Вестник БГУ. Сер. 1. 2016. № 2. С. 116–122

УДК 519.4

ТОЧНЫЕ *D*-ОПТИМАЛЬНЫЕ ПЛАНЫ ЭКСПЕРИМЕНТОВ ДЛЯ ЛИНЕЙНОЙ МОДЕЛИ ПАРНОЙ РЕГРЕССИИ

В. П. КИРЛИЦА[1)]

[1)]*Белорусский государственный университет, пр. Независимости, 4, 220030, г. Минск, Республика Беларусь*

Рассмотрена модель неравноточных наблюдений

$$y_i = \theta_0 + \theta_1 x_i + \varepsilon(x_i),\ i = \overline{1, n},\ n \ge 2.$$

Отмечается, что ошибки наблюдений $\varepsilon(x_i)$ некоррелированны, имеют нулевые средние значения и дисперсии $D\{\varepsilon(x_i)\} = d_i(x_i) > 0,\ x_i \in [-1, 1].$ Функции $d_i(x_i)$ удовлетворяют неравенствам

$$d_i(x_i) \ge \frac{1}{4}\left(\left(d_{i_1} + d_{i_2}\right)x_i^2 + 2\left(d_{i_2} - d_{i_1}\right)x_i + d_{i_1} + d_{i_2}\right),\ d_{i_1} = d_i(-1) > 0,\ d_{i_2} = d_i(1) > 0,\ i = \overline{1, n}.$$

Класс функций $d_i(x_i)$, удовлетворяющих этим неравенствам, обширен: постоянные функции, с линейным изменением, вогнутые функции. Доказано, что точки спектра точного *D*-оптимального плана экспериментов для данной модели принимают значение 1 или –1. Если в каждом эксперименте дисперсия наблюдения задается одной и той же функцией $d(x)$, то в этом случае точный *D*-оптимальный план экспериментов для модели неравноточных наблюдений совпадает с планом для равноточных наблюдений. Для некоторых функций $d(x)$ точный *D*-оптимальный план экспериментов для нечетного числа наблюдений может отличаться от классического точного *D*-оптимального плана экспериментов для равноточных наблюдений. Следовательно, если в каждом эксперименте наблюдения равноточные, но имеют разные дисперсии, то в этом случае можно эффективно строить точные планы для некоторых типов экспериментов.

Ключевые слова: линия регрессии; неравноточные наблюдения; *D*-оптимальные планы экспериментов; структура точных *D*-оптимальных планов.

EXACT *D*-OPTIMAL DESIGNS OF EXPERIMENTS FOR LINEAR MODEL OF PAIR REGRESSION

V. P. KIRLITSA[a]

[a]*Belarusian State University, Nezavisimosti avenue, 4, 220030, Minsk, Republic of Belarus*

In article the model of heteroscedastic observations

$$y_i = \theta_0 + \theta_1 x_i + \varepsilon(x_i),\ i = \overline{1, n},\ n \ge 2,$$

is considered. Errors $\varepsilon(x_i)$ of observations are not correlated also their means are equal to zero, variances equal to $D\{\varepsilon(x_i)\} = d_i(x_i) > 0,\ x_i \in [-1, 1].$ Functions $d_i(x_i)$ are satisfies to inequalities

Образец цитирования:

Кирлица В. П. Точные *D*-оптимальные планы экспериментов для линейной модели парной регрессии // Вестн. БГУ. Сер. 1, Физика. Математика. Информатика. 2016. № 2. С. 116–122.

For citation:

Kirlitsa V. P. Exact *D*-optimal designs of experiments for linear model of pair regression. *Vestnik BGU. Ser. 1, Fiz. Mat. Inform.* 2016. No. 2. P. 116–122 (in Russ.).

Автор:

Валерий Петрович Кирлица – кандидат физико-математических наук; доцент кафедры математического моделирования и анализа данных факультета прикладной математики и информатики.

