ИНФОРМАЦИОННЫЕ СИСТЕМЫ И ТЕХНОЛОГИИИ (IST'2004)

Материалы II Международной конференции
Минск, 8 – 10 ноября 2004 г.

В двух частях

Часть 2

INFORMATIONAL SYSTEMS AND TECHNOLOGIES (IST'2004)

Proceedings of the II International conference
Minsk, November 8 – 10, 2004

In two parts

Part 2

ОПТИМИЗАЦИЯ НЕОДНОРОДНЫХ ПОТОКОВ В СЕТЯХ

Л. А. Пилипчук

Белорусский государственный университет, г. Минск, Беларусь

На конечной ориентированной мультисети $S(t)=\{I,U(t)\}$, $t=\overline{0,T-1}$, изменяющейся в некотором интервале времени $[0,T-1]$, с множеством узлов I $(n=|I|)$ и с множеством дуг $U(t)$ $(m(t)=|U(t)|$ (O и T – списки начальных и конечных узлов), рассмотрим следующую модель p-продуктовой динамической производственно-транспортной задачи:

$$\sum_{t=0}^{T-1}\sum_{q=1}^{p}\left(\sum_{k=1}^{m(t)}c_{k,q}(t)f_{k,q}(t)+\right.$$

$$\left.+\sum_{i=1}^{n}(\hat{c}_{i,q}(t+1)\hat{x}_{i,q}(t+1)+h_{i,q}(t)x_{i,q}(t)+h_{-i,q}(t)x_{-i,q}(t))\right)\to\min \qquad (1)$$

$$\hat{x}_{i,q}(t+1)=\hat{x}_{i,q}(t)+\sum_{i=T(k)}f_{k,q}(t)-\sum_{i=O(k)}f_{k,q}(t)-x_{i,q}(t)-a_{i,q}(t),$$

$$t=\overline{0,T-1},\ i=\overline{1,n},\ q=\overline{1,p}\,(1) \qquad (2)$$

$$\sum_{q=1}^{p}\hat{x}_{i,q}(t+1)\le s_i(t+1),\ \sum_{q=1}^{p}x_{i,q}(t)\le\delta_i(t),\ \sum_{q=1}^{p}x_{-i,q}(t)\le\delta_{-i}(t),$$

$$t=\overline{0,T-1},\ i=\overline{1,n} \qquad (3)$$

$$\sum_{q=1}^{p}f_{k,q}(t)\le d_k(t),\ t=\overline{0,T-1},\ k=\overline{1,m}$$

$$0\le\hat{x}_{i,q}(t+1)\le s_{i,q}(t+1),\quad 0\le f_{k,q}(t)\le d_{k,q}(t)$$

$$\hat{x}_{i,q}(0)=b_{i,q}\ge 0$$

где $c_{k,q}(t)$ – стоимость перевозки единицы продукта q вида по дуге $k=k(i,j)$ в момент времени t; $\hat{c}_{i,q}(t)$ – стоимость хранения единицы продукта q вида на складе узла i в момент времени t; $h_{i,q}(t)$ $(h_{-i,q}(t))$ – стоимость производства (потребления) единицы продукта q вида в узле i в момент времени t; $f_{k,q}$ – поток по дуге $k=k(i,j)$ q вида; $\hat{x}_{i,q}(t)$ – запас продукта q вида на складе узла i в момент времени t; $a_{i,q}(t)$ – постоянная интенсивность i-го узла для q-го продукта в момент времени t $(a_{i,q}(t)>0$ – пункт производства, $a_{i,q}(t)<0$ – пункт потребления, $a_{i,q}(t)=0$ – транзитный пункт); $d_k(t)$ – пропускная способность дуги $k=k(i,j)$ в момент времени t; $d_{k,q}(t)$ – пропускная способность перевозки продукта q вида по дуге $k=k(i,j)$ в момент времени t; $s_i(t)$ – максимальный объем склада узла i в момент времени t; $s_{i,q}(t)$ – максимально возможное количество продукта q вида на складе узла i в момент времени t; $b_{i,q}$ – запас продукта q вида на складе узла i в момент времени t; $b_{i,q}$ – запас продукта q вида на складе узла i в начальный момент времени (обычно $b_{i,q}=0$); $\delta_i(t)$ ($\delta_{-i}(t)$) – максимально возможное количество производства (потребления) продукта в узле i в момент времени t; $\delta_{i,q}(t)$ ($\delta_{-i,q}(t)$) – максимально возможное количество производства (потребления) продукта q вида в узле i в момент времени t.

