БЕЛОРУССКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

УДК 517.5

Порабкович
Андрей Иванович

Оценки средних колебаний функций

Автореферат
диссертации на соискание учёной степени
кандидата физико-математических наук
по специальности 01.01.01 — вещественный,
комплексный и функциональный анализ

Минск, 2017

Работа выполнена в Белорусском государственном университете.

Научный руководитель — **Кротов Вениамин Григорьевич,**
доктор физико-математических наук, профессор,
заведующий кафедрой теории функций
Белорусского государственного университета.

Официальные оппоненты: **Кореновский Анатолий Александрович,**
доктор физико-математических наук, профессор,
заведующий кафедрой математического анализа
Одесского национального университета
имени И.И.Мечникова;

Радыно Евгений Мефодьевич,
кандидат физико-математических наук, доцент,
доцент кафедры функционального анализа
Белорусского государственного университета.

Оппонирующая организация — Учреждение образования "Гомельский государственный университет имени Франциска Скорины".

Защита состоится **12 мая 2017 г.** в **10.00** часов на заседании совета по защите диссертаций Д 02.01.07 при Белорусском государственном университете по адресу: 220030, г. Минск, ул. Ленинградская, 8 (корпус юридического факультета), ауд. 407, телефон ученого секретаря (017) 209-57-09.

С диссертацией можно ознакомиться в Фундаментальной библиотеке Белорусского государственного университета.

Автореферат разослан "5" апреля 2017 г.

Учёный секретарь
совета по защите диссертаций
доктор физико-математических наук
профессор В.А. Еровенко

ВВЕДЕНИЕ

Оценки осцилляций впервые получили распространение в работах Д.Гильберта и А.Пуанкаре при изучении условий разрешимости задач математической физики.

Современный этап изучения средних осцилляций начинается с середины 60-х годов прошлого века, когда они заняли прочное место в арсенале аналитиков, использующих функциональные пространства для изучения свойств решений краевых задач для уравнений в частных производных. В их терминах можно описывать различные свойства решений таких краевых задач. Этот этап берет свое начало от знаменитой работы Джона–Ниренберга (1961). Несколько позже выяснилось, что средние осцилляции представляют и самостоятельный интерес для теории функциональных пространств. Примерами могут служить теорема Фефферманa–Стейна о двойственности пространства Харди или описание А.Кальдерона пространств Соболева на евклидовых пространствах.

В последние годы активно развивается анализ на метрических пространствах с мерой, в которой средние осцилляции играют выделенную роль — они дают, по существу, единственный способ измерения L^p-гладкости функций в такой общей ситуации. Это обуславливает актуальность изучения средних осцилляций как самостоятельного объекта. До настоящего времени исследования по этой тематике носили отдельный, изолированный характер.

С указанными направлениями и связаны исследования, представленные в данной диссертации. В частности, мы рассмотрим неравенства типа Пуанкаре–Соболева на общих квазиметрических пространствах и получим ряд неравенств для осцилляций функций из пространства L^p, $p > 0$, которые являются новыми даже в классическом случае евклидовых пространств. Оценки, полученные в диссертации, имеют ряд приложений, которые также приведены в ней.

ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

Связь работы с научными программами и темами

Тема диссертации соответствует приоритетному направлению фундаментальных и прикладных научных исследований Республики Беларусь (ГПНИ «Конвергенция», подпрограмма «Математические методы»). Работа над диссертацией проводилась на кафедре теории функций в рамках следующих госбюджетных научно-исследовательских работ Белорусского государственного университета:

1. Государственная программа научных исследований 2011–2015 гг., тема 1.4.02 «Исследование качественных и количественных свойств отображений абстрактных пространств и их приложения к задачам естественных наук и экономики», номер гос. регистрации № 20113526, №463/25).

2. Государственная программа научных исследований 2016-2020 гг., тема 1.4.02.1 «Функциональные пространства и их приложения к задачам естественных наук и экономики», номер гос. регистрации 20161715, №765/25.

Цель и задачи исследования

Целью диссертационной работы является исследование свойств функций с ограничениями на поведение средних осцилляций.

Основные задачи диссертации состоят в следующем:

1. Получить оптимальные оценки для средних L^p-колебаний функции на общих метрических пространствах, включая случай $p > 0$.
2. Исследовать характер свойства самоулучшения L^p-неравенства типа Пуанкаре на общих метрических пространствах при всех $p > 0$.
3. Получить аналог теоремы Джона-Ниренберга для пространств функций с органиченными осцилляциями BMO_φ для широкого класса функций φ.

Объектом исследования являются средние колебания (осцилляции), характеризующие локальное поведение и структурные свойства функций. Предметом исследования являются неравенства для средних осцилляций, позволяющие измерять, в частности, гладкость в терминах пространств $L^p(X)$ на любом метрическом пространстве с мерой.

Научная новизна

Полученные в диссертации результаты являются новыми. Новизна и основное содержание этих результатов заключаются в следующем.

1. Доказаны оптимальные оценки для средних L^p-колебаний функции на общих метрических пространствах, включая случай $p > 0$.
2. Доказано свойство самоулучшения L^p-неравенства типа Пуанкаре на общих метрических пространствах при всех $p > 0$.

3. Доказаны аналог теоремы Джона-Ниренберга для пространств функций с ограниченными осцилляциями BMO_φ для широкого класса функций φ и их совпадение с классическим пространством BMO.

Положения, выносимые на защиту

1. Оценки для средних L^p-колебаний функции на общих метрических пространствах, включая случай $p > 0$.

2. Количественная форма свойства самоулучшения L^p-неравенства типа Пуанкаре при $p > 0$.

3. Аналог теоремы Джона-Ниренберга для пространств BMO_φ для широкого класса функций φ и их совпадение с пространством BMO на пространствах однородного типа.

Личный вклад соискателя

Основные результаты диссертации получены автором лично. Постановка задач и анализ полученных результатов осуществлялась совместно с научным руководителем доктором физико-математических наук Кротовым В.Г.

Результаты, полученные совместно с Иванишко И.А., носят промежуточный характер, не входят в число основных результатов диссертации и являются следствиями более общих утверждений, полученных соискателем самостоятельно.