Author:

Valery Kirlitsa, PhD (physics and mathematics); associate professor at the department of mathematical analysis and date analysis, faculty of applyed mathematics and informatics.
kirlitsa@bsu.by

$$d_i(x_i) \geq \frac{1}{4}\left(\left(d_{i_1} + d_{i_2}\right)x_i^2 + 2\left(d_{i_2} - d_{i_1}\right)x_i + d_{i_1} + d_{i_2}\right),\ d_{i_1} = d_i(-1) > 0,\ d_{i_2} = d_i(1) > 0,\ i = \overline{1, n}.$$

Functions satisfying to these inequalities have extensive class: constant functions, with linear change, concave functions. It is proved that spectrum points of exact *D*-optimal design of experiments for this model take values 1 or –1. If in each experiment variance of observation defined one and only one function $d(x)$, then in this case exact *D*-optimal design of experiments for heteroscedastic model observations coincide with design for homoscedastic observations. For some functions $d(x)$ *D*-optimal design of experiments can differ from the classical exact *D*-optimal design for homoscedastic observations. If in each experiment we have homoscedastic observations but have different variances then in this case it is possible construct effective designs for some type of experiments.

Key words: linear regression; heteroscedastic observations; *D*-optimal designs of experiments; structure of exact *D*-optimal designs.

Данная статья является продолжением исследований автора [1–3; 4, с. 234–240] по построению так называемых точных *D*-оптимальных планов экспериментов для линейных моделей наблюдений. Термин «точные» связан с тем, что такие планы строятся для фиксированного, заданного числа наблюдений *n* [5].

Рассмотрим линейную модель наблюдений:

$$y_i = \theta_0 + \theta_1 x_i + \varepsilon_i(x_i),\ i = 1, 2, \ldots, n,\ n \geq 2, \tag{1}$$

где y_i – наблюдаемые значения; θ_0, θ_1 – неизвестные параметры; x_i – контролируемые переменные из интервала $[-1, 1]$. Ошибки наблюдений $\varepsilon_i(x_i)$ зависят от точек x_i, в которых проводятся наблюдения, они являются случайными, некоррелированными величинами с нулевыми математическими ожиданиями и ограниченными дисперсиями $D\{\varepsilon_i(x_i)\} = d_i(x_i) > 0$ для каждой реализации $x_i \in [-1, 1]$. Ковариационная матрица вектора ошибок наблюдений – диагональная матрица с элементами $d_i(x_i)$, удовлетворяющими неравенствам:

$$d_i(x_i) \geq \frac{1}{4}\left\{\left[d_{i1} + d_{i2}\right]x_i^2 + 2\left[d_{i2} - d_{i1}\right]x_i + d_{i1} + d_{i2}\right\},\ d_{i1} = d_i(-1),\ d_{i2} = d_i(1),\ x_i \in [-1, 1],\ i = \overline{1, n}. \tag{2}$$

Легко проверить, что построенному классу функций $d_i(x_i)$ удовлетворяют равноточные наблюдения ($d_i(x_i) = d = \text{const}$), линейное изменение дисперсии наблюдений ($d_i(x_i) = a_i + b_i x,\ a_i > 0,\ |b_i| < a_i$), а также все вогнутые функции, положительные на интервале $[-1, 1]$.

В [1] построены точные *D*-оптимальные планы экспериментов для модели наблюдений (1) в случае, если дисперсии наблюдений $d_i(x_i)$ описываются одной и той же функцией $d(x_i)$. В настоящей работе этот результат обобщен на случай, когда дисперсия каждого наблюдения может определяться своей собственной функцией.

Лемма. *Для модели наблюдений (1), у которой дисперсии наблюдений* $d_i(x_i)$ *удовлетворяют неравенствам (2), существует точный D-оптимальный план экспериментов, для которого все точки спектра лежат на концах интервала* $[-1, 1]$.

Доказательство. Рассмотрим произвольный план наблюдений ε, сосредоточенный в *n* точках $x_1, x_2, \ldots, x_n$. Покажем, что от плана ε можно перейти к плану ε_1 с точками спектра $x_i = \pm 1$, $i = \overline{1, n}$, для которого определитель информационной матрицы $M(\varepsilon_1)$ больше или равен определителю информационной матрицы $M(\varepsilon)$ плана ε, $|M(\varepsilon)| \leq |M(\varepsilon_1)|$. Для этого точку x_1 спектра плана ε сделаем «плавающей», т. е. $x_1 = x \in [-1, 1]$. Остальные значения x_i, $i = \overline{2, n}$, остаются фиксированными. Полученный план обозначим через ε_x. Расчеты показывают, что определитель информационной матрицы $M(\varepsilon_x)$ равен

$$|M(\varepsilon_x)| = \frac{\alpha x^2 - 2\beta x + \gamma}{d_1(x)} + p, \tag{3}$$

