon_{\perp}) d\epsilon_{\perp}$$

позволяют выделить оператор Штурма – Лиувилля и записать (13) в каноническом виде:

$$r(\xi) \frac{\partial u(\xi, z)}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial \xi} \left(p(\xi) \frac{\partial u(\xi, z)}{\partial \xi} \right) - q(\xi) u(\xi, z); \quad (14)$$

$$p(\xi) = [B(\epsilon_{\perp}(\xi)) + A(\epsilon_{\perp}(\xi))] T(\epsilon_{\perp}(\xi)) r(\xi);$$

$$q(\xi) = [W(\epsilon_{\perp}(\xi)) - B''(\epsilon_{\perp}(\xi))]T^{-1}(\epsilon_{\perp}(\xi))r(\xi); \quad (15)$$

$$r(\xi) = \exp \int_0^{\epsilon_{\perp}(\xi)} \frac{B'(\epsilon_{\perp})d\epsilon_{\perp}}{A(\epsilon_{\perp}) + B(\epsilon_{\perp})}; \quad \epsilon_{\perp}(\xi) = \int_0^{\xi} \frac{d\xi}{T(\epsilon_{\perp})},$$

где штрих и пара штрихов обозначают соответствующие производные по $\epsilon_{\perp}$.

Вследствие роста флуктуаций поперечной энергии с возрастанием ее величины приближение Фоккера – Планка теряет применимость при значении $\epsilon_{\perp \max}$, которое здесь оценим, приравняв дисперсию приращения поперечной энергии на периоде каналирования при $\epsilon'_{\perp} = \epsilon_{\perp \max}$

$$\delta\epsilon_{\perp}(\epsilon') = \left[\left\langle \frac{(\Delta\epsilon_{\perp})^2(\epsilon', x)}{\Delta z} \right\rangle T(\epsilon') - \left\langle \frac{\Delta\epsilon_{\perp}(\epsilon', x)}{\Delta z} \right\rangle^2 T^2(\epsilon') \right]^{1/2} \quad (16)$$

к энергии $V_{\max} - \epsilon_{\perp \max}$, отделяющей $\epsilon_{\perp \max}$ от максимума потенциала $V_{\max}$. Для того чтобы сформулировать задачу Штурма – Лиувилля на отрезке $[0, 1]$, введем переменную $\xi' = \xi / \xi(\epsilon_{\perp \max})$ (штрих далее опускаем) и разделим коэффициент $p(\xi)$ на $\xi^2(\epsilon_{\perp \max})$.

Таблица 1

Длина деканалирования и точность ее расчета¹

Модель потенциала	$\frac{\delta\epsilon_{\perp}(\epsilon_{\perp \max})}{V_{\max} - \epsilon_{\perp \max}}$	$l_{\text{dech}}, \text{ см}$	$\Delta l_1, \%$	$\Delta l_2, \%$
Tob [14]	1,0	23,1	+0,61	0
Tob [14]	0,5	22,9	+1,3	-0,81
Tob [14]	2,0	23,2	+0,30	+0,37
DT [15]	1,0	23,3	+0,65	+0,61
Mol [7]	1,0	21,4	+0,61	-7,255

¹Длина деканалирования l_{dech} протонов с энергией 400 ГэВ в поле плоскостей (110) кристалла кремния, рассчитанная в модели усредненного потенциала [14] при различных граничных поперечных энергиях $\epsilon_{\perp \max}$, найденных для отношений 1,0; 0,5 и 2,0 дисперсии $\delta\epsilon_{\perp}$ (16) к разнице $V_{\max} - \epsilon_{\perp \max}$, а также с использованием моделей усредненного потенциала [15] и [7]. Δl_1 – погрешности определения длин деканалирования, рассчитанные на основе оценки времени деканалирования протона с граничной поперечной энергией; Δl_2 – отличие четырех рассчитанных длин деканалирования от первой.