В совместной работе с Шаниным Р.В. соавтору Шанину Р.В. принадлежит частный случай результатов статьи для евклидовых пространств, а автором диссертации рассмотрен случай общих метрических пространств.

Апробация результатов диссертации

Результаты, вошедшие в диссертационную работу, докладывались и обсуждались на следующих научных семинарах и конференциях:

1. Семинар по математическому анализу кафедры теории функций БГУ (руководитель — доктор физико-математических наук, профессор Э.И. Зверович).

2. 16-я Саратовская зимняя школа «Современные проблемы теории функций и их приложения», 27 января–3 февраля 2012 г., Саратов, Россия.

3. Международная научная конференция «XI Белорусская математическая конференция», 5–9 ноября 2012 г., Минск, Беларусь.

4. Семинар группы «Функциональные пространства» университета им. Фридриха Шиллера, 16 декабря 2013 г., Йена, Германия.

5. 17-я Саратовская зимняя школа «Современные проблемы теории функций и их приложения», 27 января–3 февраля 2014 г., Саратов, Россия.

6. Семинар группы «Функциональные пространства» университета им. Фридриха Шиллера, 17 декабря 2014 г., Йена, Германия.

7. XXII Международная конференция Математика. Экономика. Образование. VIII Международный симпозиум «Ряды Фурье и их приложения». VII Международный семинар «Математические модели и информационные технологии в науке и производстве», 27 мая- 3 июня 2014 г., Ростов-на-Дону, Россия.

8. XII Международная Казанская школа-конференция «Теория функций, ее приложения и смежные вопросы», 27 июня–4 июля 2015 г., Казань, Россия.

9. 73 Научная конференция студентов и аспирантов БГУ, 16 мая 2016 г., Минск, Беларусь.

10. Международная научная конференция «XII Белорусская математическая конференция БМК–2016», 5–10 сентября 2016 г., Минск, Беларусь.

Опубликованность результатов диссертации

Основные результаты диссертационной работы опубликованы в 10 научных работах, из которых 4 — статьи в научных изданиях в соответствии с пунктом 18 Положения о присуждении ученых степеней и присвоении ученых званий в Республике Беларусь (общим объемом **2.09** авторского листа), 5 — статьи в сборниках материалов научных конференций, 1 — тезисы докладов на научных конференциях.

Структура и объем диссертации

Диссертационная работа состоит из перечня условных обозначений, введения, общей характеристики, четырех глав, заключения и библиографического списка.

Первая глава содержит аналитический обзор литературы по теме диссертационного исследования.

Во второй главе вводятся L^p-осцилляции функций на произвольном метрическом пространстве X с мерой, удовлетворяющей условию удвоения, и изучаются их основные свойства. В терминах этих осцилляций доказываются поточечные оценки локального поведения функции и аналоги неравенств Соболева–Пуанкаре.

В третьей главе исследуется свойство «самоулучшения» L^p-неравенства Соболева-Пуанкаре на общих метрических пространствах. В этой главе также получены аналоги известных неравенств Трудингера и Морри.

Четвертая глава посвящена исследованию пространств BMO. В ней получен аналог теоремы Джона-Ниренберга. В качестве следствий из результатов данной главы получены обобщения теорем Спанне и Кампанато–Мейерса.

Полный объем диссертации составляет 99 страниц. Библиографический список содержит 160 наименований, включая собственные публикации соискателя ученой степени.

ОСНОВНОЕ СОДЕРЖАНИЕ

Глава 1 содержит аналитический обзор основных результатов, в которых использовались средние L^p-осцилляции функций в случае пространства $\mathbb{R}^n$ и некоторые их обобщения на случай общих метрических пространств с мерой. Также в обзоре представлена информация о исследованиях неравенства Соболева и его свойства самоулучшения. Отдельное место в данном обзоре занимают исследования пространств ограниченных средних осцилляций (BMO).

Глава 2 посвящена определению и изучению основных объектов диссертации — оценок средних L^p-осцилляций функции. Примерами таких оценок могут служить классические неравенства

$$\left(\fint_B \left| f(x) - \frac{1}{|B|}\int_B f(y)\,dy \right|^q dx\right)^{1/q} \lesssim r \left(\fint_B |\nabla f(x)|^p\,dx\right)^{1/p} \tag{1}$$

($B \subset \mathbb{R}^n$ — шар радиуса r, $|B|$ — мера Лебега B), которые называют обычно неравенствами Пуанкаре (при $q = 1$) и Пуанкаре–Соболева (при $1/q = 1/p - 1/n$).

Обозначение $A \lesssim B$ в неравенстве (1) и всюду ниже всегда будет означать, что $A \leq cB$. При этом мы всегда будем обозначать буквой c определенные положительные числа, точные значения которых не играют роли. Такие постоянные могут зависеть от некоторых параметров, но эти зависимости также не играют существенной роли. Если нам нужно будет указать параметры, от которых такие постоянные зависят, то мы будем делать это явно в нижних индексах.

Пусть (X, d, μ) — пространство однородного типа, т.е. X — хаусдорфово пространство, топология которого порождается квазиметрикой d (с постоянной a_d), а мера μ — регулярна и связана с d условием удвоения: существует постоянная $a_\mu \geq 1$, для которой выполнено

$$\mu(B(x, 2r)) \leq a_\mu \mu(B(x, r)) \tag{2}$$

для любых $x \in X$ и $r > 0$.

Здесь

$$B(x, t) = \{y \in X : d(x, y) < t\}$$

— шар с центром в точке $x \in X$ радиуса $t > 0$. Для шара B через r_B обозначаем его радиус.

В работе, как правило, мы будем использовать количественную форму условия (2): существует постоянная $\gamma > 0$, такая, что

$$\mu(B(x, R)) \leq a_\mu \left(\frac{R}{r}\right)^\gamma \mu(B(x, r)) \tag{3}$$

для любых $x \in X$ и $0 < r \leq R$.

