МЕТОД ХАРАКТЕРИСТИК ДЛЯ НАЧАЛЬНО-КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ ВОЛНОВОГО УРАВНЕНИЯ С ИНТЕГРАЛЬНЫМ ГРАНИЧНЫМ УСЛОВИЕМ

В.Т. Ерофеенко, В.И. Корзюк, Ю.В. Пулко (Минск, Беларусь)

В прикладной электродинамике значительное место занимают математические модели с импедансными граничными условиями на сильно проводящих телах, позволяющими исключить вычисление поля внутри тел. В случае монохроматических полей используются импедансные граничные условия Щукина – Леонтовича [1, с. 203], являющиеся граничными условиями третьего рода. В случае же полей с произвольной зависимостью от времени импедансные граничные условия приобретают интегральный вид [1, с. 361]. При обосновании моделей с интегральными граничными условиями требует своего рассмотрения проблема существования и единственности решения соответствующей краевой задачи с неклассическими граничными условиями.

Для постановки задачи в пространстве $\mathbb{R}^3$ рассмотрим плоский экран $D = \{0 < z < l, -\infty < x, y < \infty\}$, заполненный материалом с диэлектрической проницаемостью ε и магнитной проницаемостью μ $(\gamma = 0)$. В полупространстве $D_2(z > l)$ среда характеризуется магнитной проницаемостью μ_2 и удельной электрической проводимостью γ_2. В слое D распространяется электромагнитное поле $\vec{E}$, $\vec{H}$, которое порождается заданной напряженностью $\vec{E}_\tau\big|_{z=0} = \vec{E}_1$ на плоскости $\Gamma_1(z = 0)$ и начальными условиями $\vec{E}\big|_{t=0} = \vec{E}_0$, $\vec{H}\big|_{t=0} = \vec{H}_0$ в слое D. Предполагается, что проникновение поля в полупространство D_2 моделируется импедансным граничным условием без учета токов смещения. Сформулируем соответствующую начально-краевую задачу для определения поля $\vec{E}$, $\vec{H}$:

$$\operatorname{rot}\vec{H} = \varepsilon\frac{\partial\vec{E}}{\partial t}, \quad \operatorname{rot}\vec{E} = -\mu\frac{\partial\vec{H}}{\partial t}, \quad t > 0,\ (x,y,z) \in D, \tag{1}$$

$$\begin{gathered}\left[\vec{n},\vec{E}\right]\Big|_{z=0} = -\sqrt{\frac{\mu_2}{\pi\gamma_2}}\int\limits_0^t \frac{\partial}{\partial\eta}\left[\vec{n},\left[\vec{H}(\eta),\vec{n}\right]\right]\Big|_{z=0}\frac{d\eta}{\sqrt{t-\eta}}, \quad t \geqslant 0,\ -\infty < x,y < \infty,\\ \left[\vec{n},\vec{E}\right]\Big|_{z=l} = \vec{E}_1, \quad t \geqslant 0,\ -\infty < x,y < \infty,\end{gathered} \tag{2}$$

$$\vec{E}\Big|_{t=0} = \vec{E}_0(z), \quad \vec{H}\Big|_{t=0} = \vec{H}_0(z), \quad (x,y,z) \in \overline{D} \tag{3}$$

где $\vec{n} = \vec{e}_z$ – нормаль к слою D.

Рассмотрим вариант, когда вектора $\vec{E}$, $\vec{H}$ параллельны слою D: $\vec{E} = u(z,t)\vec{e}_x$, $\vec{H} = v(z,t)\vec{e}_y$, $\vec{E}_1 = \nu(t)\vec{e}_x$, $\vec{E}_0 = u_0(z)\vec{e}_x$, $\vec{H}_0 = v_0(z)\vec{e}_y$. Из уравнений Максвелла (1) следует $\dfrac{\partial u}{\partial t} = -\dfrac{1}{\varepsilon}\dfrac{\partial v}{\partial z}$, $\dfrac{\partial v}{\partial t} = -\dfrac{1}{\mu}\dfrac{\partial u}{\partial z}$, тогда задача (1)–(3) преобразуется к следующему виду:

$$\frac{\partial^2 u(z,t)}{\partial t^2} - a^2\frac{\partial^2 u(z,t)}{\partial z^2} = 0, \quad 0 < z < l, \ t > 0, \tag{4}$$

$$u(z,t)\Big|_{t=0} = \varphi(z), \quad \frac{\partial u(z,t)}{\partial t} = \psi(z), \quad 0 \leqslant z \leqslant l, \tag{5}$$

$$u(z,t)\Big|_{z=0} = c\int\limits_0^t \frac{\partial u(z,\tau)}{\partial z}\Big|_{z=0}\frac{d\tau}{\sqrt{t-\tau}}, \quad u(z,t)\Big|_{z=l} = \nu(t), \quad t \geqslant 0, \tag{6}$$