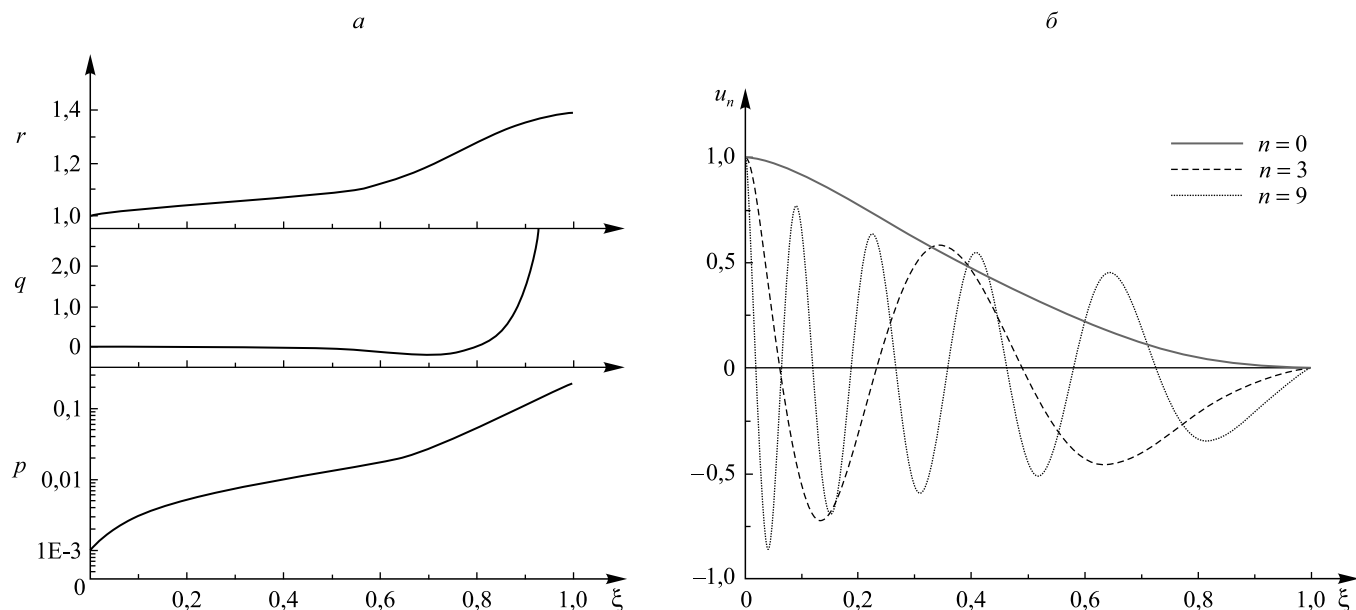
Несмотря на качественный характер введения величины $\epsilon_{\perp \max}$, он позволяет определить длину деканалирования с процентной точностью (см. табл. 1). Связано это с резким ростом коэффициента диффузии p и с увеличением вносящей основной вклад в коэффициент q вероятности катастрофического деканалирования при приближении $\epsilon_{\perp}$ к $\epsilon_{\perp \max}$, а перенормированной переменной ξ – к единице (рисунок). Рост обеих величин способствует весьма быстрому уходу частиц из области вблизи $\epsilon_{\perp \max}$, который позволяет наложить предложенное в [8] нулевое граничное условие при $\xi = 1$ на решение уравнения (14). В свою очередь, «отражение» частиц от дна потенциальной ямы описывается наложением нулевого условия на производную при $\xi = 0$.

Решение уравнения диффузии

Решением поставленной таким образом задачи Штурма – Лиувилля

$$-\frac{\partial}{\partial \xi} \left[p(\xi) \frac{\partial}{\partial \xi} u_n(\xi) \right] + q(\xi) u_n(\xi) = \lambda_n r(\xi) u_n(\xi), \quad \frac{\partial u_n(0)}{\partial \xi} = 0, \quad u_n(1) = 0, \quad (17)$$

являются ортогональные с весом $r(\xi)$ собственные функции $u_n(\xi)$ (см. рисунок) и монотонно возрастающие по величине собственные значения λ_n , номера которых $n = 0, 1, \dots$ равны числам узлов



Коэффициенты и собственные функции уравнения (14):
 а – зависимость коэффициентов (p , q , r) (15) уравнения (14) от параметра ξ ;
 б – собственные функции u_n , $n = 0, 3, 9$, соответствующие задаче Штурма – Лиувилля, рассчитанные для протонов энергии 400 ГэВ и плоскости (110) кристалла кремния

собственных функций. Полнота системы функций $u_n(\xi)$ позволяет представить произвольное решение уравнения (14) в виде разложения

$$u(\xi, z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n \exp(-\lambda_n z) u_n(\xi) \xrightarrow{z\lambda_1 \gg 1} c_0 \exp(-\lambda_0 z) u_0(\xi), \quad (18)$$