Введем также обозначения для интегральных средних

$$f_B = \fint_B f\, d\mu = \frac{1}{\mu B} \int_B f\, d\mu$$

функции $f \in L^1_{\mathrm{loc}}$ по шару $B \subset X$. Эти средние называют часто средними Стеклова.

Рассмотрим классы функциональных параметров, используемые нами в дальнейшем при введении обобщенных L^θ осцилляций.

Будем говорить, что функция $\eta : (0, 2] \to \mathbb{R}_+$ почти убывает, если для некоторого $c \geq 1$

$$\eta(t_2) \leq c\, \eta(t_1) \quad \text{при} \quad 0 < t_1 \leq t_2. \tag{4}$$

Для почти возрастающей функции неравенство $\eta(t_2) \leq c\eta(t_1)$ в (4) заменим на $\eta(t_2) \geq c\, \eta(t_1)$. Впервые такие термины были применены С.Н. Бернштейном.

Для двух параметров $0 \leq \alpha < \beta < \infty$ обозначим $\Omega[\alpha, \beta]$ класс функций $\eta : (0, 2] \to \mathbb{R}_+$, для которых: 1) η возрастает и $\eta(+0) = \lim\limits_{t \to +0} \eta(t) = 0$; 2) $\eta(t)t^{-\alpha}$ почти возрастает; 3) $\eta(t)t^{-\beta}$ почти убывает.

Кроме того положим

$$\Omega[\alpha, \beta) = \bigcup_{\beta' < \beta} \Omega[\alpha, \beta'], \quad \Omega[\alpha, \infty) = \bigcup_{\beta > \alpha} \Omega[\alpha, \beta)$$

и

$$\Omega[0,\alpha] = \Omega(\alpha), \quad \Omega = \bigcup_{\alpha>0} \Omega(\alpha).$$

Основной целью главы 2 является изучение L^θ-осцилляций

$$\mathcal{O}_\theta(f,B,I) = \left(\fint_B |f(y)-I|^\theta \, d\mu(y) \right)^{1/\theta} \tag{5}$$

функции $f \in L^\theta_{\mathrm{loc}}(X)$ по шарам B на (X,d,μ). Здесь $I \in \mathbb{R}$ — некоторое значение, которое можно выбирать различными способами.

С помощью осцилляций (5) вводим

$$\mathcal{N}_\eta^{(\theta)} f(x) = \sup_{B \ni x, r_B < 1} \frac{\mathcal{O}_\theta(f,B,f(x))}{\eta(r_B)}, \tag{6}$$

$$\mathcal{S}_\eta^{(\theta)} f(x) = \sup_{B \ni x, r_B < 1} \frac{\mathcal{O}_\theta(f,B,f_B)}{\eta(r_B)}, \tag{7}$$

где $\eta \in \Omega$, а точная верхняя грань взята по всем шарам B, содержащим точку x. Если $\theta = 1$, то мы не будем указывать верхний индекс в обозначениях (6)–(7). Кроме того, если $\eta(t) = t^\alpha$, то в нижнем индексе вместо η будем писать α.

Конечно, в (6)–(7) следует предполагать, что $f \in L^\theta_{\mathrm{loc}}(X)$, а при $\theta < 1$ в (7) нужно дополнительное требование $f \in L^1_{\mathrm{loc}}(X)$.

В случае $X = \mathbb{R}^n$ для $\eta(t) = t^\alpha$, $0 < \alpha \le 1$, операторы $\mathcal{N}_\alpha^{(\theta)}$ впервые появились в работах А. Кальдерона (1972). В этой же ситуации операторы $\mathcal{S}_\alpha^{(\theta)}$ были введены А. Кальдероном и Р. Скоттом (1978).

Одним из важнейших результатов А.Кальдерона является следующее утверждение, дающее описание классических пространств Соболева $W_1^p(\mathbb{R}^n)$: если $p > 1$ и $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$, то условия $f \in W_1^p(\mathbb{R}^n)$ и $\mathcal{N}_1 f \in L^p(\mathbb{R}^n)$ равносильны.

Рассмотрим осцилляции

$$A_\theta(f,B) = \inf_I \mathcal{O}_\theta(f,B,I) \tag{8}$$

и соответствующие им максимальные операторы

$$\mathcal{A}_\eta^{(\theta)} f(x) = \sup_{B \ni x, r_B < 1} \frac{A_\theta(f,B)}{\eta(r_B)}, \tag{9}$$

где $\eta \in \Omega$ и sup взят по всем шарам B, содержащим точку x.

Впервые максимальные функции (9) при $\theta > 0$, $\eta(t) = t^\alpha$ на $\mathbb{R}^n$ были определены А. Кальдероном и Р. Скоттом (1978). Однако они не получили там (и в последующих работах по этой тематике) дальнейшего развития и применений.

Важным аналитическим аппаратом в нашей работе являются постоянные наилучшего приближения $I_B^{(\theta)}f$, реализующие точную нижнюю грань в (8), которые будут выполнять роль средних Стеклова, когда последние не существуют (если функция f не является локально суммируемой). Одним из важнейших выводов диссертации является то, что они успешно справляются с этой ролью. В частности, это показывает следующее утверждение: для любой функции $f \in L^\theta_{\mathrm{loc}}(X)$ для почти всех $x \in X$

$$\lim_{r \to +0} I^{(\theta)}_{B(x,r)} = f(x). \tag{10}$$

Точки, в которых выполнено соотношение (10), назовем θ-точками Лебега.

Вместе с тем использование $I_B^{(\theta)}f$ связано с новыми дополнительными трудностями, обусловленными нелинейной зависимостью $I_B^{(\theta)}f$ от f.

Основной результат главы 2 — это следующая теорема, в которой с помощью максимальных функций $\mathcal{A}_\eta^{(\theta)}f$ оцениваются уклонения «средних» $I^{(\theta)}_{B(x,r)}f$ от значений функции $f(x)$. Это приводит к оценкам осцилляций $\mathcal{O}_q(f, B, I)$ в случаях $I = I_B^{(\theta)}f$ и $I = f(x)$.