где $a = \dfrac{1}{\sqrt{\varepsilon\mu}}$; $c = \dfrac{1}{\mu}\sqrt{\dfrac{\mu_2}{\pi\gamma_2}}$; $\varphi(z) = u_0(z)$; $\psi(z) = -\dfrac{1}{\varepsilon}\dfrac{\partial v_0(z)}{\partial z}$.

Требуется определить класс решений задачи (4)–(6) $u(z,t) \in C^2(\overline{\Omega})$, где $\Omega = \{t > 0, 0 < z < l\}$.

Используя метод характеристик, условия согласования и решая задачу Гурса, получим решение задачи (4)–(6) в виде

$$u(z,t) = \frac{\varphi(z-at)+\varphi(z+at)}{2} + \frac{1}{2a}\int\limits_{z-at}^{z+at}\psi(\xi)d\xi, \quad 0 < t < \frac{l}{2a}, \ at < z < l - at,$$

$$u(z,t) = \nu\left(\frac{z-l}{a}+t\right) + \frac{\varphi(z-at)-\varphi(2l-z-at)}{2} + \frac{1}{2a}\int\limits_{z-at}^{2l-z-at}\psi(\xi)d\xi, \quad \frac{l}{2} < z < l,$$

$$\frac{l-z}{a} < t < \frac{z}{a},$$

$$u(z,t) = \frac{\varphi(-z+at)+\varphi(z+at)}{2} + \frac{1}{2a}\left[\int\limits_0^{-z+at}\psi(\xi)d\xi + \int\limits_0^{z+at}\psi(\xi)d\xi\right] + \frac{a}{2\pi c^2}\times$$
$$\times\int\limits_0^{-z+at}\left[\varphi(\eta) + \frac{1}{a}\int\limits_0^{\eta}\psi(\xi)d\xi\right]\left(1 - \frac{2c}{a}\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{z-at-\eta}}\right)d\eta + \frac{a}{\pi c^2}\int\limits_0^{-z+at} e^{-\frac{a}{\pi c^2}(-z+at+y)}\times$$
$$\times\left(\frac{\varphi(y)}{2} + \frac{1}{2a}\int\limits_0^{y}\psi(\xi)d\xi + \frac{a}{2\pi c^2}\int\limits_0^{y}\left[\varphi(\eta) + \frac{1}{a}\int\limits_0^{\eta}\psi(\xi)d\xi\right]\left(1 - \frac{2c}{a}\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{y-\eta}}\right)d\eta\right)dy,$$
$$0 < z < \frac{l}{2}, \ \frac{z}{a} < t < \frac{l-z}{a},$$

$$u(z,t)=\nu\left(\frac{z-l}{a}+t\right)+\frac{\varphi(at-z)-\varphi(2l-z-at)}{2}+\frac{1}{2a}\left[\int\limits_0^{-z+at}\psi(\xi)d\xi+\right.$$

$$\left.+\int\limits_0^{2l-z-at}\psi(\xi)d\xi\right]+\frac{a}{2\pi c^2}\int\limits_0^{-z+at}\left[\varphi(\eta)+\frac{1}{a}\int\limits_0^{\eta}\psi(\xi)d\xi\right]\left(1-\frac{2c}{a}\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{z-at-\eta}}\right)d\eta+$$

$$+\frac{a}{\pi c^2}\int\limits_0^{-z+at}e^{-\frac{a}{\pi c^2}(-z+at+y)}\left(\frac{\varphi(y)}{2}+\frac{1}{2a}\int\limits_0^{y}\psi(\xi)d\xi+\frac{a}{2\pi c^2}\int\limits_0^{y}\left[\varphi(\eta)+\frac{1}{a}\int\limits_0^{\eta}\psi(\xi)d\xi\right]\times\right.$$

$$\left.\times\left(1-\frac{2c}{a}\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{y-\eta}}\right)d\eta\right)dy,\quad \frac{l}{2a}<t<\frac{l}{a},\ l-at<z<at.$$

Литература

1. Аполлонский С.М., Ерофеенко В.Т, Козловская И.С. *Эквивалентные граничные условия в электродинамике.* СПб: Изд-во "Безопасность", 2000.