...ния уравнения третьего порядка // Вестник БГУ. Сер. 1. 2008. № 3. С. 54-60.

ГРАНИЧНЫЕ ЗАДАЧИ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ ЧЕТВЕРТОГО ПОРЯДКА СОСТАВНОГО ТИПА

В.И. Корзюк, О.А. Конопелько (Минск, Беларусь)

Для функции u независимых переменных $\boldsymbol{x} = (x_0, \ldots, x_n)$ $n+1$ - мерного евклидова пространства $\mathbb{R}^{n+1}$ рассматривается линейное дифференциальное уравнение

$$\mathcal{L}u = \frac{\partial^4 u}{\partial x_0^4} + (b^2 - a^2)\frac{\partial^2}{\partial x_0^2}\Delta u - a^2 b^2 \Delta^2 u + A^{(3)}u = f(\boldsymbol{x}), \tag{1}$$

где оператор Лапласа $\Delta = \sum_{i=1}^{n} \partial^2/\partial x_i^2$,

$$A^{(3)}u = \sum_{|\boldsymbol{\alpha}| \leqslant 3} a^{(\boldsymbol{\alpha})}(\boldsymbol{x}) \boldsymbol{D}^{\boldsymbol{\alpha}} u,$$

$\alpha = (\alpha_0, \ldots, \alpha_n)$ – мультииндекс, оператор дифференцирования $\boldsymbol{D} = (D_0 \ldots D_n)$, $\boldsymbol{D}^{\boldsymbol{\alpha}} u = \partial^{|\boldsymbol{\alpha}|} u / \partial x_0^{\alpha_0} \ldots \partial x_n^{\alpha_n}$, $|\boldsymbol{\alpha}| = \alpha_0 + \ldots + \alpha_n$, $a^{(\boldsymbol{\alpha})}(\boldsymbol{x})$, $f(\boldsymbol{x})$ – заданные функции.

Уравнение (1) задается в цилиндрической области $Q = (0, T) \times \Omega$. Граница $\partial\Omega$ состоит из нижнего основания $\Omega_0 = \{\boldsymbol{x} \in \partial\Omega | \, x_0 = 0\}$, верхнего основания $\Omega_T = \{\boldsymbol{x} \in \partial\Omega | \, x_0 = T\}$ и боковой поверхности $\Gamma = \{\boldsymbol{x} \in \partial\Omega | \, 0 < x_0 < T\}$, которая является кусочно гладкой.

Для уравнения (1) рассматриваются следующие задачи:

Задача 1:

$$b^2 > a^2,$$
$$\mathcal{L}u = f, \quad \boldsymbol{x} \in Q,$$
$$l_0 \equiv u|_{\Omega^{(0)}} = \varphi^{(0)}(\boldsymbol{x}\prime), \quad \left.\frac{\partial u}{\partial x_0}\right|_{\Omega^{(0)}} = 0, \quad l_2 u \equiv \left.\frac{\partial^2 u}{\partial x_0^2}\right|_{\Omega^{(0)}} = \varphi^{(2)}(\boldsymbol{x}\prime),$$
$$\left.\frac{\partial^2 u}{\partial x_0^2}\right|_{\Omega^{(T)}} = 0, \quad u|_\Gamma = \left.\frac{\partial^2 u}{\partial \boldsymbol{\nu}^2}\right|_\Gamma = 0,$$

$\boldsymbol{x}\prime = (x_1, ..., x_n) \in \Omega \subset \mathbb{R}^n$, $\boldsymbol{\nu} = (\nu_0, ..., \nu_n)$ – единичный вектор внешней относительно Q нормали к гиперповерхности Γ.

Задача 2:

$$b^2 > a^2,$$
$$\mathcal{L}u = f, \quad \boldsymbol{x} \in Q,$$
$$\left.\frac{\partial^2 u}{\partial x_0^2}\right|_{\Omega^{(0)}} = 0,$$
$$l_0 \equiv u|_{\Omega^{(T)}} = \varphi^{(0)}(\boldsymbol{x}\prime), \quad \left.\frac{\partial u}{\partial x_0}\right|_{\Omega^{(T)}} = 0, \quad l_2 u \equiv \left.\frac{\partial^2 u}{\partial x_0^2}\right|_{\Omega^{(T)}} = \varphi^{(2)}(\boldsymbol{x}\prime),$$
$$u|_\Gamma = \left.\frac{\partial^2 u}{\partial \boldsymbol{\nu}^2}\right|_\Gamma = 0.$$

Задача 3: Рассматривается задача 1, где вместо условия $\left.\frac{\partial^2 u}{\partial x_0^2}\right|_{\Omega^{(T)}} = 0$ на верхнем основании $\Omega^{(T)}$ задается условие $\left.\frac{\partial u}{\partial x_0}\right|_{\Omega^{(T)}} = 0$.