Теорема 1 ([3]) *Пусть* $\theta, p > 0$, $0 < \alpha < \gamma/p$, $\eta \in \Omega[\alpha, \gamma/p)$, $f \in L^\theta_{\mathrm{loc}}(X)$. *Если* x — θ*-точка Лебега, то*

$$|f(x) - I^{(\theta)}_{B(x,r)}f| \lesssim \eta(r)\left[\mathcal{A}_\eta^{(\theta)}f(x)\right]^{1-\frac{\alpha p}{\gamma}} \left(\fint_{B(x,r)} [\mathcal{A}_\eta^{(\theta)}f]^p \, d\mu\right)^{\alpha/\gamma}. \tag{11}$$

Кроме того, для любого шара $B \subset X$

$$\left(\fint_B \left|f - I_B^{(\theta)}f\right|^q d\mu\right)^{1/q} \lesssim \eta(r_B)\left(\fint_{2a_dB} [\mathcal{A}_\eta^{(\theta)}f]^p \, d\mu\right)^{1/p} \tag{12}$$

и для каждой θ*-точки Лебега* $x \in B$ *функции* f

$$\left(\fint_B |f - f(x)|^q \, d\mu\right)^{1/q} \lesssim \eta(r_B)\left[\mathcal{A}_\eta^{(\theta)}f(x) + \left(\fint_{2a_dB} [\mathcal{A}_\eta^{(\theta)}f]^p \, d\mu\right)^{1/p}\right], \tag{13}$$

где $1/q = 1/p - \alpha/\gamma$ *и* $\lesssim$ *в* (11)–(13) *не зависят от* f, x *и* B.

Принципиальным в наших результатах является то, что параметры $p > 0$ и $\theta > 0$ не связаны никакими ограничениями, кроме положительности, хотя дополнительных предположений о суммируемости функции f (кроме основного $f \in L^{\theta}_{\rm loc}(X)$) мы не делаем. Более того, из наших результатов можно выводить оценки и для осцилляций $\mathcal{O}_q(f, B, f_B)$.

Отметим, что показатель q в теореме 1, определяемый равенством $1/q = 1/p - \alpha/\gamma$ (это — «предельный показатель Харди–Литтлвуда–Соболева»), является оптимальным в том смысле, что его нельзя увеличить.

Утверждения, подобные теореме 1, получены в диссертации и для случаев $\alpha p > \gamma$ и $\alpha p = \gamma$ (тогда вместо $\eta \in \Omega[\alpha, \gamma/p)$ естественно рассматривать условие $\eta \in \Omega[\alpha, \infty)$).

Свяжем теперь поведение максимальных функций $\mathcal{A}^{(\theta)}_\eta$ с пространствами Соболева. Пусть $p > 0$ и $\eta \in \Omega[0, \infty)$. Говорят, что измеримая функция f на X принадлежит (однородному) классу $\dot{M}^p_\eta(X)$, если существует такая неотрицательная функция $g \in L^p(X)$ и множество $A \subset X$, что $\mu(A) = 0$ и

$$|f(x) - f(y)| \le \eta(d(x, y))[g(x) + g(y)], \quad x, y \in X \setminus A. \tag{14}$$

Кроме того, введем неоднородные версии классов $\dot{M}^p_\eta(X)$

$$M^p_\eta(X) = \dot{M}^p_\eta(X) \cap L^p(X).$$

В частном случае $\eta(t) = t^\alpha$ будем использовать обозначение $M^p_\alpha(X)$.

Для $p > 1$ и $\eta(t) = t$ определение классов $M^p_\eta(X)$ впервые было приведено П. Хайлашом (1996), где было показано, что $M^p_1(D) = W^p_1(D)$ для достаточно широкого класса областей $D \subset \mathbb{R}^n$. Поэтому $M^p_1(X)$ называют пространствами Хайлаша–Соболева.

И.А. Иванишко (2005) рассматривала классы $M^p_\eta(X)$ для общих функций η и для них были получены описания в терминах максимальных функций $\mathcal{S}_\eta$ и $\mathcal{N}_\eta$. С помощью теоремы 1 мы доказываем обобщения этих результатов и даем следующие описания пространств $M^p_\eta(X)$ в терминах максимальных функций $\mathcal{A}^{(\theta)}_\eta$ и $\mathcal{N}^{(\theta)}_\eta$.

Теорема 2 ([3]) *Пусть* $\alpha, p > 0$, $\eta \in \Omega[\alpha, \infty)$. *Тогда*
1) если $\mathcal{A}^{(\theta)}_\eta f \in L^p(X)$ *при некотором* $\theta > 0$, *то* $f \in \dot{M}^p_\eta(X)$,
2) если $f \in \dot{M}^p_\eta(X)$, *то* $\mathcal{N}^{(q)}_\eta f \in L^p(X)$ *при* $1/q > \max\{1/p - \alpha/\gamma, 0\}$.

Наиболее существенным в теореме 2 является то, что в ней θ можно брать сколь угодно малым. При $\theta < 1$ и $p \le 1$ утверждение является новым даже для степенной функции $\eta(t) = t^\alpha$, $\alpha > 0$.

Из теоремы 2 получаем, в частности, следующее усиление упомянутой выше теоремы Кальдерона, которое недавно было получено А. Гогатишвили, П. Коскелой и Ю. Жу (2013) другим способом при изучении пространств гладких функций типа классов Бесова и Трибеля–Лизоркина.

Теорема 3 *Пусть* $p>1$ *и* $f\in L^p(\mathbb{R}^n)$. *Тогда*
1) если $\mathcal{A}_1^{(\theta)}f\in L^p(\mathbb{R}^n)$ *при некотором* $\theta>0$, *то* $f\in W_1^p(\mathbb{R}^n)$,
2) если $f\in W_1^p(\mathbb{R}^n)$, *то* $\mathcal{A}_1^{(\theta)}f\in L^p(\mathbb{R}^n)$ *при* $1/\theta>1/p-1/n$.

Часть 2) теоремы 3 хорошо известна и включена для полноты, при $1/\theta<1/p-1/n$ это уже неверно, так как для таких θ при $f\in W_1^p(\mathbb{R}^n)$ может оказаться, что $f\notin L^\theta(B)$ для любого шара $B\subset\mathbb{R}^n$. Существенно новой является часть 1) теоремы 3 при $0<\theta<1$.