где

$$c_n = \int_0^1 u(\xi, 0) u_n(\xi) r(\xi) d\xi \left(\int_0^1 u_n^2(\xi) r(\xi) d\xi \right)^{-1}$$

есть «заселенности» различных собственных состояний, определяемые начальным распределением частиц по поперечной энергии $u(\xi, 0)$. Наиболее просто это распределение получается в случае падения на плоскости под нулевым углом, когда в режим каналирования попадает максимальная доля частиц:

$$u(\xi, 0) = \frac{1}{N} \frac{dN}{d\xi} = \frac{\varphi(\epsilon_{\perp}(\xi))}{T(\epsilon_{\perp}(\xi))} = \frac{1}{d_{pl} \cdot T(\epsilon_{\perp}(\xi)) \cdot |dV(x(\epsilon_{\perp}(\xi)))/dx|},$$

где $x(\epsilon_{\perp}(\xi))$ – координата точки падения частицы, в которой $V(x) = \epsilon_{\perp}(\xi) \leq V_{\max}$; d_{pl} – межплоскостное расстояние.

Наименьшее собственное значение λ_0 характеризует экспоненциальный предел (18), позволяющий ввести длину деканалирования $l_{\text{dech}} = \lambda_0^{-1}$. Благодаря тому, что следующее собственное значение λ_1 в 5 с лишним раз превышает λ_0 (табл. 2), эта длина начинает определять эволюцию доли каналированных частиц обоих знаков заряда уже при $z > \lambda_1^{-1} \ll l_{\text{dech}}$.

Точность определения длины каналирования проанализируем на примере протонов с энергией 400 ГэВ и семейства плоскостей (110) кристалла кремния (см. табл. 1). В графе « l_{dech} , см» (см. табл. 2) содержатся значения длины деканалирования, полученные при 3 разных значениях энергии $\epsilon_{\perp \max}$, рассчитанных при отношениях $\delta\epsilon_{\perp}(\epsilon_{\perp \max})/(V_{\max} - \epsilon_{\perp \max})$, равных 0,5; 1,0 и 2,0, а также для 3 разных моделей потенциала плоскостей [7, 14, 15]. Графа « λ_1/λ_0 » (см. табл. 2) содержит отношение первых

собственных чисел уравнения (17). Графа « $\Delta I_1, \%$ » (см. табл. 2) содержит погрешность ΔI_1 определения величины l_{dech} , оцененную как время деканализирования протона с $\varepsilon_{\perp} = \varepsilon_{\perp \text{max}}$ при помощи решения уравнения (14) в приближении линейной аппроксимации коэффициента $p(\xi)$ в интервале $\varepsilon_{\perp \text{max}} \leq \varepsilon_{\perp} \leq V_{\text{max}}$ [8, 16]. В графе « $N_{\text{ch0}}/N_{\text{inc}}$ » (см. табл. 2) приведена доля частиц, попадающих при нулевом угле падения в нижнее собственное состояние. Нетрудно видеть, что как различные способы определения $\varepsilon_{\perp \text{max}}$, так и переход между 7 % величины l_{dech} в потенциале Мольера объясняются тем, что последний был предложен для поля изолированного атома и, в отличие от потенциалов [14, 15], не описывает модификацию атомного потенциала при его вхождении в состав кристалла.

Таблица 2

Длина деканализирования (l_{dech})
при различных энергиях протонов и электронов¹

e^-/p	$\varepsilon, \text{ГэВ}$	$l_{\text{dech}}, \text{см}$	λ_1/λ_0	$\Delta I_1, \%$	$N_{\text{ch0}}/N_{\text{inc}}$
p	400	23,1	6,0	0,61	0,895
p	6500	303,6	5,7	0,34	0,895
p	10^5	3936,0	5,6	0,18	0,895
e^-	1	$6,0 \cdot 10^{-4}$	7,8	130,0	0,33
e^-	10	$50,0 \cdot 10^{-4}$	6,9	78,0	0,39
e^-	100	0,044	6,4	46,0	0,44
e^-	1000	0,38	6,1	28,5	0,49

¹ λ_1/λ_0 – отношение первых собственных чисел уравнения (17); ΔI_1 – погрешность определения длин деканализирования, рассчитанная на основе оценки времени деканализирования частиц с граничной поперечной энергией; $N_{\text{ch0}}/N_{\text{inc}}$ – доля частиц, попадающих при нулевом угле падения в собственное состояние $u_0(\xi)$.

