УДК 539.1

КВАНТОВЫЕ ЭФФЕКТЫ ПРИ КАНАЛИРОВАНИИ ЧАСТИЦ В ИЗОГНУТОМ КРИСТАЛЛЕ

НГУЕН КУАНГ ШАН[1]***, И. Д. ФЕРАНЧУК***[1]

[1]*Белорусский государственный университет, пр. Независимости, 4, 220030, г. Минск, Республика Беларусь*

Построено квантовое описание явления каналирования релятивистских заряженных частиц в изогнутых кристаллах. Найдены волновые функции квазистационарных состояний частиц, захваченных в каналы. Для этих состояний учтены квантовые эффекты, обусловленные подбарьерным туннелированием при радиусе изгиба, близком к критическому значению. При таких условиях найдено аналитическое выражение для эффективности захвата частиц на уровни, соответствующие связанному движению. Рассчитано угловое распределение частиц при вылете из изогнутого кристалла. Определены параметры, при которых квантовые эффекты могут быть обнаружены экспериментально.

Ключевые слова: каналирование; изогнутый кристалл; туннелирование; критический радиус.

THE QUANTUM EFFECTS AT PARTICLE CHANNELING IN THE BENT CRYSTAL

NGUYEN QUANG SAN[a]***, I. D. FERANCHUK***[a]

[a]*Belarusian State University, Nezavisimosti avenue, 4, 220030, Minsk, Republic of Belarus*

This paper presents a quantum mechanical description of the relativistic charged particles channeling in bent crystals. The wave functions of the quasi-stationary states corresponding to the particles captured in channels are calculated in the analytical form. The quantum effects of under-barrier tunneling are essential in the case when a radius of the bend is closed to its critical value. Under these conditions the analytical expression for the particle capture efficiency on the localized states is also derived in the analytical form. The angular distribution for the particles at the exit crystal surface is calculated. The characteristic experimental parameters for which the quantum effects could be observed experimentally are estimated.

Key words: channeling; bent crystal; tunneling; critical radius.

Образец цитирования:

Нгуен Куанг Шан, Феранчук И. Д. Квантовые эффекты при каналировании частиц в изогнутом кристалле // Вестн. БГУ. Сер. 1, Физика. Математика. Информатика. 2016. № 3. С. 13–20.

For citation:

Nguyen Quang San, Feranchuk I. D. The quantum effects at particle channeling in the bent crystal. *Vestnik BGU. Ser. 1, Fiz. Mat. Inform.* 2016. No. 3. P. 13–20 (in Russ.).

Авторы:

Нгуен Куанг Шан – магистрант кафедры теоретической физики и астрофизики физического факультета. Научный руководитель – И. Д. Феранчук.

Илья Давыдович Феранчук – доктор физико-математических наук, профессор; заведующий кафедрой теоретической физики и астрофизики физического факультета.

Authors:

Nguyen Quang San, master's degree student at the department of theoretical physics and astrophysics, faculty of physics.
quangsanbsu@gmail.com

Ilya Feranchuk, doctor of science (physics and mathematics), full professor; head of the department of theoretical physics and astrophysics, faculty of physics.
feranchuk@bsu.by

В работе [1] представлен экспериментально обнаруженный эффект каналирования заряженных частиц в изогнутом монокристалле, который ранее был теоретически предсказан в [2]. В настоящее время этот эффект широко используется в физике высоких энергий для управления пучками заряженных частиц [3, 4]. В большинстве работ для интерпретации экспериментальных данных по каналированию в изогнутых кристаллах применяется классическая теория.

Максимальные значения угла поворота пучка возникают при минимально возможном значении радиуса изгиба кристалла $R_{\text{кр}}$, оценка для которого найдена в [2]. Однако, как было показано в работе [5], условия применимости классического приближения нарушаются при $R \approx R_{\text{кр}}$. Поэтому представляется важным детально исследовать движение частиц в изогнутых кристаллах с учетом ряда факторов, которые не описываются в рамках классической теории этого явления.