Глава 3 посвящена изучению абстрактной версии L^p-неравенства Пуанкаре и свойству его самоулучшения при $p>0$. Исходной позицией является классическое неравенство Пуанкаре на евклидовых пространствах

$$\fint_B \left| f(y)-\fint_B f\,d\mu\right| d\mu(y)\lesssim r_B\left(\fint_B |\nabla f|^p\,d\mu\right)^{1/p} \tag{15}$$

($B\subset\mathbb{R}^n$ — шар). Оно обладает свойством самоулучшения — из него вытекает «более сильное» неравенство

$$\left(\fint_B \left| f(y)-\fint_B f\,d\mu\right|^q d\mu(y)\right)^{1/q}\lesssim r_B\left(\fint_B |\nabla f|^p\,d\mu\right)^{1/p}, \tag{16}$$

где $p>1$, $1/q=1/p-1/n$.

Такой эффект изучался для неравенств более общего вида

$$\left(\fint_B |f(y)-S_Bf|^\theta\,d\mu(y)\right)^{1/\theta}\le\eta(r_B)\left(\frac{1}{\mu(B)}\int_{\sigma B} g^p\,d\mu\right)^{1/p}. \tag{17}$$

для функций на метрическом пространстве с мерой. Здесь $f\in L^\theta_{\mathrm{loc}}(X)$, $g\in L^p_{\mathrm{loc}}(X)$, S_Bf — некоторое число, зависящее от шара B и функции f, η — некоторая положительная функция, $\sigma\ge1$.

Основная задача, которая изучается в данной главе: как связаны между собой неравенства (17) при различных значениях параметров. Будет показано, что эти неравенства обладают свойством самоулучшения, как и их классический вариант (15).

Пусть $\eta \in \Omega[0,\infty)$, $\sigma \geq 1$ и $\theta, p > 0$. Говорят, что пара функции $f \in L^\theta_{\mathrm{loc}}(X)$, $g \in L^p_{\mathrm{loc}}(X)$ удовлетворяет (σ,η,θ,p)-неравенству Пуанкаре, если для всех шаров $B \subset X$

$$\left(\fint_B |f(y) - I_B^{(\theta)} f|^\theta \, d\mu(y)\right)^{1/\theta} \leq \eta(r_B) \left(\fint_{\sigma B} g^p \, d\mu\right)^{1/p}. \tag{18}$$

Следующая теорема 4 является основной в главе 3. Она описывает свойство самоулучшения неравенства Пуанкаре (18) в «докритическом» случае.

Теорема 4 ([4]) *Пусть* $\theta, p > 0$, $0 < \alpha < \gamma/p$, $\eta \in \Omega[\alpha, \gamma/p)$, $\sigma \geq 1$. *Пусть также функции* $f \in L^\theta_{\mathrm{loc}}(X)$, $g \in L^p_{\mathrm{loc}}(X)$ *удовлетворяют* (σ,η,θ,p)*-неравенству Пуанкаре,* $1/q \geq 1/p - \alpha/\gamma$ *и* $B \subset X$ *— шар.*

Тогда

1) если $1/q = 1/p - \alpha/\gamma$, *то*

$$\frac{\mu\left(\left\{x \in B : |f(x) - I_B^{(\theta)} f| > \lambda\right\}\right)}{\mu(B)} \lesssim \left[\frac{\eta(r_B)}{\lambda} \left(\fint_{2a_d\sigma B} g^p \, d\mu\right)^{1/p}\right]^q, \quad \lambda > 0; \tag{19}$$

2) если $1/q > 1/p - \alpha/\gamma$, *то*

$$\left(\fint_B |f(y) - I_B^{(\theta)} f|^q \, d\mu(y)\right)^{1/q} \lesssim \eta(r_B) \left(\fint_{2a_d\sigma B} g^p \, d\mu\right)^{1/p}, \tag{20}$$

где $\lesssim$ *не зависят от* f, g *и* B.

Заметим, что если $q \geq 1$ (т.е. $p \geq \gamma(\gamma+\alpha)^{-1}$), то неравенства (19) и (20) в теореме 4 сохраняют силу, если в них заменить $I_B^{(\theta)} f$ на интегральные средние f_B.

В случае $\alpha p > \gamma$ условие $\eta \in \Omega[\alpha, \gamma/p)$ естественно заменить на $\eta \in \Omega[\alpha, \infty)$. Тогда неравенства для средних осцилляций можно усилить, заменив их равномерными оценками.

Теорема 5 ([4]) *Пусть* $p > 0$, $\alpha > \gamma/p$, $\eta \in \Omega[\alpha, \infty)$, $\sigma \geq 1$. *Пусть также функции* $f \in L^\theta_{\mathrm{loc}}(X)$, $g \in L^p_{\mathrm{loc}}(X)$ *удовлетворяют* (σ,η,θ,p)*-неравенству Пуанкаре* (18). *Тогда*

1) для любой θ-точки Лебега x и любого $r>0$

$$|f(x)-I^{(\theta)}_{B(x,r)}f| \lesssim \eta(r)\left(\fint_{\sigma B(x,r)} g^p\,d\mu\right)^{1/p}, \tag{21}$$

2) для любого шара $B\subset X$ и любых θ-точек Лебега $x,y\in B$

$$|f(x)-f(y)| \lesssim \eta(d(x,y))\left(\fint_{2a_d\sigma B} g^p\,d\mu\right)^{1/p} \tag{22}$$

($\lesssim$ не зависят от f, g, x и y).

При условиях теоремы 5 из неравенства (22) вытекает, что если $B\subset X$ — произвольный шар и $x,y\in B$ θ-точки Лебега, то

$$|f(x)-f(y)| \lesssim \eta(d(x,y))[d(x,y)]^{-\gamma/p} \lesssim [d(x,y)]^{\alpha-\gamma/p},$$

где $\lesssim$ зависит от шара B и функции g. Последнее неравенство означает, что функция f после изменения на множестве меры нуль становится равномерно непрерывной на любом шаре и ее модуль непрерывности на этом шаре оценивается как $\omega(t,f)\lesssim \eta(t)t^{-\gamma/p}$.

