$\sigma_{ij}^{(1)}$

$$\begin{bmatrix} s_1 - \nu_1(s_2 + s_3) \geq \sigma_{\text{lim ext}}, \\ s_3 - \nu_1(s_2 + s_1) \leq \sigma_{\text{lim press}}, \end{bmatrix} \tag{15}$$

$\sigma_{\text{lim ext}}$, $\sigma_{\text{lim press}}$

$$s_1 = \frac{\sigma_x^{(1)} + \sigma_y^{(1)}}{2} + \frac{\sigma_x^{(1)} - \sigma_y^{(1)}}{2}\cos 2\beta + \tau_{xy}^{(1)} \sin 2\beta,$$
$$s_2 = \frac{\sigma_x^{(1)} + \sigma_y^{(1)}}{2} - \frac{\sigma_x^{(1)} - \sigma_y^{(1)}}{2}\cos 2\beta - \tau_{xy}^{(1)} \sin 2\beta,$$
$$s_3 = \nu(\sigma_x^{(1)} + \sigma_y^{(1)}), \text{ где } \beta = \frac{1}{2}\operatorname{arctg}\frac{2\tau_{xy}^{(1)}}{\sigma_x^{(1)} - \sigma_x^{(1)}}.$$

УДК 517.948.32:517.544

Т.В. ВИСКУБ, Э.И. ЗВЕРОВИЧ

КООРДИНАТНОЕ ОПИСАНИЕ РИМАНОВОЙ ПОВЕРХНОСТИ АЛГЕБРАИЧЕСКОЙ ФУНКЦИИ

In the given work the algorithm of the coordinate description of the closed Riemann surface corresponding the whole algebraic function is offered.

Преобразование выражений, содержащих многозначные аналитические функции, связано с трудностями выделения однозначных ветвей таких функций. Общим методом выделения однозначных ветвей является применение в той или иной форме теоремы о монодромии [1]. Если многозначная аналитическая функция $w = w(z)$ задана неприводимым уравнением $f(z, w) = 0$, то ее однозначности иногда можно достичь с помощью построения вспомогательного конформного гомеоморфизма римановой поверхности $\mathfrak{R}$, соответствующей приведенному уравнению, на однолистную область $D \subset \hat{\mathbb{C}}$. Если это сделать трудно или невозможно, то можно попытаться униформизировать данное соответствие, т. е. перейти от неявного задания $f(z, w) = 0$ к равносильному ему параметрическому заданию $z = z(t)$, $w = w(t)$ с помощью двух однозначных аналитических функций от параметра t. Хотя униформизация всегда возможна [2], но практически осуществить ее бывает сложно. Более простым является построение *координатного описания* той римановой поверхности $\mathfrak{R}$, на которой данное многозначное аналитическое соответствие является однозначной аналитической функцией.

Определение. Координатным описанием римановой поверхност $\mathfrak{R}$ *называется задание ее конформного атласа. Атласом называется множество* $\{(U_\alpha;\varphi_\alpha)\mid\alpha\in I\}$ *карт* $(U_\alpha,\varphi_\alpha)$, *где* $U_\alpha\subset\mathfrak{R}$ *- области карт, образующие покрытие* $\mathfrak{R}$, *т. е.* $\bigcup_{\alpha\in I}U_\alpha=\mathfrak{R}$, *а* $\varphi_\alpha:U_\alpha\to\varphi(U_\alpha)\subset$ *- гомеоморфизмы. Атлас называется конформным, если все (имеющие смысл) отображения* $\varphi_\alpha\circ\varphi_\beta^{-1}$ *являются конформными гомеоморфизмами.*

Области всех карт этого атласа (образующие открытое покрытие поверхности $\mathfrak{R}$) условимся брать односвязными, а координатные гомеоморфизмы этих областей на области, лежащие в плоскости $\hat{\mathbb{C}}$, будем находить по возможности наиболее просто. Координатное описание заменяет систему координат на поверхности $\mathfrak{R}$ в тех случаях, когда по топологическим причинам система координат не существует.