В настоящей работе (см. также [5]) построена квантовая теория плоскостного каналирования ультрарелятивистских частиц в изогнутых монокристаллах и исследованы квантовые эффекты при $R \approx R_{\text{кр}}$. Показано, что в этом случае угловое распределение частиц на выходе изменяется в силу отличной от нуля проницаемости барьера, создаваемого кристаллографической плоскостью, что приводит к иному угловому распределению частиц на выходе из кристалла и эффективности захвата в режим каналирования. Экспериментальное исследование подобных проявлений квантово-размерных эффектов в физике высоких энергий представляет методический интерес, а также может быть полезным для оптимизации параметров изогнутых кристаллов.

Рассмотрим уравнение, которое следует из уравнения Дирака и определяет стационарные состояния релятивистской частицы с энергией E и массой $m \ll E$ в кристалле без учета достаточно малых спиновых эффектов [5] (используется натуральная система единиц $\hbar = c = 1$):

$$\left\{\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} + E^2 - m^2 + 2EV(\vec{r})\right\}\Psi(\vec{r}) = 0. \tag{1}$$

Усредненный потенциал кристаллографических плоскостей изогнутого кристалла имеет цилиндрическую симметрию [3] и описывается функцией вида

$$V(r) = \sum_{n=-n_1}^{n_1} V_1(r - R - nd),$$

где $V_1(r - R - nd)$ – потенциал одной плоскости; R – радиус изгиба центрального канала; n_1 – количество кристаллографических плоскостей в направлении, перпендикулярном изгибу; $d \ll R$ – межплоскостное расстояние.

С учетом симметрии потенциала переменные в уравнении (1) разделяются в цилиндрической системе координат:

$$\Psi(\vec{r}) = \frac{u(r)}{\sqrt{r}}\exp\left[i(l\varphi + p_z z)\right]; \;\; l = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots.$$

Для решения этого уравнения удобно ввести относительную радиальную переменную $x = r - R$, $|x| \ll R$, и использовать условие $|V(r)| \ll E$. Тогда уравнение для функции $u(r)$ становится подобным уравнению Шрёдингера для поперечного движения в случае плоскостного каналирования [6]:

$$\left\{-\frac{d^2}{dx^2} + 2E_0 V_{\text{eff}}(x)\right\}u(x) = \varepsilon u(x).$$

Собственное значение для полной энергии частицы определяется квантовыми числами l, p_z и энергией радиального движения ε в поле эффективного потенциала $V_{\text{eff}}(x)$:

$$E \approx E_0 + \varepsilon; \; E_0^2 = m^2 + p_z^2 + \frac{l^2 - 1/4}{R^2};$$
$$V_{\text{eff}}(x) = V(x) + \frac{p_0^2}{E_0 R}x = V(x) + \frac{p_0 v}{R}x; \; p_0 = \sqrt{E_0^2 - m^2 - p_z^2}; \tag{2}$$

$$v = \frac{p_0}{E_0} \text{ – скорость частицы.}$$

Для иллюстрации дальнейших результатов в качестве примера будем рассматривать кристалл кремния Si, изогнутый вдоль плоскостей (110) ($d = 1{,}92$ Å). В этом случае для потенциала плоскости хорошим приближением является потенциал Пешля – Теллера (PT) [7]:

$$V_1(x) = a_{\mathrm{PT}} \tanh^2\left(\frac{x}{b_{\mathrm{PT}}}\right) \tag{3}$$

с параметрами $a_{\mathrm{PT}} = 23$ эВ, $b_{\mathrm{PT}} = 0{,}145\ d$ и $V_{1\max} = 6{,}37$ ГэВ/см.

Рассмотрим каналирование протонов с энергией $E = 70$ ГэВ, при которой проводились одни из первых экспериментов по каналированию в изогнутом кристалле [3]. На рис. 1 представлен потенциал $V_{\mathrm{eff}}(x)$, полученный с помощью (3) при $E_0 = 70$ ГэВ и при значении радиуса $R = 12{,}01$ см.