где

$$\alpha = \sum_{i=2}^{n} \frac{1}{d_i(x_i)},\ \beta = \sum_{i=2}^{n} \frac{x_i}{d_i(x_i)},\ \gamma = \sum_{i=2}^{n} \frac{x_i^2}{d_i(x_i)},\ p = \sum_{i=2}^{n} \frac{1}{d_i(x_i)} \sum_{i=2}^{n} \frac{x_i^2}{d_i(x_i)} - \left(\sum_{i=2}^{n} \frac{x_i^2}{d_i(x_i)}\right)^2. \tag{4}$$

Обозначим через k отношение дисперсий наблюдений $d_1(x)$ в точках 1 и –1, т. е. $k = \frac{d_{12}}{d_{11}}$. В дальнейшем рассмотрим только случай $k > 1$, так как для $k \le 1$ рассуждения можно провести по аналогичной схеме.

Используя (2) и (3), можно оценить определитель $M(\varepsilon_x)$ сверху:

$$\left|M(\varepsilon_x)\right| \le \frac{4}{d_{11}} f(x) + p, \tag{5}$$

где

$$f(x) = \frac{\alpha x^2 - 2\beta x + \gamma}{(1+k)x^2 + 2(k-1)x + 1 + k}.$$

В точках –1 и 1 неравенство (5) обращается в равенство. Вычислим максимум $\left|M(\varepsilon_x)\right|$ по $x \in [-1, 1]$ и покажем, что максимум достигается на одном из концов этого интервала. Поскольку константы α, β, γ, p, d_{11} не зависят от x, то в силу (5) максимизация $\left|M(\varepsilon_x)\right|$ сводится к максимизации $f(x)$ по x и выяснению того, что этот максимум достигается при $x = \pm 1$.

Производная функции $f(x)$ равна

$$\frac{df(x)}{dx} = \frac{2}{1+k} \frac{(\alpha x + \beta)x^2 + (\alpha - \beta)x - \beta - \gamma\lambda}{\left(x^2 + 2\lambda x + 1\right)^2},\ \lambda = \frac{k-1}{k+1}. \tag{6}$$

В (6) величина $\lambda \in (0, 1)$ для $k > 1$. Из (4) следует, что $\alpha - \gamma \ge 0$. Если $\alpha\lambda + \beta = 0$ и $\alpha - \gamma = 0$, то производная (6) имеет постоянный знак на интервале $[-1, 1]$. В этом случае максимум $f(x)$ достигается на одном из концов интервала $[-1, 1]$, если $-\beta - \gamma\lambda \ne 0$. Если все коэффициенты параболы, стоящей в числителе (6), равны нулю, то в этом случае функция $f(x)$ не зависит от x и можно считать, что ее максимальное значение достигается при $x = 1$ либо $x = -1$.

Если $\alpha\lambda + \beta = 0$ и $\alpha - \gamma = 0$, то знак производной (6) зависит от положения корня

$$\mu = \frac{\beta + \gamma\lambda}{\alpha - \gamma}$$

линейного уравнения $(\alpha - \gamma)x - \beta - \gamma\lambda = 0$ относительно отрезка $[-1, 1]$. Если $\mu \le -1$, то производная (6) положительна на интервале $(-1, 1]$ и функция $f(x)$ на интервале $[-1, 1]$ достигает своего максимального значения при $x = 1$. Если $-1 < \mu < 1$ и $\alpha - \gamma > 0$, то на интервале $(-1, \mu]$ производная (6) отрицательна, а на интервале $(\mu, 1]$ она положительна. Это означает, что своего максимального значения на интервале $[-1, 1]$ функция $f(x)$ достигает на одном из концов интервала $[-1, 1]$. Если $\mu \ge 1$ и $\alpha\lambda + \beta = 0$, $\alpha - \gamma > 0$, то в этом случае производная (6) на интервале $[-1, 1]$ отрицательна, т. е. функция $f(x)$ достигает своего максимального значения на левом конце интервала $[-1, 1]$. Итак, в любом случае при $\alpha\lambda + \beta = 0$ максимум функции $f(x)$ достигается при $x = 1$ либо $x = -1$.

