Краткие сообщения

УДК 519.24

Н.Н. ТРУШ, Л.Э. ГАДЖИЕВА

МОДЕЛИРОВАНИЕ УСТОЙЧИВЫХ СЛУЧАЙНЫХ ВЕЛИЧИН

In this paper we present the theorem which provide method for computer modeling of α-stable stochastic variable. Algorithm of computer modeling and histograms with numerical results are provided.

В настоящее время для исследования различных экономических и финансовых моделей достаточно часто применяется вероятностный подход. Наиболее оптимальной стохастической моделью для многих практических приложений является класс устойчивых распределений Леви. Они получили большое распространение в связи с обобщенной центральной предельной теоремой, согласно которой, если единственно возможный нетривиальный предел нормированных сумм независимых одинаково распределенных случайных величин существует, то он является устойчивым. Самыми исследованными в классе устойчивых распределений являются нормальное и Коши.

Наиболее простым и удобным способом определения устойчивой случайной величины является задание ее характеристической функции.

Для того чтобы случайная величина X была устойчивой (пишут $X \sim S_\alpha(\sigma, \beta, \mu)$), необходимо и достаточно, чтобы ее характеристическая функция $\psi_X(t)$ допускала представление (см. [4])

$$\psi_X(t) = \begin{cases} \exp\{-\sigma^\alpha |t|^\alpha (1 - i\beta \operatorname{sig} n(t) \operatorname{tg}\frac{\alpha\pi}{2}) + i\mu t\}, \alpha \neq 1, \\ \exp\{-\sigma |t| (1 + i\beta \frac{2}{\pi} \operatorname{sig} n(t) \ln|t|) + i\mu t\}, \alpha = 1, \end{cases} \quad (1)$$

где $\alpha \in (0,2]$, $\sigma \geq 0$, $\beta \in [-1, 1]$ и $\mu \in \mathrm{R}$.

Сложность проблемы генерирования устойчивых случайных величин состоит в том, что вид характеристической функции не позволяет получить аналитическое выражение ни для функции распределения, ни для его плотности. Исключение составляют частные случаи устойчивого распределения: Гаусса ($S_2(\sigma,0,\mu) = N(\mu, 2\sigma^2)$), Коши ($S_1(\sigma,0,\mu)$) и Леви ($S_{1/2}(\sigma,1,\mu)$, $S_{1/2}(\sigma,-1,\mu)$), для которых применимы обычные методы моделирования. Во всех остальных случаях, чтобы получить плотность распределения, необходимо использовать численное интегрирование.

Так как $\int_{-\infty}^{\infty} |\psi_X(t)| dt = \int_{-\infty}^{\infty} \exp\{-\sigma^\alpha |t|^\alpha\} dt < \infty$, то по формуле обращения (см. [1, с. 302]) имеем

$$p_X(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \exp\{-\sigma^\alpha |t|^\alpha\} \cos\{\beta\sigma^\alpha t |t|^{\alpha-1} \operatorname{tg}\dfrac{\alpha\pi}{2} + \mu t - tx\} dx, \ \alpha \neq 1, \\ \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \exp\{-\sigma |t|\} \cos\{i\beta \dfrac{2}{\pi} t \ln|t| + \mu t - tx\} dx, \ \alpha = 1. \end{cases} \quad (2)$$

Далее проводим численное интегрирование правой части равенства (2), заменяя бесконечные пределы конечными и применяя, например, составную формулу трапеций (см. [2, с. 164]). Для контроля правильности вычислений используем условие нормировки.

Зная плотность распределения вероятностей, смоделируем непрерывную случайную величину стандартным методом исключения (см. [3, с. 61]), используя следующий

Алгоритм 1. Шаг 0. Подбираем мажорирующую функцию *g(x)*, $g(x) \geq p_X(x) \geq 0$.

Шаг 1. Моделируем случайный вектор $(x, y) \in G$, где $G = \{(x, y) : 0 \leq y \leq g(x)\}$.

Шаг 2. Если $y > p_x(x)$, то (x,y) исключаем и вновь повторяем шаг 1; если же $y \leq p_X(x)$, то значение x принимается в качестве реализации случайной величины X.

Таким образом, разработан метод компьютерного моделирования устойчивых случайных величин, однако он требует существенных затрат машинного времени и влечет за собой погрешность, связанную с численным интегрированием. Сформулируем теорему (см. [4, с. 55]), которая устанавливает выражение устойчивой случайной величины через равномерно распределенную и экспоненциальную случайные величины.