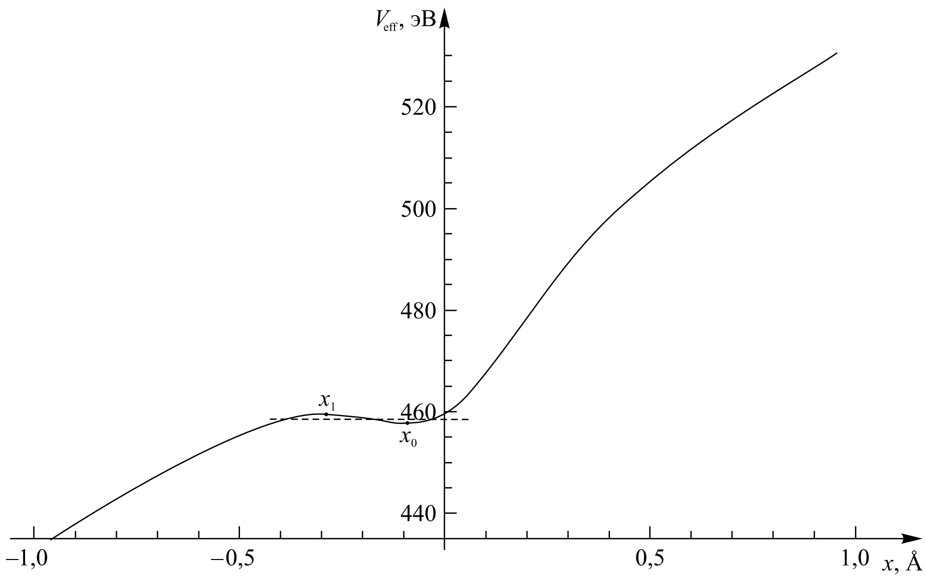

Рис. 1. Эффективный потенциал для частицы в изогнутом кристалле

Классическое условие возникновения связанного состояния частицы в канале состоит в том, чтобы потенциальная энергия $V_{\mathrm{eff}}(x)$ имела минимум в интервале $-\frac{d}{2} \le x \le \frac{d}{2}$. С учетом (2) это условие принимает следующий вид:

$$-\left|V'(x)\right|_{\max} + \frac{p_0 v}{R} \le 0. \tag{4}$$

Потенциал кристаллографической плоскости является функцией, монотонно возрастающей при $x \to \pm\frac{d}{2}$, поэтому условие (4) эквивалентно следующему неравенству для среднего радиуса изгиба кристалла:

$$R \ge \frac{p_0 v}{\left|V'(x)\right|_{\max}} \equiv R_{\text{кр}},$$
$$V'(x)_{\max} = V_{\mathrm{eff}}(x_1), \tag{5}$$

которое совпадает с выражением, полученным в работе [2].

Однако в квантовой теории условие (5) не является достаточным для того, чтобы частица была захвачена в канал и изменила направление движения на большой угол. Это связано с возможностью туннелирования частицы под потенциальным барьером (см. рис. 1) и с переходом в состояние непрерывного спектра, соответствующее прямолинейному движению частицы. Время жизни частицы в изогнутом канале, а следовательно, и угол поворота зависят от вида потенциала.

Отметим, что квантовый эффект подбарьерного туннелирования фактически является еще одним механизмом деканалирования захваченных в канал частиц наряду с известными классическими процессами [3]. В случае плоскостного каналирования при таких энергиях частицы квантовые эффекты пренебрежимо малы. Наиболее существенно влияние туннельной проницаемости в случае, когда радиус изгиба кристалла близок к своему критическому значению. При этом все вычисления можно провести аналитически для произвольного $V(x)$, поскольку вблизи критического радиуса $V_{\text{eff}}(x)$ может рассматриваться в гармоническом приближении.

При указанных выше параметрах $R_{\text{кр}} \approx 11{,}01$ см, так что выберем значение радиуса изгиба кристалла вблизи этого значения, например $R = 12{,}01$ см (см. рис. 1). В этом случае потенциал, действующий на частицу в изогнутом канале, можно приближенно записать в следующем виде:

$$V_{\text{eff}}(x) \approx \begin{cases} V_1 = \dfrac{1}{2} V''(x_0)(x - x_0)^2; \; x' < x < x_0, \\ V_2 = \Delta V - \dfrac{1}{2} \left| V''(x_1) \right| (x - x_1)^2; \; x < x', \end{cases} \tag{6}$$

где точка x' найдена из условия сшивки $V_1(x') = V_2(x')$ и $\Delta V = V_{\max}(x_1) - V_{\min}(x_0)$.