Задача 4: В задаче 2, и вместо условия $\left.\frac{\partial^2 u}{\partial x_0^2}\right|_{\Omega^{(0)}} = 0$ на нижнем основании $\Omega^{(0)}$ задается условие $\left.\frac{\partial u}{\partial x_0}\right|_{\Omega^{(0)}} = 0$.

Задачи 5–8: Рассматриваются задачи 1–4 соответственно, и вместо условия $u|_\Gamma = \left.\frac{\partial^2 u}{\partial \nu^2}\right|_\Gamma = 0$ на боковой поверхности Γ задается условие $\frac{\partial u}{\partial \nu}\big|_\Gamma = \left.\frac{\partial^3 u}{\partial \nu^3}\right|_\Gamma = 0$.

Задачи 9–12: В задачах 1–4 на боковой поверхности Γ вместо условия $u|_\Gamma = \left.\frac{\partial^2 u}{\partial \nu^2}\right|_\Gamma = 0$ задается условие $u|_\Gamma = \frac{\partial u}{\partial \nu}\big|_\Gamma = 0$.

Задачи 1–12 также можно рассматривать и в случае $b^2 = a^2$, но функциональные пространства будут другими.

Задачи 13–16: В задачах 1–4 рассматривается случай $b^2 = a^2$, вместо условия $u|_\Gamma = \left.\frac{\partial^2 u}{\partial \nu^2}\right|_\Gamma = 0$ на боковой поверхности Γ задается условие $\left.\frac{\partial^2 u}{\partial \nu^2}\right|_\Gamma = \left.\frac{\partial^3 u}{\partial \nu^3}\right|_\Gamma = 0$.

Задачи 17–32: В задачах 1–16 рассматривается случай $b^2 = a^2$, вместо условия $\left.\frac{\partial u}{\partial x_0}\right|_{\Omega^{(0)}} = 0$ из трех условий на $\Omega^{(0)}$ или условия $\left.\frac{\partial u}{\partial x_0}\right|_{\Omega^{(T)}} = 0$ из трех условий на $\Omega^{(T)}$ задается условие $\left.\frac{\partial^3 u}{\partial x_0^3}\right|_{\Omega^{(0)}} = 0$ или $\left.\frac{\partial^3 u}{\partial x_0^3}\right|_{\Omega^{(T)}} = 0$ соответственно.

Рассмотрен случай $b^2 < a^2$. Для него изучены следующие задачи:

Задачи 33–38:

$$\mathcal{L}u = f, \quad \boldsymbol{x} \in Q,$$

$$\left.\frac{\partial u}{\partial x_0}\right|_{\Omega^{(0)}} = \left.\frac{\partial^2 u}{\partial x_0^2}\right|_{\Omega^{(0)}} = \left.\frac{\partial^3 u}{\partial x_0^3}\right|_{\Omega^{(0)}} = 0,$$

на $\Omega^{(T)}$ задается условие $u|_{\Omega^{(T)}} = 0$ или условие $\left.\frac{\partial u}{\partial x_0}\right|_{\Omega^{(T)}} = 0$,

на Γ задается условие $u|_\Gamma = \frac{\partial u}{\partial \nu}\big|_\Gamma = 0$, или $u|_\Gamma = \left.\frac{\partial^2 u}{\partial \nu^2}\right|_\Gamma = 0$, или $\frac{\partial u}{\partial \nu}\big|_\Gamma = \left.\frac{\partial^2 u}{\partial \nu^2}\right|_\Gamma = 0$.

Задачи 38–44:

$$\mathcal{L}u = f, \quad \boldsymbol{x} \in Q,$$

на $\Omega^{(0)}$ задается условие $u|_{\Omega^{(0)}} = 0$ или условие $\left.\frac{\partial u}{\partial x_0}\right|_{\Omega^{(0)}} = 0$,

$$\left.\frac{\partial u}{\partial x_0}\right|_{\Omega^{(T)}} = \left.\frac{\partial^2 u}{\partial x_0^2}\right|_{\Omega^{(T)}} = \left.\frac{\partial^3 u}{\partial x_0^3}\right|_{\Omega^{(T)}} = 0,$$

на Γ задается условие $u|_\Gamma = \frac{\partial u}{\partial \nu}\big|_\Gamma = 0$, или $u|_\Gamma = \left.\frac{\partial^2 u}{\partial \nu^2}\right|_\Gamma = 0$, или $\frac{\partial u}{\partial \nu}\big|_\Gamma = \left.\frac{\partial^2 u}{\partial \nu^2}\right|_\Gamma = 0$.

В подходящих функциональных пространствах при некоторых ограничениях на данные доказано существование и единственность сильного решения задач 1–44. Доказательство проведено методом энергетических неравенств и операторов осреднения с переменным шагом, используя методы функционального анализа.