Благодаря нормировке функции $u(\xi, t)$ решение (18) описывает поведение числа каналированных частиц, отнесенного к числу N_{inc} частиц, падающих на кристалл. При этом поведение полного числа частиц в канале (при $0 \leq \xi \leq 1$)

$$\frac{N_{\text{ch}}(z)}{N_{\text{inc}}} = \int_0^1 u(\xi, z) d\xi = \sum_{n=0}^{\infty} c_n \exp(-\lambda_n z) \int_0^1 u_n(\xi) d\xi \xrightarrow{z\lambda_1 \gg 1} \frac{N_{\text{ch0}}}{N_{\text{inc}}} \exp(-\lambda_0 z)$$

описывается на расстояниях $z > \lambda_1^{-1}$ единственной экспонентой, спадающей с характерной длиной, равной длине деканализирования $l_{\text{dech}} = \lambda_0^{-1}$ от начального значения

$$\frac{N_{\text{ch0}}}{N_{\text{inc}}} = c_0 \int_0^1 u_0(\xi) d\xi,$$

приведенного в последней графе табл. 2. Таким образом, в случае положительно заряженных частиц уравнение (14) позволяет весьма точно предсказать доступные непосредственной экспериментальной проверке значения длины деканализирования и процента каналированных частиц. Заметим, что эксперименты по их измерению существенно облегчаются при использовании изогнутых кристаллов [5].

Благодаря последовательному учету рассеяния частиц на любые углы на ядрах уравнение (14) может быть применено и к случаю каналированных электронов и других отрицательно заряженных частиц. Из табл. 2 следует, что в полной противоположности случаю положительно заряженных частиц доля устойчиво каналированных электронов не достигает 50 %, а точность определения длины деканализирования составляет несколько десятков процентов даже при весьма высоких энергиях. Причиной этому является интенсивное рассеяние на ядрах электронов с любыми поперечными энергиями, вызывающее частые значительные изменения последних – как увеличение, так и уменьшение. В результате поперечная энергия большей части электронов из интервала $\varepsilon_{\perp \text{max}} \leq \varepsilon_{\perp} \leq V_{\text{max}}$ в течение одного периода изменяется на величину (16), превышающую его ширину $V_{\text{max}} - \varepsilon_{\perp \text{max}}$, вызывая значительные изменения периода и фазы поперечных осцилляций, делающие неприменимым представление о каналировании как о квазипериодическом поперечном движении для большинства электронов. Помимо этого, значительное количество не описываемых уравнением (14) надбарьерных электронов с $\varepsilon_{\perp} > V_{\text{max}}$

реканализируют [4, 5], переходя в состояния с $\varepsilon_{\perp} < V_{\max}$. В то же время полностью соответствующие данным эксперимента результаты моделирования [5] демонстрируют хорошую применимость понятия длины деканализации также и в случае электронов. Вместе с полученными результатами это означает, что введение понятия длины деканализации отрицательно заряженных частиц, в отличие от положительно заряженных, невозможно без совместного учета интенсивных процессов деканализации и реканализации.

Автор благодарен профессору Г. Г. Крылову и аспиранту А. И. Сытову за конструктивное обсуждение.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК (REFERENCES)