Ниже дается алгоритм координатного описания замкнутой римановой поверхности $\mathfrak{R}$, соответствующей целой алгебраической функции $w = w(t)$, удовлетворяющей алгебраическому уравнению

$$f(z,w)=w^n+\alpha_1(z)w^{n-1}+\ldots+\alpha_n(z)=0, \tag{1}$$

где все $\alpha_k(z)$ - полиномы от z с комплексными коэффициентами наибольшей степени n_1. Пусть

$$\varepsilon:=\{a_0,a_1,\ldots,a_m,\infty\}\subset\hat{\mathbb{C}}_z \tag{2}$$

- дискримина.нтное множество [3] уравнения (1). В него входят: проекции на плоскость $\hat{\mathbb{C}}_z$ всех точек ветвления и всех особых точек уравнения (1), а также точка ∞. Зафиксируем произвольно точку $z_0\in\hat{\mathbb{C}}/\varepsilon$. Для наглядности следующих построений будем считать, что все конечные точки дискриминантного множества видны из точки z_0 под различными углами. Построим лучи

$$L_k:=[a_k,\infty],\qquad k=1,2,\ldots,m,$$

причем пусть каждый луч L_k является продолжением прямолинейного отрезка $[z_0, a_k]$. Каждому из этих лучей припишем ориентацию по направлению к точке ∞. Область $D:=\hat{C}\setminus\bigcup_{k=1}^m L_k$ - связная односвязная и звездная относительно точки z_0. Ее край $\partial D=\bigcup_{k=1}^m(L_k^+\cup L_k^-)$ представляет собой объединение левых (L_k^+) и правых (L_k^-) берегов разрезов L_k. Таким образом, область с краем $D\coprod\partial D$ (назовем ее «листом») является компактификацией Мазуркевича области D. Возьмем теперь n конгруэнтных экземпляров листа

$$D_1\coprod\partial D_1,\ D_2\coprod\partial D_2,\ \ldots,\ D_n\coprod\partial D_n \tag{3}$$

и для наглядности будем считать, что они расположены один под другим в порядке возрастания их номеров. Покажем, что *листы* (3) *можно рассматривать как подмножества римановой поверхности* $\mathfrak{R}$, *а склеенные надлежащим образом вдоль краев, они могут служить геометрическим изображением всей римановой поверхности* $\mathfrak{R}$. Так как $z_0 \notin \varepsilon$, то уравнение $f(z_0,w)=0$ имеет ровно n различных корней $w_1, w_2, \dots, w_n \in \mathbb{C}$. Желая различать между собой листы (3), будем считать, что

$$(z_0, w_k) \in D_k, \quad k = 1, 2, \dots, n. \tag{4}$$

Чтобы сделать области D_k областями карт атласа, который мы хотим построить, заметим, что на основании теоремы о монодромии функциональный элемент $w = w_k(z)$, $w = w_k(z_0)$, удовлетворяющий уравнению (1), допускает аналитическое продолжение на весь лист до однозначной функции $z \mapsto w_k(z) : D_k \to \mathbb{C}$. В нашем случае это аналитическое продолжение можно найти в явном виде, т. е. в виде следующего абелева интеграла:

$$w_k(z) = w_k - \int_{z_0}^{z} \frac{f_t'(t,w)}{f_w'(t,w)}\, dt, \qquad k = 1, 2, \dots, n, \tag{5}$$

где $f(t, w) = 0$, $z \in D$, а интегрирование ведется по прямолинейному отрезку $[z_0, z] \subset D$. Аналитическое продолжение элемента $w_k(z)$ с помощью абелева интеграла (5) имеет смысл для любого пути интегрирования, не проходящего через нули функции $f_w'(t, w)$. В этом состоит его преимущество по сравнению, например, с аналитическим продолжением с помощью степенных рядов, сходящихся лишь в некоторых кругах. Таким образом, область $D_k \subset \mathfrak{R}$ может быть определена следующим образом:

$$D_k := \{(z, w_k(z)) \mid z \in D\},$$

где $w_k(z)$ находится по формуле (5), а отображение проектирования $\pi_k : (z, w_k(z)) \mapsto z$ является гомеоморфизмом D_k на D. Итак, пары

$$(D_k, \pi_k), \quad k = 1, 2, \dots, n, \tag{6}$$

являются картами искомого конформного атласа, но не исчерпывают весь атлас, поскольку области D_k попарно не пересекаются и не покрывают $\mathfrak{R}$.

