ГРАНИЧНЫЕ УСЛОВИЯ ДЛЯ ПОТЕНЦИАЛОВ НА ОБОЛОЧКАХ ИЗ КОМПОЗИТНЫХ МАТЕРИАЛОВ

Д.П. Тавакколи (Иран), В.Т. Ерофеенко (Минск, Беларусь)

В пространстве $\mathbb{R}^3$ с фиксированной декартовой системой координат $Oxyz$ рассмотрим тонкую замкнутую оболочку D толщины Δ, ограничивающую область D_2. Пусть D_1 – внешняя область оболочки, а Γ_1, Γ_2 – внешняя и внутренняя поверхности области D. В области D_1 распространяется монохроматическое плоское первичное электромагнитное поле $\vec{E}_0$, $\vec{H}_0$, тогда в области D_1 образуется поле $\vec{E}_1 = \vec{E}_0 + \vec{E}'_1$, $\vec{H}_1 = \vec{H}_0 + \vec{H}'_1$, где $\vec{E}'_1$, $\vec{H}'_1$ – отраженное поле в D_1, а в области D_2 проникает поле $\vec{E}_2$, $\vec{H}_2$. Поля $\vec{E}_j$, $\vec{H}_j$ в областях D_j удовлетворяют уравнениям Максвелла

$$\operatorname{rot}\vec{E}_j = i\,\omega\mu_j\vec{H}_j, \quad \operatorname{rot}\vec{H}_j = -i\,\omega\varepsilon_j\vec{E}_j, \tag{1}$$

где ε_j, μ_j – комплексные диэлектрическая и магнитная проницаемости среды в D_j. Область D заполнена композитным материалом, к котором электромагнитное поле удовлетворяет уравнениям

$$\operatorname{rot}\vec{E} = i\,\omega(\mu\vec{H} + Z\vec{E}), \quad \operatorname{rot}\vec{H} = -i\,\omega(\varepsilon\vec{E} + G\vec{H}), \tag{2}$$

где комплексные параметры ε, μ, Z, G характеризуют композит; ω – круговая частота поля.

Для постановки краевых задач дифракции поля $\vec{E}_0, \vec{H}_0$ на оболочке D сформулируем граничные условия, связывающие решения уравнений (1) с учетом (2).

Граничные условия на оболочке. В точке $M_1 \in \Gamma_1$ проведем внутреннюю нормаль $\vec{n}$, которая пересекает поверхность Γ_2 в точке M_2, и построим тройку взаимно ортогональных единичных векторов $\vec{m}, \vec{\nu}, \vec{n}$, где векторы $\vec{m}, \vec{\nu}$ касательны к поверхности Γ_1 в точке M_1. Представим поля $\vec{E}_j, \vec{H}_j$ в локальном базисе в виде

$$\vec{E}_j = \vec{E}_m^{(j)}\vec{m} + \vec{E}_\nu^{(j)}\vec{\nu} + \vec{E}_n^{(j)}\vec{n}, \quad \vec{H}_j = \vec{H}_m^{(j)}\vec{m} + \vec{H}_\nu^{(j)}\vec{\nu} + \vec{H}_n^{(j)}\vec{n}.$$

Для моделирования проникновения поля $\vec{E}_0, \vec{H}_0$ через достаточно тонкую оболочку D исключим вычисление поля в слое D, введя специальные граничные условия, связывающие поля по обе стороны оболочки D.

Модель 1. Если радиусы кривизны тонкостенной оболочки $R \gg \Delta$ и длина волны в области D_1 плоского первичного поля $\lambda_1 \gg \Delta$, тогда в локально-плоском приближении на поверхности оболочки выполнены граничные условия сопряжения

$$\begin{aligned} E_{2\tau}(M_2)\Big|_{\Gamma_2} &= \big(A_{11}(M_1)E_{1\tau}(M_1) + A_{12}(M_1)H_{1\tau}(M_1)\big)\Big|_{\Gamma_1}, \\ H_{2\tau}(M_2)\Big|_{\Gamma_2} &= \big(A_{21}(M_1)E_{1\tau}(M_1) + A_{22}(M_1)H_{1\tau}(M_1)\big)\Big|_{\Gamma_1}, \end{aligned} \tag{3}$$

где $E_{j\tau} = \begin{pmatrix} E_m^{(j)} \\ E_\nu^{(j)} \end{pmatrix}$, $H_{j\tau} = \begin{pmatrix} H_m^{(j)} \\ H_\nu^{(j)} \end{pmatrix}$ – касательные к поверхности Γ_j компоненты поля; двумерные матрицы $A_{ls} = \{A_{ls}^{pq}\}$ $(p, q, l, s = 1, 2)$ выражаются через параметры оболочки $\varepsilon, \mu, Z, G, \Delta$ и параметры первичного поля $\alpha_1, \alpha_2, \omega$. Для плоского экрана

$$A_{11} = p\begin{pmatrix} p_2(\Phi_1 S_1 - C_1) - p_1(\Phi_2 S_2 - C_2); & -p_2\Theta_1 S_1 + p_1\Theta_2 S_2 \\ p_2\delta_1 S_1 - p_1\delta_2 S_2; & -p_2(\Phi_1 S_1 + C_1) + p_1(\Phi_2 S_2 + C_2) \end{pmatrix},$$