Для потенциала (6) квазистационарные уровни энергии частицы в изогнутом канале определяются формулой

$$\varepsilon_k \approx \omega\left(k + \frac{1}{2}\right) - i\Gamma_k/2 \equiv \varepsilon_k^{(0)} - i\Gamma_k/2; \;\; \omega = \left[\frac{V''(x_0)}{E_0}\right]^{1/2}. \tag{7}$$

Ширину уровня Γ_k можно найти, используя квазиклассическое выражение для коэффициента проницаемости через потенциальный барьер [8]:

$$\Gamma_k \equiv A\omega \exp\left[-2\int_b^a \sqrt{2E_0\left(V_{\text{eff}}(x) - \varepsilon_k^{(0)}\right)}dx\right], \tag{8}$$

где $A \approx 1$ – предэкспоненциальный множитель, а две точки поворота a и b определяются соотношением

$$a, b = x_1 \pm \sqrt{\frac{2\Delta V - (2k+1)\sqrt{\dfrac{V''(x_0)}{E_0}}}{\left|V''(x_1)\right|}}.$$

Максимальное число уровней связанных состояний находится из условия

$$k_{\max} < \frac{\Delta V}{\omega} - \frac{1}{2}.$$

При энергии частицы $E_0 = 70$ ГэВ

$$V_{\min} = 456{,}788 \text{ эВ}; \; V_{\max} = 457{,}193 \text{ эВ}; \; \omega = 0{,}112 \text{ эВ},$$

так что

$$k_{\max} < \frac{V_{\max} - V_{\min}}{\omega} - \frac{1}{2} = 3{,}12.$$

Это означает, что существуют 4 связанных уровня с квантовыми числами $k = 0, 1, 2, 3$ (при $E_0 = 80$ ГэВ, $k = 0, 1, 2$). Ширина этих уровней определяется по формуле (8). Аналогичные вычисления можно выполнить и при других энергиях частицы, результаты которых приведены в табл. 1. Таким образом, частица, захваченная в изогнутый канал на уровень с номером k, остается в нем при движении через весь кристалл длиной L при выполнении условия

$$\Gamma_k L \ll 1. \tag{9}$$

Это позволяет ввести характерное значение длины кристалла $L_k = 1/\Gamma_k$, при котором проявляются квантовые эффекты для определенного уровня связанного движения. Эту длину необходимо учитывать только для уровней, близких к вершине барьера, ее значения сильно зависят от энергии частицы. Результаты приведены в табл. 1.

Таблица 1

Параметры уровней связанного движения частицы в изогнутом канале

E_0, ГэВ	ω, эВ	k	Γ_2/ω	Γ_3/ω	L_2, см	L_3, см
70	0,112	0, 1, 2, 3	0,24	0,42	0,24	0,000 2
80	0,099	0, 1, 2	1,32	–	0,06	–

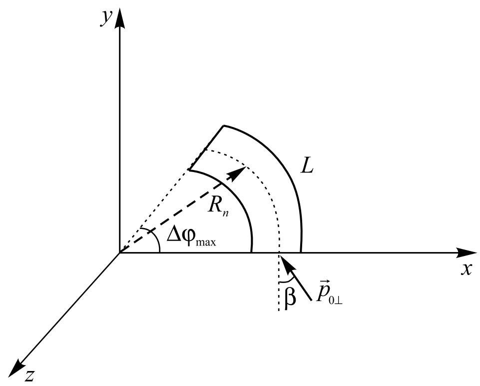

Рис. 2. Поворот пучка в изогнутом кристалле

При рассматриваемых энергиях, как видно из табл. 1, в захвате частицы участвуют только 2 связанных уровня.