Пусть $G_k \subset \mathbb{C}$ - открытая угловая область с вершиной в точке a_k и биссектрисой L_k, $k = 1,2,\dots, m$. Будем считать величины углов $G_1, G_2, \dots, G_m$ настолько малыми, чтобы эти углы попарно не пересекались. Рассмотрим выражения

$$w_j - \int_{\Gamma_k} \frac{f_t'(t,w)}{f_w'(t,w)}\, dt, \qquad j = 1, 2, \dots, n;\ k = 1,2,\dots,m, \tag{7}$$

где Γ_k - простая замкнутая кривая («петля»), которая начинается в точке z_0, затем попадает в область G_k, пересекает кривую L_k слева направо и оканчивается в точке z_0. Так как интегралы (5) удовлетворяют уравнению $f(z,w) = 0$, то и числа (7) являются корнями уравнения $f(z_0, w) = 0$, и поэтому

$$w_j - \int_{\Gamma_k} \frac{f_t'(t,w)}{f_w'(t,w)}\, dt = w_{\sigma^k(j)} \in \{w_1, w_2, \dots, w_n\}, \quad j = 1, 2, \dots, n. \tag{8}$$

Итак, каждой точке a_k сопоставляется подстановка

$$\sigma^k = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ \sigma^k(1) & \sigma^k(2) & \dots & \sigma^k(n) \end{pmatrix}, \quad k = 1, 2, \dots, m,$$

которая показывает, что риманова поверхность $\Re$ образуется путем склеивания левого берега разреза L_k^+, лежащего на j-м листе, с правым берегом разреза L_k^-, лежащим на листе с номером $\nu = \sigma^k(j)$. Таким образом, подстановки σ^k являются образующими группы монодромии римановой поверхности $\Re$. Построим теперь карты, области которых покрывают линии

$$L_{k\nu}^0 \subset \Re, \quad k = 1, \ldots, m, \quad \nu = 1, \ldots, n,$$

где $L_{k\nu} \subset \Re$ - линии, полученные в результате указанного склеивания берегов разрезов L_k, лежащих на разных листах. В качестве области карты, покрывающей линию $L_{k\nu}^0$, возьмем следующее множество:

$$\pi_\nu^{-1}(G_k) := \{(z, w_{k\nu}(z)) \mid z \in G_k\} \subset \Re, \quad \nu = \sigma^k(j),$$

где $w_{k\nu}(z) := w_j - \int\limits_{L_k(z)} \frac{f_t'(t,w)}{f_w'(t,w)} dt, \ \ z \in G_k$, $k = 1,\ldots,m,$ а линия интегрирования $L_k(z)$ начинается в точке z_0, идет в левую часть угловой области G_k и оканчивается в точке $z \in G_k$. Таким образом, искомые карты можно задать в виде $(\pi_\nu^{-1}(G_k); \pi_\nu)$, а параметрическими отображениями являются отображения проектирования $\pi_\nu : (z, w_{k\nu}(z)) \mapsto z$ области $\pi_\nu^{-1}(G_k)$ на область G_k. Замены построенных здесь карт с ранее построенными картами (6) - конформные гомеоморфизмы, поскольку все они являются сужениями тождественного отображения.