Склады наполняются в конце периода t, а опустошаются в начале периода $t+1$. Если требуется полностью потребить все продукты за указанный период времени, то следует положить $\hat{x}_{i,q}(T)=0$.

Сеть $S(t)=\{I,U(t)\}$ представляет собой набор подсетей, дуги которого изменяются во времени. Состояние сети фиксируем в определенные моменты времени ($t=\overline{0,T-1}$).

1. СТРУКТУРА СЕТИ

Структура сети определяется множеством узлов и множеством дуг, которые связывают эти узлы. Узел i является элементом множества узлов $I=[1,2,3,\ldots,i,\ldots n]$. Дугу можно определить как упорядоченную пару узлов (i,j) или как элемент, скажем, элемент k, списка дуг $U=[1,2,3,\ldots,k,\ldots m]$. Таким образом, дугу можно задавать по-разному: дуга k, дуга k (i,j) или просто (i,j). Говорят, что дуга k (i,j) выходит из узла i и входит в узел j. Соответственно узел i называют начальным узлом дуги, а j – конечным. Для сети составляются списки начальных и конечных узлов

$$O=[o_1,o_2,\ldots,o_m],\ T=[t_1,t_2,\ldots,t_m],$$

где o_k и t_k соответственно начальный и конечный узлы дуги k. Множество узлов и дуг ориентированной сети обозначим $G=(I,U)$, где значения n и m, а также множества O и T полностью определяют связи, присутствующие в сети.

В основе сетевых моделей лежит понятие ориентированного графа. В дальнейшем, при решении задачи о потоке в сети, будет удобно пользоваться таким понятием как *расширенная сеть*, которая легко получается из исходной сети.

Для каждой дуги k, $k\subset U$ сети G определим *противоположно ориентированную дугу* (-k), которая связывает ту же пару вершин, что и дуга k, но имеет противоположную ориентацию. Дугу -k будем называть обратной дугой. По определению, $o(-k)=t(k)$.

Множество узлов расширенной сети $S_E=[N,U_E]$ совпадает с множеством узлов I исходной сети S, а множество дуг расширенной сети содержит как номер дуги сети D, так и все обратные дуги. Таким образом, если $U=[1,2,3,\ldots m]$, то $U_E=[1,2,3,\ldots,m,-1,-2,-3,\ldots-m]$.

В стандартных задачах о потоке легко вычисляется значение параметра стоимости для обратных дуг в расширенной сети D_e: если h_k – стоимость для прямой дуги k, то $-h_k$ – стоимость обратной дуги $-k$.

2. ПРЕОБРАЗОВАНИЕ СЕТИ

Пусть в начальный момент времени существуют все узлы. Те узлы, которые не участвуют в процессе производства/потребления и перевозок на данный момент времени, должны быть свободными от дуг, то есть не должно быть дуг входящих и выходящих из этого узла, в соответствующей времени подсети. Таким образом, исходную сеть можно представить следующей схемой, состоящей из $(T-1)$ подсетей, соединенных дугами одного направления (дуга соединяет два узла с одинаковым номером и направлена от узла подсети времени t к узлу подсети времени $(t+1)$, то есть в строгом хронологическом порядке):