Исследуем следующую геометрию эксперимента по изучению поворота пучка в изогнутом кристалле (рис. 2). Здесь $\vec{p}_0$ – импульс падающей частицы; поскольку кристалл предполагается однородным в направлении оси z, то без нарушения общности можно выбрать $p_{0z} = 0$; $p_{0x} \approx E_0 \sin\beta$; $p_{0y} \approx E_0 \cos\beta$; угол β определяет разброс по направлениям импульса в падающем пучке; ширина кристалла $L_x = 2n_1 d$, высота $L_z = h$, длина – L.

Для определения заселенности связанных уровней в изогнутом канале необходимо использовать условие непрерывности при $\varphi = 0$ для волновой функции, описывающей движение падающей на кристалл частицы, и суперпозиции стационарных волновых функций, являющихся решением уравнения Шрёдингера в кристалле.

При выполнении условия (9) волновая функция, определяющая связанное движение частицы в изогнутом канале с номером p, имеет следующий вид:

$$\Psi_{p_z,\, l,\, p,\, k} = \frac{e^{ip_z z}}{\sqrt{2\pi h}} \frac{e^{il\varphi}}{\sqrt{2\pi}} \left(\frac{1}{k!2^k} \sqrt{\frac{\alpha}{\pi}} \right)^{1/2} e^{-\frac{1}{2}\alpha x^2} \frac{H_k\left[\sqrt{\alpha}x\right]}{\sqrt{r}}, \tag{10}$$

где $x = r - R_n - x_0 - pd = r - r_p$; $\alpha = \sqrt{E_0 V''(x_0)}$; h – высота кристалла вдоль оси z; H_k – полином Эрмита.

Энергия, соответствующая волновой функции (10), определяется четырьмя квантовыми числами:

$$E_{p_z,\, l,\, p,\, k} = \sqrt{m^2 + p_z^2 + \frac{l^2 - 1/4}{R_n^2}} + p\Delta V + \omega\left(k + \frac{1}{2}\right).$$

Следует отметить, что выражение (10) аналогично формуле для волновой функции в плоском кристалле, однако из-за отсутствия периодичности потенциала в радиальном направлении энергетические уровни для изолированной ямы не расщепляются на $2n_1$ подуровней, образуя зону, а остаются различными для каждого канала. При этом квантовое число p определяет номер канала.

Прежде чем переходить к детальному исследованию граничной задачи, приведем классическую оценку для эффективности захвата (аксептансу) частицы в изогнутый канал. Искомую величину A_{cl} в рамках классической теории можно оценить как отношение фазового объема, отвечающего уровням связанного движения в канале, к фазовому объему падающего пучка [3, 5]:

$$A_{\text{cl}} \approx \left(1 - \frac{R_{\text{кр}}}{R}\right)^2 F\left(\frac{\pi\theta_{\text{c}}}{4\Delta\beta}\right);$$

$$\begin{cases} F(u) = 1; \ u > 1, \\ F(u) = u; \ u < 1, \end{cases} \tag{11}$$

причем величины $\theta_c = \sqrt{\dfrac{2a_{\text{РТ}}}{E_0}}$ и $\Delta\beta$ определяют угол Линдхарда и угловой разброс падающего пучка соответственно.

Рассмотрим теперь вывод формулы для аксептанса A_q в квантовом случае. Волновая функция частицы, падающей на кристалл из области $\varphi < 0$, определяется следующим выражением:

$$\Psi_0 = \int \frac{d\vec{q}}{(2\pi)^{3/2}} a(\vec{p}_0 - \vec{q}) \exp\left[i\left(q_z - \vec{q}\vec{r}_i\right)\right] \sum_l (-1)^l J_l(q_\perp r) e^{il(\varphi-\beta)},$$

где $a(\vec{p}_0 - \vec{q})$ описывает распределение частиц по направлениям в волновом пакете, удовлетворяющее условию нормировки $\int d\vec{q}\left|a(\vec{p}_0 - \vec{q})\right|^2 = 1;$ вектор $\vec{r}_i$ соответствует точке, вблизи которой локализован одночастичный волновой пакет при попадании его на кристалл; $J_l(q_\perp r)$ – функция Бесселя.