Если $\alpha\lambda + \beta < 0$, то знак производной (6) определяется знаком параболы

$$y = (\alpha\lambda + \beta)x^2 + (\alpha - \gamma)x - \beta - \gamma\lambda$$

на интервале $[-1, 1]$. Обозначим через

$$D = (\alpha - \gamma)^2 + 4(\alpha\lambda + \beta)(\beta + \gamma\lambda)$$

дискриминант исследуемой параболы. Если $D < 0$ и $\alpha\lambda + \beta < 0$, то производная (6) отрицательна для всех x из $[-1, 1]$. Функция $f(x)$ на интервале $[-1, 1]$ достигает максимального значения при $x = -1$. Если $D \geq 0$ и $\alpha\lambda + \beta < 0$, то в этом случае парабола пересекает ось x в точках

$$x_1 = \frac{\alpha - \gamma - \sqrt{D}}{-2(\alpha\lambda + \beta)},\ x_2 = \frac{\alpha - \gamma + \sqrt{D}}{-2(\alpha\lambda + \beta)}.$$

Покажем, что $-1 \leq x_1 < 0$, а $x_2 \geq 1$. Воспользуемся тем, что $\alpha \geq \gamma$, $\alpha > 0$, $\gamma \geq 0$. Поскольку $\alpha\lambda + \beta < 0$, то отсюда заключаем, что $\beta < 0$. Но тогда $\beta + \gamma\lambda < 0$. Проверим это. Предположим противное, т. е. $\beta + \gamma\lambda \geq 0$. Отсюда вытекает, что $\beta \geq -\gamma\lambda$. С другой стороны, $\beta < -\alpha\lambda$. Имеем: $-\gamma\lambda \leq \beta < -\alpha\lambda$. Значит, $-\gamma\lambda < -\alpha\lambda$, или $\gamma < \alpha$. Получили противоречие. Теперь поскольку $(\alpha\lambda + \beta)(\beta + \gamma\lambda) > 0$, то, очевидно, $x_1 < 0$. Проверим теперь, что $x_1 \geq -1$. Если выполняется это неравенство, то оно сводится к неравенству

$$\sqrt{(\alpha - \gamma)^2 + 4(\alpha\lambda + \beta)(\beta + \gamma\lambda)} \leq \alpha - \gamma - 2(\alpha\lambda + \beta).$$

Правая часть этого неравенства положительна. Возведем в квадрат обе части неравенства:

$$(\alpha\lambda + \beta)(\beta + \gamma\lambda) \leq -(\alpha - \gamma)(\alpha\lambda + \beta) + (\alpha\lambda + \beta)^2.$$

Поделим обе части этого неравенства на $\alpha\lambda + \beta < 0$. Приходим к неравенству $\gamma(\lambda - 1) \geq \alpha(\lambda - 1)$. Поскольку $\lambda - 1 < 0$, то получаем верное неравенство $\gamma \leq \alpha$. Итак, доказано, что $-1 \leq x_1 < 0$. Осталось показать, что $x_2 \geq 1$. Это неравенство сводится к следующему:

$$\sqrt{(\alpha - \gamma)^2 + 4(\alpha\lambda + \beta)(\beta + \gamma\lambda)} \geq \gamma - \alpha - 2(\alpha\lambda + \beta). \tag{7}$$

Если правая часть неравенства (7) меньше или равна нулю, то (7) выполняется. Если правая часть (7) положительна, то обе части неравенства можно возвести в квадрат. Получим

$$(\alpha\lambda + \beta)(\beta + \gamma\lambda) \geq -(\gamma - \alpha)(\alpha\lambda + \beta) + (\alpha\lambda + \beta)^2. \tag{8}$$

Разделим обе части (8) на $\alpha\lambda + \beta < 0$ и сведем его к верному неравенству $\gamma \leq \alpha$. Итак, доказано, что $x_2 \geq 1$.