$$A_{12} = p\begin{pmatrix} -\Phi_1 S_1 + C_1 + \Phi_2 S_2 - C_2; & \Theta_1 S_1 - \Theta_2 S_2 \\ -\delta_1 S_1 + \delta_2 S_2; & \Phi_1 S_1 + C_1 - \Phi_2 S_2 - C_2) \end{pmatrix}, A_{21} = -p_1 p_2 A_{12},$$

$$A_{22} = p\begin{pmatrix} p_1(-\Phi_1 S_1 + C_1) + p_2(\Phi_2 S_2 - C_2); & p_1\Theta_1 S_1 - p_2\Theta_2 S_2 \\ -p_1\delta_1 S_1 + p_2\delta_2 S_2; & p_1(\Phi_1 S_1 + C_1) - p_2(\Phi_2 S_2 + C_2) \end{pmatrix},$$

$$\Phi_j = \frac{\alpha_1\alpha_2 g_j}{g v_j}, \Theta_j = \frac{g_j}{g v_j}(\alpha_1^2 - k_j^2),\ \delta_j = \frac{g_j}{g v_j}(\alpha_2^2 - k_j^2),\ p = \frac{1}{p_1 - p_2},\ p_j = \frac{1}{\mu}\Big(\frac{ig}{\omega g_j} - Z\Big),$$

$$k_j^2 = g + \frac{1}{2}a^2 + af_j,\ f = \sqrt{\omega^2\varepsilon\mu - b^2},\ 0 \leqslant \arg f < \pi,\ f_j = (-1)^j f,\ b = \frac{1}{2}\omega(G + Z),$$

$$g = \omega^2(\varepsilon\mu - ZG),\ g_j = f_j - \frac{1}{2}a,\ a = i\omega(G - Z),\ v_j = \sqrt{\alpha_1^2 + \alpha_2^2 - k_j^2},$$

$$-\frac{\pi}{2} \leqslant \arg v_j < \frac{\pi}{2},\ S_j = \operatorname{sh}(v_j\Delta),\ C_j = \operatorname{ch}(v_j\Delta).$$

Граничные условия для потенциалов. В качестве оболочки D рассмотрим цилиндрическую бесконечно протяженную вдоль оси Oz оболочку. Пусть γ_j – контуры сечения поверхностей Γ_j плоскостью $z = 0$. При воздействии плоского первичного поля на оболочку поля в областях D_j имеют структуру

$$\vec{E}_j = \big(\dot{E}_x\vec{e}_x + \dot{E}_y\vec{e}_y + u(x,y)\vec{e}_z\big)e^{i\beta z}, \quad \vec{H}_j = \big(\dot{H}_x\vec{e}_x + \dot{H}_y\vec{e}_y + v(x,y)\vec{e}_z\big)e^{i\beta z},$$

где β – постоянная, $u_j(x,y)$ – потенциалы TH-полей, $v_j(x,y)$ – потенциалы TE-полей, которые удовлетворяют двумерному уравнению [1]

$$\Delta u_j + d_j^2 u_j,\ d_j^2 = k_j^2 - \beta^2,\ k_j = \omega\sqrt{\varepsilon_j \mu_j}.$$

Для цилиндрической оболочки $\vec{m} = \vec{e}_z$, $\dot{E}_m^{(j)} = u_j$, $\dot{H}_m^{(j)} = v_j$. Используя (3), получим граничные условия.

Модель 2. В локально-плоском приближении на поверхности цилиндрической оболочки для потенциалов u_j, v_j выполнены граничные условия сопряжения

$$\begin{aligned}
u\Big|_{\gamma_2} &= \left(A_{11}^{11}u_1 + A_{12}^{11}v_1 + A_{11}^{12}\dot{E}_{1\nu} + A_{12}^{12}\dot{H}_{1\nu}\right)\Big|_{\gamma_1},\\
\dot{E}_{2\nu}\Big|_{\gamma_2} &= \left(A_{11}^{21}u_1 + A_{12}^{21}v_1 + A_{11}^{22}\dot{E}_{1\nu} + A_{12}^{22}\dot{H}_{1\nu}\right)\Big|_{\gamma_1},\\
v\Big|_{\gamma_2} &= \left(A_{21}^{11}u_1 + A_{22}^{11}v_1 + A_{21}^{12}\dot{E}_{1\nu} + A_{22}^{12}\dot{H}_{1\nu}\right)\Big|_{\gamma_1},\\
\dot{H}_{2\nu}\Big|_{\gamma_2} &= \left(A_{21}^{21}u_1 + A_{22}^{21}v_1 + A_{21}^{22}\dot{E}_{1\nu} + A_{22}^{22}\dot{H}_{1\nu}\right)\Big|_{\gamma_1},
\end{aligned}$$

где

$$\dot{E}_{j\nu} = c_j\frac{\partial u_j}{\partial \vec{\nu}} + b_j\frac{\partial v_j}{\partial \vec{n}}, \quad \dot{H}_{j\nu} = c_j\frac{\partial v_j}{\partial \vec{\nu}} - a_j\frac{\partial u_j}{\partial \vec{n}},$$

$$a_j = \frac{i\omega\varepsilon_j}{k_j^2 - \beta^2}, \quad b_j = \frac{i\omega\mu_j}{k_j^2 - \beta^2}, \quad c_j = \frac{i\beta}{k_j^2 - \beta^2}.$$

Литература

1. Аполлонский С.М., Ерофеенко В.Т. *Эквивалентные граничные условия в электродинамике*. СПб: Безопасность, 1998.