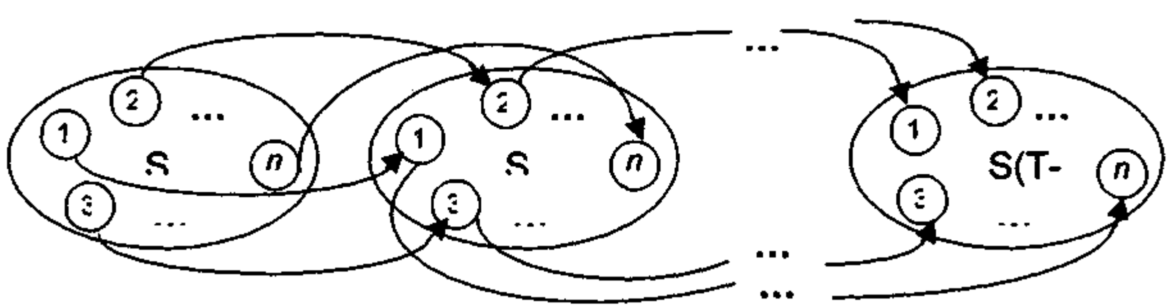

Рис.1. Преобразование сети

Поставим в соответствие каждому узлу во времени свой уникальный номер: $i(t)=n\cdot t+i$, $i=\overline{1,n}$, $t=\overline{0,T}$. Множество I увеличится в $(T+1)$ раз, в результате чего получим множество узлов I'. Соответственно изменятся множества $U(t)$, $t=\overline{0,T-1}$. Теперь зависимость от времени у нас хранится в узлах, поэтому можно не рассматривать зависимость от времени на дугах. Переименуем дуги $k(t)=(i(t),j(t))=(nt+i,nt+j)=\sum_{\tau=0}^{t}m(\tau)+k$, $t=\overline{0,T-1}$, $k=\overline{1,m}$. Номера дуг определяются однозначно. Введем дополнительные дуги $(i(t),i(t+1))$, которые отражают зависимость соседних периодов времени. Пронумеруем дополнительные дуги следующим образом: $\mu+n\cdot t+i$, где $\mu=\sum_{t=0}^{T-1}m(t)=\left|\bigcup_{t=0}^{T-1}U(t)\right|$, $i=\overline{1,n}$, $t=\overline{0,T-1}$. В результате получим новое множество дуг, обозначим его через U. Соответственно изменятся и списки начальных и конечных узлов — O и T. Если $\hat{f}_{i,q}(T)=0$, то можно последний период времени T не учитывать, то есть из сети в период времени $T-1$ дополнительных дуг выходить не будет, по этой причине увеличивать множество I следует увеличить только в T раз.

Введем замену переменных

$$\hat{x}_{i,q}(t+1)=f_{(i(t),i(t+1)),q}=f_{\mu+nt+i,q},\ t=\overline{0,T-1},\ q=\overline{1,p}$$

$$a_{i,q}=a_{i,q}(0)+b_{i,q},\ i=\overline{1,n},\ q=\overline{1,p}$$

$$a_{i,q}(t)=a_{(i(t),i(t+1)),q}=a_{\mu+nt+i,q},\ s_{i,q}(t+1)=d_{(i(t),i(t+1)),q}=d_{\mu+nt+i,q},\ \delta_{i,q}(t)=\delta_{nt+i,q},$$

$$x_{i,q}(t)=x_{nt+i,q},\ t=\overline{1,T-1},\ i=\overline{1,n},\ q=\overline{1,p}$$

$$s_i(t+1)=d_{(i(t),i(t+1))}=d_{M+nt+i},\ \delta_i(t)=\delta_{nt+i},\ x_i(t)=x_{nt+i},$$

$$t=\overline{0,T-1},\ i=\overline{1,n}$$

Аналогично можно рассматривать задачу, когда зависимость во времени более одного интервала. Следует ввести дуги, соединяющие соответствующие узлы во времени и произвести соответствующую замену переменных.