Рассмотрим, наконец, «критический» показатель $\alpha=\gamma/p$. В этом случае мы получаем следующее утверждение.

Теорема 6 ([4]) *Пусть $p>0$, $\alpha=\gamma/p$, $\eta\in\Omega[\alpha,\infty)$, $f\in L^1_{\mathrm{loc}}(X)$, $\sigma\ge 1$. Пусть также функции $f\in L^\theta_{\mathrm{loc}}(X)$, $g\in L^p_{\mathrm{loc}}(X)$ удовлетворяют (σ,η,θ,p)-неравенству Пуанкаре (18).*

Тогда существует такая постоянная a, что для произвольного шара $B\subset X$ справедливы неравенства

$$\fint_B \exp\left(a\frac{|f-I^{(\theta)}_B f|}{\eta(r_B)}\left(\fint_{2a_d\sigma B} g^p\,d\mu\right)^{-1/p}\right)d\mu \lesssim 1, \tag{23}$$

$$\left(\fint_B |f-I^{(\theta)}_B f|^q\,d\mu\right)^{1/q} \lesssim \eta(r_B)\left(\fint_{2a_d\sigma B} g^p\,d\mu\right)^{1/p}, \quad q>0 \tag{24}$$

(постоянная a и $\lesssim$ не зависят от f, g, σ и B).

Глава 4 посвящена исследованию пространства BMO и содержит доказательство аналога теоремы Джона–Ниренберга на общих метрических пространствах с мерой.

Ниже будут возникать различные постоянные C_k, $k \geq 1$. Определение каждой из таких постоянных будет дано по мере их появления.

Обозначим через Φ класс непрерывных строго возрастающих функций $\varphi : [0, +\infty) \to [0, +\infty)$, со свойствами

$$\varphi(+0) = 0, \quad \lim_{t \to +\infty} \varphi(t) = +\infty.$$

Φ_1 — подкласс функций $\varphi \in \Phi$, для которых выполнено условие: существует такая постоянная a_φ, что

$$\varphi(t+s) \leq a_\varphi[\varphi(t) + \varphi(s)], \quad t, s \in [0, +\infty). \tag{25}$$

Условие эквивалентно известному Δ_2-условию Орлича

$$\varphi(2t) \lesssim \varphi(t)), \quad t > 0. \tag{26}$$

В этой главе рассматриваются более общие осцилляции, чем $A_\theta(f, B)$, определяемые с помощью степенных функций. Именно, для функции $\varphi \in \Phi$ и шара $B \subset X$ вводится два вида средних осцилляций

$$A_\varphi(f, B) = \inf_I \varphi^{-1} \left(⨍_B \varphi(|f(x) - I|) d\mu(x) \right), \tag{27}$$

$$S_\varphi(f, B) = \varphi^{-1} \left(⨍_B \varphi(|f(x) - f_B|) \, d\mu(x) \right), \quad f \in L^1_{\mathrm{loc}}(X).$$

В случае, когда $\varphi(\theta) = t^\theta$, $p > 0$ они совпадают соответственно с $A_\theta(f, B)$ и $\mathcal{O}_\theta(f, B, f_B)$ и мы будем продолжать писать $A_\theta(f, B)$ и $S_\theta(f, B)$.

В работе Ф. Джона–Л. Ниренберга (1961) было введено следующее важное пространство функций

$$BMO(B_0) = \{f \in L^1_(B_0) : \|f\|^* \equiv \sup_{B \subset B_0} S_1(f, B) < +\infty\},$$

где точная верхняя грань взята по всем подкубам $B \subset B_0$ куба $B_0 \subset \mathbb{R}^n$. Основной результат в этой работе — следующая экспоненциальная оценка: *существуют постоянные A и a, зависящие только от размерности пространства n, что для любого куба $B_0 \subset \mathbb{R}^n$ и $f \in BMO(B_0)$*

$$\mu\{x \in B_0 : \ |f(x) - f_{B_0}| > \lambda\} \leq A\mu(B_0) \exp\left(-\frac{a\lambda}{\|f\|^*} \right), \quad \lambda > 0, \tag{28}$$

(это — неравенство Джона–Ниренберга).

Пусть $B_0 \subset X$ — фиксированный шар. Введем далее классы

$$BMO_\varphi(B_0) = \{f \in L^1(B_0) : \|f\|_\varphi^* \equiv \sup_{B \subset B_0} S_\varphi(f, B) < +\infty\}.$$

В случае $\varphi(t) = t^p$, $p > 0$ будем писать просто $BMO_p(B_0)$. В силу неравенства Гельдера справедливы вложения

$$BMO_q(B_0) \subset BMO_p(B_0)$$

при $0 < p < q < \infty$. Кроме того, из неравенства (28) вытекает, что на самом деле

$$BMO_p(B_0) = BMO(B_0)$$

при $p \geq 1$ и полунорма $\|f\|_p^*$ эквивалентна полунорме $\|f\|^*$.

В такой связи возникает естественный вопрос, справедливы ли равенства $BMO_\varphi(B_0) = BMO(B_0)$? Ниже будет доказано, что это действительно так.

В определение пространства $BMO_\varphi(B_0)$ включена локальная суммируемость функций f из этого пространства. Это требование выглядит искусственным, если функция $\varphi \in \Phi$ растет на бесконечности медленнее, чем t. Мы рассматриваем более широкий класс

$$\widehat{BMO}_\varphi(B_0) = \{f : \widehat{\|f\|}_\varphi^* \equiv \sup_{B \subset B_0} A_\varphi(f, B) < +\infty\}.$$

Мы докажем равенство $\widehat{BMO}_\varphi(B_0) = BMO(B_0)$ при широких условиях на функцию φ и пространство X. Для этого мы воспользуемся аналогом неравенства (28) для средних $A_\varphi(f, B)$.