Волновая функция электрона внутри изогнутого кристалла имеет вид

$$\Psi_1 = \sum_\lambda C_\lambda \Psi_\lambda(r), \tag{12}$$

где λ – совокупность квантовых чисел p_z, l, k, p; $\Psi_\lambda(r)$ – стационарная волновая функция (10), а для определения коэффициентов C_λ необходимо вычислить интеграл

$$C_\lambda = \int_{-\infty}^{\infty} dz \int_0^{\infty} r dr \left[\Psi_0 \Psi_\lambda^*\right]_{\varphi=0} = \int \frac{d\vec{q}}{(2\pi)^{3/2}} a(\vec{p}_0 - \vec{q}) \exp\left[-i\left(\vec{q}\vec{r}_i + l\beta\right)\right] \int_{-\infty}^{\infty} dz \frac{e^{i(q_z - p_z)z}}{\sqrt{2\pi h}} \times$$

$$\times \int_0^{\infty} dr \sqrt{r} J_l(q_\perp r) C_k e^{-\frac{\alpha x^2}{2}} H_k\left(\sqrt{\alpha} x\right),$$

где $C_k = \left(\dfrac{1}{k!2^k}\sqrt{\dfrac{\alpha}{\pi}}\right)^{1/2}$ – нормировочная постоянная.

Используя интегральное представление функции Бесселя и метод перевала при условии $q_\perp R_n \gg 1$, находим величину C_λ в следующем виде:

$$C_\lambda = \int \frac{d\vec{q}}{(2\pi)^{3/2}} a(\vec{p}_0 - \vec{q}) \exp\left[-i\left(\vec{q}\vec{r}_i + l_\beta\right)\right] C_k (i)^{k+1/2} \frac{\sqrt{R_n}}{q_\perp} \frac{\delta(p_z - k_z)}{\sqrt{h}} \times$$

$$\times e^{\frac{-\alpha}{2q_\perp^2}\left(l - q_\perp r_p\right)^2} H_k\left(\frac{q_\alpha}{\sqrt{\alpha}}\left|q_\perp r_p - l\right|\right).$$

Предположим, что направления импульсов падающего пучка определяются распределением Гаусса с угловой шириной $\Delta\beta = \theta \approx \theta_c$. Тогда для вероятности того, что частица будет захвачена на один из связанных уровней в изогнутом канале, получаем следующее выражение:

$$P(r_i, r_p) = \sum_{k=0}^{k_1} \sum_l \frac{\theta}{\sqrt{\pi}} e^{-\theta^2 (l - p_0 r_i)^2} \frac{1}{k!2^k} \sqrt{\frac{\alpha}{\pi}} \frac{V''(x_0)}{p_0} \left(r_p - \frac{l}{p_0}\right)^2 \frac{R\alpha}{p_0 \Delta V} \times$$

$$\times e^{-\frac{\alpha}{p_0^2}\left(l - p_0 r_p\right)^2} H_k^2\left(\frac{\sqrt{\alpha}}{p_0}\left|l - p_0 r_p\right|\right), \tag{13}$$

где k_1 – максимальное значение k, для которого выполняется неравенство (9).

Аксептанс определяется в результате усреднения $P(r_i, r_p)$ по координатам падающих частиц в пределах площади поперечного сечения $S_b = hL_b$ пучка и суммирования по номерам каналов $-n_1 < p < n_1$. Кроме того, суммирование по l в (13) можно заменить интегрированием, так как в рассматриваемом случае релятивистских частиц число различных значений l, которые вносят вклад в (13), очень велико: $\Delta l \approx p_0 n_1 d \gg 1$.

В результате вычисления всех интегралов находим для аксептанса A_q следующее выражение:

$$A_q = \sum_{-n_1}^{n_1} \int \frac{dy_i dz_i}{S_b} P(r_i, r_p) = \sum_{k=0}^{k_1} \left(k + \frac{1}{2}\right) \frac{L_y}{L_b} \frac{V''(x_0) R}{dp_0^2 \Delta V} \approx \frac{L_y}{L_b} \sum_{k=0}^{k_1} \left(k + \frac{1}{2}\right) \frac{\omega^2}{dV'(x_0) \Delta V} =$$

$$= \frac{L_y}{L_b} \frac{\omega}{dV'(x_0)} \frac{k_1 (k_1 + 2)}{2k_1 + 1}, \tag{14}$$

где предполагается, что ширина пучка L_b больше ширины кристалла L_y.