Продолжим исследование производной (6) при условии $\alpha\lambda + \beta < 0$, $D \geq 0$. В этом случае $D > 0$, так как было доказано, что $-1 \leq x_1 < 0$, $x_2 \geq 1$. Если $x_1 = -1$, то на интервале $(-1, 1]$ производная (6) больше нуля, т. е. максимум $f(x)$ на интервале $[-1, 1]$ достигается при $x = 1$. Если $-1 < x_1 < 0$, то на интервале $[-1, x_1)$ производная (6) отрицательна, а на интервале $(x_1, 1]$ она положительна, т. е. максимум $f(x)$ достигается в точке -1 либо 1.

Наконец, рассмотрим случай, когда $\alpha\lambda + \beta > 0$. Если $D < 0$, то производная (6) строго положительна и, значит, максимум функции $f(x)$ достигается при $x = 1$. Если же $D \geq 0$, то корни уравнения $(\alpha\lambda + \beta)x^2 + (\alpha - \gamma)x - \beta - \gamma\lambda = 0$ следующие:

$$x_1 = \frac{\gamma - \alpha - \sqrt{D}}{2(\alpha\lambda + \beta)};\ x_2 = \frac{\gamma - \alpha + \sqrt{D}}{2(\alpha\lambda + \beta)}.$$

Аналогично тому, как исследовались корни квадратного уравнения в случае, когда $\alpha\lambda + \beta$ отрицательно, а $D \geq 0$, можно показать, что $x_1 \leq -1$, $0 < x_2 \leq 1$. Если $x_2 = 1$, то производная (6) на интервале $[-1, 1)$ отрицательна, т. е. функция $f(x)$ принимает наибольшее значение в точке $x = -1$. Если $0 < x_2 < 1$, то на интервале $[-1, x_2)$ производная (6) отрицательна, а на интервале $(x_2, 1]$ она положительна.

Следовательно, максимальное значение $f(x)$ достигается на концах интервала $[-1, 1]$. Итак, в любом случае максимум функции $f(x)$ достигается на концах интервала $[-1, 1]$.

Зафиксируем значение x_1, при котором определитель информационной матрицы достиг своего максимального значения. Аналогичным образом повторим процесс максимизации определителя информационной матрицы последовательно по переменным $x_2, \ldots, x_n$. В итоге получим, что $|M(\varepsilon)| \le |M(\varepsilon_1)|$, где ε_1 – план экспериментов, в котором все точки спектра равны ± 1. Ясно, что один из точных D-оптимальных планов находится среди планов ε_1. Лемма доказана.

Теорема 1. *Точки спектра точного D-оптимального плана экспериментов для модели наблюдений (1), (2) – координаты* $x_i = \pm 1,\ i = \overline{1, n}$, *одной из вершин единичного n-мерного куба*, *доставляющие максимум функции*

$$f(x_1, \ldots, x_n) = \left(\sum_{i=1}^{n} \frac{1 - x_i}{d_i(x_i)}\right)\left(\sum_{i=1}^{n} \frac{1 + x_i}{d_i(x_i)}\right), \tag{9}$$

при условии, что этот максимум берется по всем вершинам этого куба.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Учитывая доказанную лемму, точный D-оптимальный план экспериментов ε_n^0 следует искать среди планов ε_n, у которых точки спектра плана лежат в вершинах единичного n-мерного куба $-1 \le x_i \le 1,\ i = \overline{1, n}.$ Определитель информационной матрицы таких планов равен

$$|M(\varepsilon_n)| = \left|\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{d_i(x_i)} \begin{pmatrix} 1 \\ x_i \end{pmatrix} (1,\ x_i)\right| = \left(\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{d_i(x_i)}\right)\left(\sum_{i=1}^{n} \frac{x_i^2}{d_i(x_i)}\right) - \left(\sum_{i=1}^{n} \frac{x_i}{d_i(x_i)}\right)^2 =$$

$$= \left(\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{d_i(x_i)}\right)^2 - \left(\sum_{i=1}^{n} \frac{x_i}{d_i(x_i)}\right)^2 = \left(\sum_{i=1}^{n} \frac{1 - x_i}{d_i(x_i)}\right)\left(\sum_{i=1}^{n} \frac{1 + x_i}{d_i(x_i)}\right) = f(x_1, \ldots, x_n).$$

По определению точный D-оптимальный план ε_n^0 – это тот план, который максимизирует функцию (9). Теорема 1 доказана.