По аналогии с главой 1, в дальнейшем нам понадобится постоянные $I_B^\varphi f$, определяемые следующим образом.

Лемма 1 *Пусть* $\varphi \in \Phi_1$ *и* f *— измеримая функция, для которой* $\varphi \circ |f| \in L^1_{\rm loc}(X)$. *Тогда для любого шара* $B \subset X$ *существует такое число* $I_B^\varphi f \in \mathbb{R}$, *что*

$$A_\varphi(f, B) = \varphi^{-1}\left(⨍_B \varphi(|f(x) - I_B^\varphi f|) d\mu(x)\right).$$

Зафиксируем шар $B_0 \subset X$ и число $\Lambda > 1$.

Основной результат главы 4 — следующее утверждение, являющееся обобщением неравенства Джона–Ниренберга (28).

Теорема 7 ([2]) *Пусть* $\varphi \in \Phi_1$ *и* $f \in \widehat{BMO}_\varphi(B_0)$. *Тогда справедливы неравенства*

$$\mu\{x \in B_0 : \ |f(x) - I^\varphi_{B_0} f| > \lambda\} \le C_2 \mu(B_0) \exp(-C_3 \lambda), \quad \lambda > 0.$$

Здесь постоянная C_1 *зависит только от постоянных* a_d *и* a_μ, *а*

$$C_2 = C_1 \Lambda, \quad C_3 = \frac{\ln \Lambda}{\varphi^{-1}(C_4 \varphi(\widehat{\|f\|}^*_\varphi))}, \quad C_4 = a_\varphi(1 + C_1 \Lambda).$$

Результаты, подобные теореме 7, были получены ранее несколькими авторами. В частности, в 1984 году Р. Лонг и Л. Янг доказали аналогичное утверждение для функции φ, удовлетворяющей условию

$$\varphi(t_1 + t_2) \le \varphi(t_1) + \varphi(t_2) + C. \tag{29}$$

В 1987 году К. Ши и А. Торчинский получили обобщение этих результатов Р. Лонга и Л. Янга на функции φ, удовлетворяющих Δ_2-условию Орлича (26). Однако, на метрическое пространство с мерой они накладывали (как и Р. Лонг и Л. Янг) дополнительное требование, которое они назвали «усиленным условием удвоения». Мы же не используем таких дополнительных ограничений на рассматриваемое пространство.

В диссертации приведено несколько следствий из теоремы 7. В частности, получено утверждение, дающее описание классического пространства $BMO(B_0)$ в терминах осцилляций $A_\varphi(f, B)$.

Следствие 1 *Пусть функция* $\varphi \in \Phi$. *Тогда если*

$$\sup_{B \subset B_0} \inf_c \fint_B \varphi(|f(x) - c|)\, d\mu(x) < \infty,$$

то $f \in BMO(B_0)$.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Основные научные результаты диссертации

1. Доказано обобщение неравенства типа Пуанкаре–Соболева для средних колебаний функции на общих метрических пространствах. при определенных условиях выполнены оценки L^p-средних осцилляций функций и для них получены различные описания: установлены поточечные оценки

для уклонений средних осцилляций от значений функции, доказаны аналоги неравенств Соболева–Пуанкаре, Трудингера, Морри. При этом получены описание классов Хайлаша–Соболева при $p > 0$ и известные ранее неравенства для интегральных средних. [3, 6, 10]

2. Получена количественная форма свойства самоулучшения L^p-неравенства типа Пуанкаре на общих метрических пространствах при всех $p > 0$. [4, 8, 9]

3. Доказан аналог неравенства Джона–Ниренберга для пространств BMO_φ и их совпадение с пространством BMO на пространствах однородного типа для широкого класса функций φ. [1, 2, 5, 7]

Рекомендации по практическому использованию результатов

Диссертация носит теоретический характер. Ее результаты могут применяться (и уже применяются) в теории функциональных пространств, в частности, при исследовании тонких свойств функций на общих метрических пространствах с мерой. Они могут быть также использованы в учебном процессе при чтении спецкурсов по теории функций, функциональному анализу и смежным дисциплинам.

СПИСОК ПУБЛИКАЦИЙ СОИСКАТЕЛЯ ПО ТЕМЕ ДИССЕРТАЦИИ

Статьи в научных журналах

1. Иванишко, И.А. Обобщение теоремы Кампанато-–Мейерса / И.А. Иванишко, В.Г. Кротов, А.И. Порабкович // Труды Института математики. — 2012. — Т. 20, № 2. — С. 30–35.

2. Порабкович, А.И. Обобщение неравенства Джона–Ниренберга / А.И. Порабкович, Р.В. Шанин // Труды Института математики. — 2014. — Т. 22, № 2. — С. 63–73.

3. Кротов, В.Г. Оценки L^p-осцилляций функций при $p > 0$ / В.Г. Кротов, А.И. Порабкович // Матем. заметки. — 2015. — Т. 97, № 3. — С. 407–420. (переведена на английский язык: Springer-Verlag, Mathematical Notes. — 2015. — Vol. 97, №. 3. — P. 384–395.)

4. Порабкович, А.И. Самоулучшение L^p-неравенства Пуанкаре / А.И. Порабкович // Чебышевский сборник. — 2016. — Т. 17, № 1 (57). — С. 187–200.

Статьи в сборниках материалов научных конференций

5. Иванишко, И.А. Теорема Кампанато на метрических пространствах с мерой / И.А. Иванишко, В.Г. Кротов, А.И. Порабкович // Современные проблемы теории функций и их приложения: материалы 16 Саратовской зимней школы, Саратов, 27 января – 3 февраля 2012 г. — Саратов, 2012. — С. 73.

6. Кротов, В.Г. Оценки L^p-осцилляций функций при $p > 0$ / В.Г. Кротов, А.И. Порабкович // Современные проблемы теории функций и их приложения: материалы 17 Саратовской зимней школы, Саратов, 27 января – 3 февраля 2014 г. — Саратов, 2014. — С. 140–143.