Сравнение значений аксептанса A_q с классическими значениями A_{cl}, рассчитанными по формуле (11), для энергий частиц $E_0 = 70$ ГэВ, 80 ГэВ при $r_i \approx R_{\text{кр}}$, $\theta = \theta_\pi$ представлено в табл. 2.

Таблица 2

Эффективность захвата частицы в канал

E_0, ГэВ	k_1	A_q, %	A_{cl}, %
70	3	3,94	0,69
80	2	2,44	0,54

Если пренебречь эффектами деканалирования и объемного захвата [3], то частицы, заселившие уровни связанного движения с квантовым числом $k < k_1$, при выполнении условия $R \gg 2n_1$ будут двигаться по круговой траектории с радиусом R, что приведет к повороту захваченной части пучка на угол

$$\beta(L_r) = \frac{L_r}{R},$$

где $L_r \le L$ – путь, пройденный частицей в изогнутом кристалле.

При квантово-механическом описании состояние пучка после прохождения пути L_r определяется эволюцией коэффициентов заселенности в разложении волновой функции (12) по квазистационарным состояниям

$$\Psi_1(L_r) = \sum_{\lambda} C_\lambda \Psi_\lambda(r) e^{i\varepsilon_\lambda L_r}.$$

Тогда с учетом ширины уровней связанного движения (8) вероятность обнаружения частиц на k-м уровне после прохождения расстояния L_r в соответствии с формулой (14) находим в следующей форме:

$$P_k(L_r) \approx \frac{L_y}{L_b} \frac{(2k+1)}{(2k_1+1)} \frac{\omega}{dV'(x_0)} e^{-\frac{L_r}{L_k}}.$$

Учет туннелирования является существенным только для верхних уровней, для которых значения L_k при рассматриваемых параметрах приведены в табл. 1 (для нижних уровней $L_k \gg L$).

При длине кристалла L угол поворота определяется только той частью траектории, на которой частица находилась на соответствующем уровне связанного движения, и его можно рассчитать по следующей формуле:

$$\beta_k = \frac{L_k}{R} \left[1 - e^{-\frac{L}{L_k}}\right]. \tag{15}$$

Рассмотрим в качестве примера модель падающего пучка с равномерной плотностью вдоль оси y с $L_b = L_y$ и гауссовым распределением по углу β с шириной θ:

$$\frac{\theta}{\sqrt{\pi}} \Phi_0(\beta), \quad \Phi_0(\beta) = e^{-\frac{\beta^2}{\theta^2}}.$$

Тогда распределение по углам для интенсивности пучка на выходе из кристалла определяется следующим выражением:

$$I(\beta) = I_0 \Phi(\beta);$$

$$I_0 = \frac{\theta}{(2k_1 + 1)\sqrt{\pi}} \frac{\omega}{dV'(x_0)};$$

$$\Phi(\beta) = \sum_{k=0}^{k_1} (2k+1)\Phi_0(\beta - \beta_k),$$

где величина β_k определяется формулой (15). Характерная форма этой функции представлена на рис. 3 для двух энергий частицы при длине кристалла $L = 2$ см, $\theta = 10^{-3}$ рад. Графики построены в логарифмическом масштабе по углу вылета.