Можно получить ряд следствий из теоремы 1, в которых задача построения точного D-оптимального плана эксперимента упрощается.

Теорема 2 [2]. *Для модели наблюдений (1), (2) с дисперсиями* $d_i(x_i) = d_i,\ i = \overline{1, n}$, *не зависящими от* x_i, *точки спектра* $x_i^0,\ i = \overline{1, n}$, *точного D-оптимального плана экспериментов лежат на концах интервала* $[-1, 1]$, *и это такие комбинации точек, для которых абсолютная величина*

$$\left|\sum_{i=1}^{n} \frac{x_i^0}{d_i}\right|$$

принимает минимальное значение.

Из теоремы 2 следует, что если ε_n^0 является D-оптимальным планом, то симметричный ему план $\varepsilon_1 = -\varepsilon_n^0$ относительно нуля будет также D-оптимальным.

Рассмотрим теперь случай, когда серия из n независимых наблюдений подразделяется на две серии: $y_1, \ldots, y_{n_1}, \overline{y}_1, \ldots, \overline{y}_{n_2},\ n = n_1 + n_2$. Наблюдения $y_1, \ldots, y_{n_1}$ проводятся в точках $x_1, \ldots, x_{n_1}$ с равными дисперсиями $d_1 > 0$, а наблюдения $\overline{y}_1, \ldots, \overline{y}_{n_2}$ – в точках $\overline{x}_1, \ldots, \overline{x}_{n_2}$ с равными дисперсиями $d_2 > 0$. В этом случае проблема построения точных D-оптимальных планов экспериментов сводится к минимизации по $x_i = \pm 1,\ i = \overline{1, n_1};\ \overline{x}_i = \pm 1, i = \overline{1, n_2},$ выражения

$$\left|\sum_{i=1}^{n_1} \frac{x_i}{d_1} + \sum_{i=1}^{n_2} \frac{\overline{x}_i}{d_2}\right| = \frac{1}{d_2}\left|\overline{d}\sum_{i=1}^{n_1} x_i + \sum_{i=1}^{n_2} \overline{x}_i\right|,$$

где $\overline{d} = \frac{d_2}{d_1}$. Обозначим через k число x_i, принимающих значение –1, а через m – число $\overline{x}$, принимающих значение –1, $0 \le k \le n_1$, $0 \le m \le n_2$. Тогда

$$\min\left|\overline{d}\sum_{i=1}^{n_1} x_i + \sum_{i=1}^{n_2} \overline{x}_i\right| = \min\left|\overline{d}\left(n_1 - 2k\right) + n_2 - 2m\right|, \tag{10}$$

где минимум по k и m берется на множестве: $0 \le k \le n_1$, $0 \le m \le n_2$. Решение оптимизационной задачи (10) определяет структуру D-оптимальных планов для неравноточных наблюдений, разбитых на две группы равноточных наблюдений. В данном случае необходимо провести $\left(n_1+1\right)\left(n_2+1\right)$ вычислений выражения, стоящего в правой части (10), что значительно меньше, чем 2^n вычислений. Естественным образом данный подход обобщается на случай, когда n наблюдений разбиваются на несколько независимых серий равноточных наблюдений с разными дисперсиями в каждой из серий.

В частном случае, когда все функции $d_i\left(x\right)$ совпадают, т. е. $d_i\left(x\right) = d\left(x\right)$, $i = \overline{1, n}$, и функция $d\left(x\right)$ удовлетворяет неравенству

$$d\left(x\right) \ge \frac{1}{4}\left\{\left[d_1 + d_2\right]x^2 + 2\left[d_2 - d_1\right]x + d_1 + d_2\right\},\ x \in \left[-1, 1\right],\ d_1 = d\left(-1\right),\ d_2 = d\left(1\right), \tag{11}$$

процесс построения точных D-оптимальных планов упрощается и имеет место теорема 3.