1. *Baryshevsky V. G.* High-Energy Nuclear Optics of Polarized Particles. Singapoure, 2012.
2. *Scandale W.* Use of crystals for beam deflection in particle accelerators // *Mod. Phys. Lett.* 2012. Vol. A27. P. 1230007 [Scandale W. Use of crystals for beam deflection in particle accelerators. *Mod. Phys. Lett.* 2012. Vol. A27. P. 1230007 (in Engl.)].
3. *Biryukov V. M., Chesnokov Y. A., Kotov V. I.* Crystal Channeling and Its Application at High-Energy Accelerators. Berlin ; Heidelberg, 2010.
4. *Tikhomirov V. V.* Simulation of Multi-GeV electron energy losses in crystals // *Nucl. Instrum., Meth.* 1989. Vol. B36. P. 282–285 [Tikhomirov V. V. Simulation of Multi-GeV electron energy losses in crystals. *Nucl. Instrum., Meth.* 1989. Vol. B36. P. 282–285 (in Engl.)].
5. *Mazzolari A., Bagli E., Bandiera L., Guidi V., Backe H., Lauth W., Tikhomirov V., Berra A., Lietti D., Prest M., Vallazza E., DeSalvador D.* Steering of a sub-GeV electron beam through planar channeling enhanced by rechanneling // *Phys. Rev. Lett.* 2014. Vol. 112, № 13. 135503 [Mazzolari A., Bagli E., Bandiera L., Guidi V., Backe H., Lauth W., Tikhomirov V., Berra A., Lietti D., Prest M., Vallazza E., DeSalvador D. Steering of a sub-GeV electron beam through planar channeling enhanced by rechanneling. *Phys. Rev. Lett.* 2014. Vol. 112, No. 13. 135503 (in Engl.)].
6. *Линдхард Й.* Влияние кристаллической решетки на движение заряженных частиц // *УФН.* 1969. Т. 99. С. 249–296 [Lindhard J. Influence of crystal lattice on motion of energetic charged particles. *Usp. fiz. nauk.* 1969. Vol. 99. P. 249–296 (in Russ.)].
7. *Gemmel D. S.* Channeling and related effects in the motion of charged particlea through crystals // *Rev. Mod. Phys.* 1974. Vol. 46. P. 129 [Gemmel D. S. Channeling and related effects in the motion of charged particlea through crystals. *Rev. Mod. Phys.* 1974. Vol. 46. P. 129 (in Engl.)].
8. *Beloshitsky V. V., Kumakhov M. A., Muralev V. A.* Multiple scattering of channeling ions in crystals-II // *Radiat. Eff.* 1973. Vol. 20. P. 95–109 [Beloshitsky V. V., Kumakhov M. A., Muralev V. A. Multiple scattering of channeling ions in crystals-II. *Radiat. Eff.* 1973. Vol. 20. P. 95–109 (in Engl.)].
9. *Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М.* Теория поля. 7-е изд. М., 1988.
10. *Biryukov V. M., Chesnokov Y. A., Galyaev N. N., Kotov V. I., Narsky I. V., Tsarik S. V., Zapolsky V. N., Fedin O. L., Gordeeva M. A., Platonov Yu. P., Smirnon A. I.* On measuring 70 GeV proton dechanneling lengths in silicon crystals (110) and (111) // *Nucl. Instrum. Meth. B.* 1994. Vol. 86. P. 245–250 [Biryukov V. M., Chesnokov Y. A., Galyaev N. N., Kotov V. I., Narsky I. V., Tsarik S. V., Zapolsky V. N., Fedin O. L., Gordeeva M. A., Platonov Yu. P., Smirnon A. I. On measuring 70 GeV proton dechanneling lengths in silicon crystals (110) and (111). *Nucl. Instrum. Meth. B.* 1994. Vol. 86. P. 245–250 (in Engl.)].
11. *Лифшиц Е. М., Питаевский Л. П.* Физическая кинетика. М., 1979.
12. *Байер В. Н., Катков В. М., Страховенко В. М.* Электромагнитные процессы при высокой энергии в ориентированных кристаллах. М., 1989.
13. *Матвеев Н. М.* Методы интегрирования обыкновенных дифференциальных уравнений. М., 1967.
14. *Tobiyama M., Endo I., Monaka T., Sumi Y., Uchida H., Yamamoto N., Yoshida K., Watanabe K., Ohba T., Baba K., Emura T.* Determination of atomic form factors by means of choherent bremsstrahlung // *Phys. Rev. B.* 1991. Vol. 44. P. 9248–9258 [Tobiyama M., Endo I., Monaka T., Sumi Y., Uchida H., Yamamoto N., Yoshida K., Watanabe K., Ohba T., Baba K., Emura T. Determination of atomic form factors by means of choherent bremsstrahlung. *Phys. Rev. B.* 1991. Vol. 44. P. 9248–9258 (in Engl.)].
15. *Doyle P. A., Turner P. S.* Relativistic Hartree-Fock x-ray and electron scattering factors // *Acta Crystallogr.* 1968. Vol. 24A. P. 390 [Doyle P. A., Turner P. S. Relativistic Hartree-Fock x-ray and electron scattering factors. *Acta Crystallogr.* 1968. Vol. 24A. P. 390 (in Engl.)].
16. *Полянин А. Д.* Справочник по линейным уравнениям математической физики. М., 2001.

Статья поступила в редколлегию 11.05.2016.
Received by editorial board 11.05.2016.