Теорема *[4].* Пусть V - случайная величина, которая равномерно распределена на $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$, *а* W- независимая от V экспоненциально распределенная случайная величина с $MW = 1$. Тогда случайная величина X, заданная следующими формулами:

$$1)\ \alpha \neq 1, \quad X = D_{\alpha,\beta} \frac{\sin\alpha(V + C_{\alpha,\beta})}{(\cos V)^{1/\alpha}} \left(\frac{\cos(V - \alpha(V + C_{\alpha,\beta}))}{W} \right)^{\frac{1-\alpha}{\alpha}}; \quad (3)$$

$$2)\ \alpha = 1, \quad X = \frac{2}{\pi}\left[\left(\frac{\pi}{2} + \beta V \right) \operatorname{tg} V - \beta \ln\left(\frac{\pi/2\, W \cos V}{\pi/2 + \beta V} \right) \right], \quad (4)$$

где $C_{\alpha,\beta} = \dfrac{\operatorname{arctg}(\beta \operatorname{tg}\frac{\pi\alpha}{2})}{\alpha}$, $D_{\alpha,\beta} = (\cos(\operatorname{arctg}(\beta \operatorname{tg}\frac{\pi\alpha}{2})))^{-1/\alpha}$ является устойчивой с $\sigma = 1$, $\mu = 0$ ($X \sim S_\alpha(1, \beta, 0)$).

Теорема дает формулы для генерирования устойчивой случайной величины с $\sigma = 1$, $\mu = 0$.

Известно, что если $X \sim S_\alpha(1, \beta, 0)$ и

$$Y = \begin{cases} \sigma X + \mu, \ \alpha \neq 1, \\ \sigma X + \dfrac{2}{\pi}\beta\sigma \ln\sigma + \mu, \ \alpha = 1, \end{cases}$$

то случайная величина Y является устойчивой с $\sigma \neq 1$, $\mu \neq 0$ ($Y \sim S_\alpha(\sigma, \beta, \mu)$).

На основании данного утверждения и теоремы был разработан алгоритм моделирования устойчивой случайной величины $X \sim S_\alpha(\sigma, \beta, \mu)$.

Алгоритм 2. Шаг 0. Полагаем k_1= rand(), k_2 - rand().

Шаг 1. Генерируем V — случайную величину, которая равномерно распределена на $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$, и W - независимую от V экспоненциально распределенную случайную величину с MW= 1.

$$V = -\pi/2 + \pi(0{,}5 + k1)/32768;\ W = -\ln((0{,}5 + k2)/32768).$$

Шаг 2. Вычисляем вспомогательные значения:

$$C_{\alpha,\beta} = \frac{\operatorname{arctg}\left(\beta \operatorname{tg}\frac{\pi\alpha}{2}\right)}{\alpha};\ D_{\alpha,\beta,\sigma} = \sigma\left(\cos\left(\operatorname{arctg}(\beta \operatorname{tg}\frac{\pi\alpha}{2})\right)\right)^{-\frac{1}{\alpha}}.$$

Шаг 3. Генерируем устойчивую случайную величину по формулам:

$$\text{а) } \alpha \neq 1,\ X = D_{\alpha,\beta,\sigma}\frac{\sin\alpha(V + C_{\alpha,\beta})}{(\cos V)^{1/\alpha}}\left(\frac{\cos(V - \alpha(V + C_{\alpha,\beta}))}{W}\right)^{\frac{1-\alpha}{\alpha}} + \mu;$$

$$\text{б) } \alpha = 1,\ X = \sigma\frac{2}{\pi}\left[\left(\frac{\pi}{2} + \beta V\right)\operatorname{tg}V - \beta\ln\left(\frac{\pi/2\, W\cos V}{\pi/2 + \beta V}\right)\right] + \mu + \frac{2}{\pi}\beta\sigma\ln(\sigma).$$

1. Ширяев А. Н. Вероятность. М., 1989.
2. Самарский А.А., Гулин А. В. Численные методы. М, 1989.
3. Харин Ю.С., Степанова М.Д. Практикум на ЭВМ по математической статистике. Мн., 1987.
4. Janicki A., Izydorczyk A. Komputerowe metody w modelowaniu stochastycznym. Warszawa, 2001.

Поступила в редакцию 22.11.05.

Николай Николаевич Труш - доктор физико-математических наук, профессор кафедры теории вероятностей и математической статистики.

Лейла Эльгизовна Гаджиева - магистрант кафедры теории вероятностей и математической статистики.

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + B_1u(t) + B_2u(t-h) + \int_0^h B(s)u(t-s)ds,\ t \geq 0, \qquad (1)$$

$$x_0 = x(0),\ u_0(\cdot) = \{u(t) = \varphi(t),\ t \in [-h, 0)\},$$

$x \in R^n$, $u \in R^r$; A, B_1, B_2

× $\varphi(t)$

$m \times n$

$x_0 \in R^n$ $\varphi(t)$, $t \in [-h, 0)$,