Осталось дать координатное описание окрестностей точек поверхности $\Re$, лежащих над точками $a_1, a_2, \ldots, a_m, \infty$ дискриминантного множества. Число различных точек поверхности $\Re$, лежащих над точкой a_k, равно числу циклов, на которые распадается подстановка σ^k. Более того, эти циклы содержат информацию и о том, какие именно листы образуют циклические системы при обходе вокруг точки a_k. Здесь остается невыясненным такой вопрос: *какие корни уравнений $f(a_k, w) = 0$ каким циклам соответствуют?*

Для ответа на него найдем разложения многозначной функции $w = w(z)$, удовлетворяющей уравнению $f(z, w) = 0$, по (дробным) степеням разности $(z - a_k)$. Это можно сделать, например, с помощью диаграммы Ньютона [4]. Пусть

$$w(z) = \sum_{\nu=0}^{\infty} c_\nu (z - a_k)^{\nu/p}, \tag{9}$$

- одно из таких разложений. Тогда $w(a_k) = c_0$, а в качестве координатной окрестности точки $(a_k, c_0) \in \Re$, соответствующей циклу (9), можно взять p-листный круг, т. е. множество вида $\mathrm{K}_p := \{(z, w(z)) \mid |z - a_k| < r^p\}$, где $w(z)$ вычисляется как сумма, ряда (9), а число $r > 0$ таково, что при $|z - a_k| < r^p$ ряд (9) сходится и представляет p-значную функцию. Тогда в качестве локального униформизирующего параметра окрестности точки (a_k, c_0) естественно взять комплексную переменную t, связанную с переменной z равенством

* Зная эти образующие, легко исследовать группу монодромии на транзитивность. Если окажется, что группа монодромии действует транзитивно, то это будет означать, что уравнение (1) неприводимо, а соответствующая ему риманова поверхность $\Re$ - связная.

$z = a_k + t_p$. Отображение $(z, w(z)) \mapsto t$ является гомеоморфизмом p-листного круга K_p на однолистный круг $|t| < r$. Итак, $(K_p; z = a_k + t_p)$ - карта. Поскольку пересечение $K_p \cap D_k \subset D_k$ однолистно, то и замена карт в нем $z = q_k + t_p$ однолистна (т. е. является конформным гомеоморфизмом). Аналогично можно показать, что замена карт между построенной картой и любой из карт $(\pi_\nu^{-1}(G_k); \pi_\nu)$ также является конформным гомеоморфизмом.

Здесь не вполне ясным остается вопрос о нахождении пересечений $K_p \cap D_k$ Иначе говоря, не ясен ответ на следующий вопрос: каким конкретно листам D_k принадлежат те или иные значения p-значной функции (9)? Для ответа на него зафиксируем значение $\tilde{z} \in \{0 < |z - a_k| < r^k\}$, а также ветвь корня $\sqrt[p]{\tilde{z} - a_k}$ и обозначим

$$\tilde{w} := \sum_{\nu=0}^{\infty} c_\nu \left(\sqrt[p]{\tilde{z} - a_k} \right)^\nu .$$

С учетом равенства (5) число k можно найти из уравнения

$$\tilde{w} = w_k - \int_{z_0}^{\tilde{z}} \frac{f_t'(t, w)}{f_w'(t, w)} dt.$$

Итак, $(\tilde{z}, \tilde{w}) \in D_k$

Для координатного описания окрестностей точек римановой поверхности $\mathfrak{R}$, лежащих над точкой $z = \infty$, следует в уравнении (1) перейти к локальной координате $z_1 := 1/z$ и к уравнению $z_1^{n_1} \cdot f(1/z_1; w) = 0$ применить в окрестности точки $z_1 = 0$ приведенные ранее рассуждения. Отличием этого случая от предыдущего является то, что вместо рядов вида (9) появятся ряды следующего вида:

$$\sum_{\nu=-N}^{\infty} c_N \cdot z_1^{\nu/p},$$

где $n \in N$. Однако это различие не является существенным.

1. Гурвиц А., Курант Р. Теория функций. М., 1968. С. 368.
2. Неванлинна Р. Униформизация. М, 1955.
3. Фукс Б. А., Левин В. И. Функции комплексного переменного и некоторые их приложения. М; Л., 1951.
4. Чеботарев Н. Г. Теория алгебраических функций. М.; Л., 1948. С. 234.

Поступила в редакцию 27.04.06.

Татьяна Валерьевна Вискуб - аспирант кафедры теории функций. Научный руководитель - Э.И.Зверович.

Эдмунд Иванович Зверович - доктор физико-математических наук, профессор кафедры теории функций.