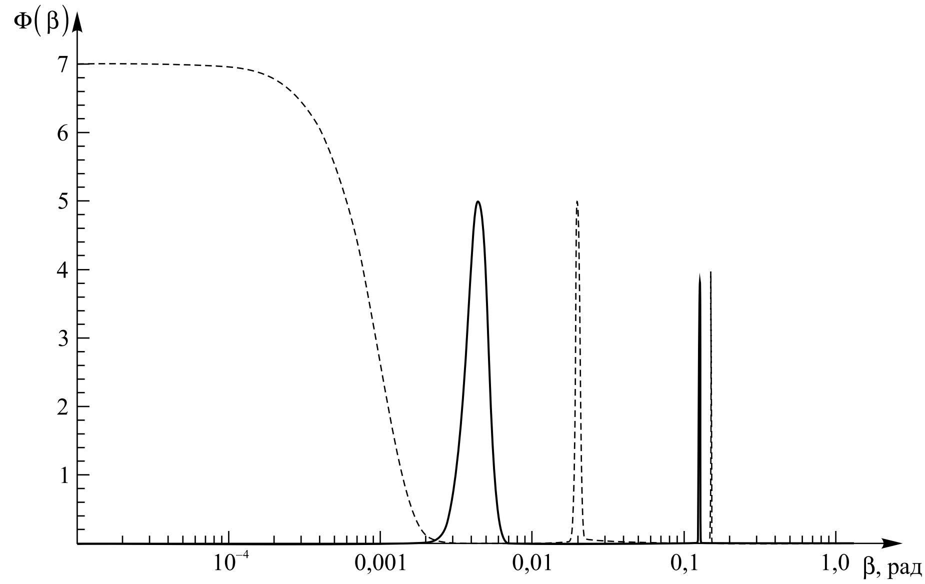

Рис. 3. Угловое распределение частиц на выходе из изогнутого кристалла:
------- $E_0 = 70$ ГэВ; ——— $E_0 = 80$ ГэВ

Квантовые эффекты, как показывает рис. 3, приводят к возникновению нескольких пиков в распределении частиц по углу поворота изогнутых кристаллов. Ширина и количество этих пиков существенно зависят от энергии частицы.

Авторы признательны профессору В. Г. Барышевскому за конструктивное обсуждение работы.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК (*REFERENCES*)

1. *Elishev A. F., Filatova N. A., Golovatyuk V. M.* Steering of charged particle trajectories by a bent crystal // Phys. Lett. B. 1979. Vol. 88. P. 387 [Elishev A. F., Filatova N. A., Golovatyuk V. M. Steering of charged particle trajectories by a bent crystal. *Phys. Lett. B.* 1979. Vol. 88. P. 387 (in Engl.)].

2. *Tsyganov E. N.* Channeling in the bent crystals // Fermilab. 1976. Vol. 682/684. P. 1 [Tsyganov E. N. Channeling in the bent crystals. *Fermilab.* 1976. Vol. 682/684. P. 1 (in Engl.)].

3. *Бирюков В. М., Котов В. И., Чесноков Ю. А.* Управление пучками заряженных частиц высоких энергий при помощи изогнутых монокристаллов // УФН. 1994. Т. 164. С. 1017–1040 [Biryukov V. M., Kotov V. I., Chesnokov Yu. A. Steering beams of high-energy charged particles by bent crystals. *Usp. fiz. nauk.* 1994. Vol. 164. P. 1017–1040 (in Russ.)].

4. *Tikhomirov V. V.* A technique to improve crystal channeling efficiency of charged particles // JINST. 2007. Vol. 2. P. 08006 [Tikhomirov V. V. A technique to improve crystal channeling efficiency of charged particles. *JINST.* 2007. Vol. 2. P. 08006 (in Engl.)].

5. *Феранчук И. Д.* Квантовая теория каналирования частиц в изогнутом кристалле // Журн. техн. физики. 1981. Т. 51. С. 270 [Feranchuk I. D. Kvantovaya teoriya kanalirovaniya chastits v izognutom kristalle. *Zhurnal tekhnicheskoi fiz.* 1981. Vol. 51. P. 270 (in Russ.)].

6. *Барышевский В. Г.* Каналирование, излучение и реакции в кристаллах при высоких энергиях. Минск, 1982.

7. *Gemmell D. S.* Channeling and related effects in the motion of charged particles through crystals // Rev. Mod. Phys. 1974. Vol. 46. P. 129 [Gemmell D. S. Channeling and related effects in the motion of charged particles through crystals. *Rev. Mod. Phys.* 1974. Vol. 46. P. 129 (in Engl.)].

8. *Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М.* Квантовая механика. М., 1974.

Статья поступила в редколлегию 20.04.2016.
Received by editorial board 20.04.2016.