Теорема 3 [1]. *Для модели неравноточных наблюдений (1), (2) с дисперсиями наблюдений* $d_i\left(x\right) = d\left(x\right)$, $i = \overline{1, n}$, *где* $d\left(x\right)$ *удовлетворяет неравенству (11), точный D-оптимальный план экспериментов* ε_n^0 *такой же, как и для равноточных наблюдений, и имеет структуру*

$$\varepsilon_n^0 = \begin{Bmatrix} -1, & 1 \\ m, & n-m \end{Bmatrix},$$

где m – число наблюдений в точке –1. *Если n* = 2*s четно, то m* = *s*. *Если n* = 2*s* + 1 *нечетно, то m* = 2*s* + 1 *либо m* = 2*s*.

Рассмотрим частный случай теоремы 3. Обозначим через K множество точек из интервала $\left[-1, 1\right]$, в которых неравенство (11) обращается в равенство. Если множество K кроме точек –1, 1 содержит и другие точки из интервала $\left[-1, 1\right]$, то в этом случае точный D-оптимальный план экспериментов для нечетного числа наблюдений может содержать в своем спектре не только две, но и три точки.

Теорема 4 [1]. *Если множество* $K \setminus \left\{-1, 1\right\}$ *не пусто, то для нечетного числа наблюдений n* = 2*s* + 1 *точный D-оптимальный план имеет вид*

$$\varepsilon_{2s+1}^0 = \begin{Bmatrix} -1, & 1, & x \\ s, & s, & 1 \end{Bmatrix},\ x \in K. \tag{12}$$

Пример. Построим точные D-оптимальные планы экспериментов для модели наблюдений (1), (2) для различных случаев изменения дисперсий наблюдений при $n = 4, 5$:

а) если $d_1\left(x\right) = \frac{3}{2} + \frac{1}{2}x$, $d_2\left(x\right) = \frac{3}{2} - \frac{1}{2}x$, $d_3\left(x\right) = \frac{7}{2} + \frac{1}{2}x$, $d_4\left(x\right) = 5$, то точки спектра единственного D-оптимального плана ε_4^0 следующие: $x_1^0 = -1$, $x_2^0 = 1$, $x_3^0 = -1$, $x_4^0 = 1$;

б) если $d_i\left(x\right) = \frac{3}{2} + \frac{1}{2}x$, $i = \overline{1, 4}$, $x \in \left[-1, 1\right]$, то в D-оптимальном плане две точки спектра должны лежать на левом конце интервала $\left[-1, 1\right]$, остальные точки – в правом конце этого интервала. Всего таких планов $C_4^2 = 6$;

в) если $d_i(x) = \frac{3}{4}x^2 + \frac{1}{2}x + \frac{3}{4}$, $x \in [-1, 1]$, $i = \overline{1, 5}$, то D-оптимальные планы строятся согласно (12), где $s = 2$, а множество $K = [-1, 1]$. Таких планов бесконечное, несчетное множество мощности континуума.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК (*REFERENCES*)

1. *Кирлица В. П.* Точные *D*-оптимальные планы экспериментов для линии регрессии с неравноточными наблюдениями // Вестн. БГУ. Сер. 1, Физика. Математика. Информатика. 2015. № 2. С. 97–102 [Kirlitsa V. P. Exact *D*-optimal designs of experiments for linear regression with heteroscedastic observations. *Vestnik BGU. Ser. 1, Fiz. Mat. Inform.* 2015. No. 2. P. 97–102 (in Russ.)].

2. *Кирлица В. П.* Анализ структуры *D*-оптимальных планов экспериментов с неравноточными наблюдениями // Теория вероятностей, случайные процессы, математическая статистика и приложения. Минск, 2015. С. 71–75.

3. *Кирлица В. П.* О структуре точных *D*- и *A*-оптимальных планов для линии регрессии с неравноточными наблюдениями // Вестн. БГУ. Сер. 1, Физика. Математика. Информатика. 2012. № 3. С. 78–81 [Kirlitsa V. P. About structure of *D*- and *A*-optimal designs of experiments for linear regression with heteroscedastic observations. *Vestnik BGU. Ser. 1, Fiz. Mat. Inform.* 2012. No. 3. P. 78–81 (in Russ.)].

4. *Григорьев Ю. Д.* Методы оптимального планирования эксперимента: линейные модели. М., 2015.

5. *Федоров В. В.* Теория оптимального эксперимента. М., 1971.

Статья поступила в редколлегию 28.01.2016.
Received by editorial board 28.01.2016.