7. Порабкович, А.И. Обобщение теоремы Джона-Ниренберга / А.И. Порабкович, Р.В. Шанин // Современные проблемы теории функций и их приложения: материалы 17 Саратовской зимней школы, Саратов, 27 января – 3 февраля 2014 г. — Саратов, 2014. — С. 226–229.

8. Порабкович, А.И. Самоулучшение неравенства Пуанкаре / А.И. Порабкович // Труды математического центра им. Н.И. Лобачевского. — Казань, 2015. —Т. 51 (Теория функций, ее приложения и смежные вопросы: материалы XII Международной Казанской летней научной школы-конференции, Казань, 27 июня – 4 июля 2015 г.). — С. 355–357.

9. Порабкович, А.И. Свойство самоулучшения в неравенстве Пуанкаре при $p > 0$ / А.И. Порабкович // Материалы международной научной конференции «XII Белорусская математическая конференция», Минск, 5 – 10 сентября 2016 г. — Минск, 2016. — Ч. 1. — С. 15–17.

Тезисы

10. Кротов, В.Г. Поточечные оценки для наилучших приближений постоянными в L^p, $p > 0$ /В.Г. Кротов, А.И. Порабкович // XXII Международная конференция Математика. Экономика. Образование. VIII Международный симпозиум «Ряды Фурье и их приложения». VII Международный семинар «Математические модели и информационные технологии в науке и производстве», Пансионат «Моряк» Новороссийского морского пароходства, 27 мая – 3 июня 2014 г.: тезисы докладов. — Ростов-на-Дону, 2014. — С. 83.

РЕЗЮМЕ

Порабкович Андрей Иванович

ОЦЕНКИ СРЕДНИХ ОСЦИЛЛЯЦИЙ ФУНКЦИЙ

Ключевые слова: пространство однородного типа, неравенство Пуанкаре–Соболева, свойство самоулучшения неравенства Пуанкаре–Соболева, теорема Джона–Ниренберга, пространство BMO, теорема Спанне, теорема Кампанато–Мейерса.

Целью диссертационной работы является исследование свойств функций с ограничениями на поведение средних осцилляций.

В диссертации использовались современные методы вещественного и функционального анализа, связанные с различными максимальными операторами, невозрастающими перестановками функции и обобщенными L^p осцилляциями функций.

Получены следующие новые результаты:

— доказаны оптимальные оценки для средних L^p-колебаний функции на общих метрических пространствах, включая случай $p > 0$;

— доказано свойство самоулучшения L^p-неравенства типа Пуанкаре на общих метрических пространствах при всех $p > 0$;

— доказаны аналог теоремы Джона-Ниренберга для пространств функций с органиченными осцилляциями BMO_φ для широкого класса функций φ и их совпадение с классическим пространством BMO. В качестве следствий из основных результатов получены обобщения теорем Спанне и Кампанато–Мейерса.

Результаты могут быть использованы в научных исследованиях по анализу на метрических пространствах с мерой, по гармоническому анализу и в учебном процессе, при чтении специальных курсов по этим разделам современной математики.

РЭЗЮМЭ

Парабковіч Андрэй Іванавіч

АЦЭНКІ СЯРЭДНІХ ВАГАННЯЎ ФУНКЦЫЙ

Ключавыя словы: прастора аднароднага тыпу, няроўнасць Пуанкарэ–Собалева, ўласцівасць самапаляпшэння няроўнасці Пуанкарэ–Собалева, тэарэма Джона–Ніренберга, прастора BMO, тэарэма Спанне, тэарэма Кампанато–Мейерса.

Мэтай дысертацыйнай працы з'яўляецца даследаванне уласцівасцяў функцый з абмежаваннямі на паводзіны сярэдніх асцыляцый.

У дысертацыі выкарыстоўваліся сучасныя метады рэчыўнага і функцыянальнага аналізу, звязаныя з рознымі максімальнымі аператарамі, невозрастающими перастаноўкамі функцыі і абагульненымі L^p асцыляцый функцый.

У дысертацыі атрыманы наступныя новыя вынікі:

— даказаны аптымальныя ацэнкі для сярэдніх L^p-ваганняў функцыі на агульных метрычных прасторах, уключаючы выпадак $p > 0$;

— даказана ўласцівасць самапаляпшэння няроўнасці тыпу Пуанкаре на агульных метрычных прасторах пры ўсіх $p > 0$;

— атрыманы аналаг тэарэмы Джона–Ниренберга для прастор функцый з абмежаванымі асцыляцый BMO_φ для шырокага класа функцый φ і іх супадзенне супадзенне з класічнай прасторай $BMO(B_0)$. У якасці следстваў з асноўных вынікаў атрыманы абагульнення тэарэм Спанне і Кампанато–Мейерса.

Вынікі могуць быць выкарыстаны ў навуковых даследаваннях па аналізе на метрычных прасторах з мерай, па гарманічнаму аналізу і ў навучальным працэсе, пры чытанні спецыяльных курсаў па гэтых раздзелах сучаснай матэматыкі.

SUMMARY

Parabkovich Andrei

ESTIMATIONS OF MEAN OSCILLATIONS OF FUNCTIONS

Keywords: space of homogeneous type, Poincáre - Sobolev inequality, property of self-improvement of Poincáre - Sobolev inequality, John - Nirenberg theorem, BMO space, Spanne theorem, Campanato - Meyers theorem.

The aim of the thesis is to study the properties of functions with restrictions on the behavior of the average oscillations.

The thesis used modern methods of real and functional analysis related to different maximum operators, non-increasing rearrangement of the function and generalized L^p-oscillations of functions.

The following new results were obtained:

— optimal estimates for the average L^p-oscillations of function on general metric spaces including case $p > 0$;

— property of self-improvement Poincáre type L^p-inequalities on general metric spaces for all $p > 0$;

— an analogue of the theorem of John-Nirenberg for spaces of bounded mean oscillations BMO_φ for wide class of functions φ and their coincidence with classical space $BMO(B_0)$. As a consequence of the main results was obtained a generalization of the theorems Spanne and Campanato–Meyers.

The results can be used in research on the analysis on metric measure spaces, harmonic analysis, and in the learning process, when reading special courses on these topics in modern mathematics.