К ВОПРОСУ ЧИСЛЕННОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ

В.В. Бобков (Минск, Беларусь)

При численном моделировании ряда нестационарных задач математической физики приходится (в силу постановки по временно́й переменной односторонних условий) уделять дополнительное внимание проблеме сохранения заложенных в дифференциальных уравнениях законов изменения начальных данных. В частности, в случае простейших линейных эволюционных задач многие из этих законов могут быть априори сформулированы. При разработке численных методов для более широких классов задач естественно требовать от их конструкции соблюдения этих характерных законов в применении к соответствующим частным случаям. К примеру, после аппроксимации в параболических уравнениях зависимостей по пространственным переменным мы приходим к начальной задаче для системы обыкновенных дифференциальных уравнений, в простейшем случае с постоянными коэффициентами. В этом случае характерным является наличие у системы единственного стационарного решения (асимптотически устойчивого). При численном моделировании столь значимую эволюционную характеристику важно сохранить как на каждом шаге дискретизации, так и в пределе по времени. Последний факт может быть использован также и с целью построения итерационных процессов установления для решения соответствующих стационарных задач. К сожалению, многие из известных численных методов даже в простейших случаях не удовлетворяют отмеченным выше требованиям сохранения положения равновесия. Это относится, например, к базирующимся на неявных схемах первого порядка точности методам покомпонентного расщепления (методам дробных шагов) типа (5.5) из [1], к факторизованным схемам вида (10) из [2] при числе разбиений, большем двух, и к некоторым другим. Подобный недостаток характерен также для локально одномерных схем типа (32) из [3, с. 411] (см. также [4, с. 481]), тем более в декларируемом варианте произвольного разбиения вектора неоднородности. Игнорирование указанных требований в случае многокомпонентного метода переменных направлений решения стационарных задач математической физики, привязанного к векторным аддитивным схемам расщепления типа (2) и (3) из [5], привело к принципиально ошибочным утверждениям и рекомендациям (см., например, теорему 1 из [5] и аналогичные ей).

В данном сообщении приводятся также другие дополнительные требования к численному моделированию в рассматриваемом случае и обращается внимание на иные недостатки многих из известных численных методов. Предлагаются примеры численных методов, свободных от такого рода недостатков. Такие методы базируются на результатах работ [6, 7]. Они имеют многоэтапный характер. Применительно к системе

$$u'(x) = Au(x) + a, \quad t \leqslant x \leqslant t + \tau,$$

с постоянными матрицей A и вектором a эти методы (сколь угодно высокого порядка точности) принимают вид

$$\hat{y} = E(A, \tau)y + S(A, \tau)a,$$

где матрицы $E(A, \tau)$ и $S(A, \tau)$ связаны соотношением

$$E(A, \tau) = I + S(A, \tau)A,$$

при этом на шаге τ для каждой пары вещественных собственных значений матрицы A, упорядоченных по правилу $\lambda_i < \lambda_j$, справедливы неравенства (условия спектральной монотонности)

$$0 < E(\lambda_i, \tau) < E(\lambda_j, \tau).$$

Обеспечение таких условий важно для сохранения правильной структуры приближенного решения на каждом шаге его эволюции. Эти условия, к примеру, не соблюдаются (при выполненных требованиях сохранения на шаге положения равновесия) не только в многомерном случае для методов расщепления (дробных шагов) вида (38.7) из [1] или разностной схемы эволюционной факторизации (7) из [2], но и в двумерном случае, в частности, для метода стабилизирующей поправки [8] или метода переменных направлений [9]. Среди традиционных простейших разностных схем, которые не связаны с процедурой расщепления пространственного оператора, требованием спектральной монотонности при любом шаге τ удовлетворяет лишь схема с опережением (неявный метод Эйлера)

$$\hat{y} = y + \tau(A\hat{y} + a),$$

да и то в устойчивом случае. Однако применять ее (даже в этом случае) на больших временны́х интервалах нецелесообразно в силу низкого порядка точности и отсутствия свойства монотонного по τ изменения погрешности.

Литература

1. Марчук Г. И. *Методы расщепления.* М., 1988.

2. Калиткин Н. Н. *Улучшенная факторизация параболических схем* // Докл. РАН. 2005. Т. 402. № 4. С. 467–471.

3. Самарский А. А. *Введение в теорию разностных схем.* М., 1971.

4. Самарский А. А. *Теория разностных схем.* – М., 1983. – 616 с.

5. Абрашин В. Н., Жадаева Н. Г. *Многокомпонентный метод переменных направлений решения стационарных задач математической физики. 1* // Дифференц. уравнения. 1996. Т. 32. № 9. С. 1212–1221.