Для удобства записи переопределим $n:=n\cdot(T+1)=\left|I'\right|$. Итак, задача (1)-(3) сводится к следующей статической многопродуктовой производственно-транспортной задаче на конечной ориентированной мультисети $R=\{I',U\}$:

$$\sum_{q=1}^{p}\left(\sum_{k=1}^{m}c_{k,q}f_{k,q}+\sum_{i=1}^{n}\left(h_{i,q}x_{i,q}+h_{-i,q}x_{-i,q}\right)\right)\to\min$$

$$\sum_{i=O(k)}f_{k,q}-\sum_{i=T(k)}f_{k,q}=a_{i,q}+x_{i,q}-x_{-i,q},\ i=\overline{1,n},\ q=\overline{1,p}$$

$$\sum_{q=1}^{p}x_{i,q}\le\delta_i,\ \sum_{q=1}^{p}x_{-i,q}\le\delta_{-i},\ \sum_{q=1}^{p}f_{k,q}\le d_k,\ k=\overline{1,m}$$

где $c_{k,q}$ - стоимость перевозки единицы продукта q вида по дуге $k=k(i,j)$; $h_{i,q}\ (h_{-i,q})$ - стоимость производства (потребления) единицы продукта q вида в узле i; $f_{k,q}$ - поток по дуге $k=k(i,j)$ q вида; $x_{i,q}(x_{-i,q})$ - количество единиц продукта q вида, произведенных (потребленных) в узле i; $a_{i,q}$ - постоянная интенсивность i-го узла для q-го продукта ($a_{i,q}>0$ - пункт производства, $a_{i,q}<0$ - пункт потребления, $a_{i,q}=0$ - транзитный пункт); d_k - пропускная способность дуги $k=k(i,j)$; $d_{k,q}$ - пропускная способность перевозки продукта q вида по дуге $k=k(i,j)$; $\delta_{i,q}\ (\delta_{-i,q})$ - максимально возможное количество производства (потребления) продукта q вида в узле i.

Чтобы оперировать с данными одного типа, введем фиктивный узел 0 и сделаем замену переменных:

$$f_{m+i,q}=x_{-i,q},\ c_{m+i,q}=h_{-i,q},d_{m+i,q}=\delta_{-i,q}\ \text{ и }\ f_{m+2i,q}=x_{i,q},c_{m+2i,q}=h_{-i,q},$$

$d_{m+2i,q} = \delta_{-i,q}$,

где дуги $(i,0)$ имеют номера $m+i$, а дуги $(0,i)$ - номера $m+2i$, $i=\overline{1,n}$. Мы получили сеть $S=\{I, U_0\}$ с новым множеством дуг $U_0=U\cup\{(i,0),(0,i)\}$, в которое следует включать только те дуги, для которых $\min(d_k, \sum_{q=1}^{p} d_{k,q})>0$, и $m_0=|U_0|$. Для новой сети дополним списки начальных и конечных узлов O и T.

После преобразования сети и замены переменных, мы получим следующую математическую модель:

$$H(f)=\sum_{q=1}^{p}\sum_{k=1}^{m_0} c_{k,q} f_{k,q} \to \min \tag{4}$$

$$\sum_{i\in O(k)} f_{k,q} - \sum_{i\in T(k)} f_{k,q} = a_{i,q}, i=\overline{1,n}, q=\overline{1,p} \tag{5}$$

$$\sum_{q=1}^{p} f_{k,q} \le d_k,\ 0\le f_{k,q}\le d_{k,q}, k=\overline{1,m_0} \tag{6}$$

Частичную сеть $S_{on}=\{I,U_{on}\}$ назовем опорой сети $S=\{I,U\}$ для системы (5), если система:

$$\sum_{i=O(k)} f_{k,q} - \sum_{i=T(k)} f_{k,q} = 0,\ i=\overline{1,n},\ q=\overline{1,p} \tag{7}$$

имеет только тривиальное решение $f=\{f_{k,q}\equiv 0, k\in U_{on}, q=\overline{1,p}\}$, но для любой дуги $(i_0,j_0)\in U_H, U_H=U\setminus U_{on}$ частичная сеть $S_1=\{I,U_1\}, U_1=U_{on}\cup(i_0,j_0)$ допускает нетривиальный поток $f=\{f_{k,q}\ne 0, k=U_1, q=\overline{1,p}\}$.

Дуги $(i,j)\in U_{on}$ называются опорными, $(i,j)\in U_H$ - неопорными.

Теорема 1. Опорой сети $S=(I,U)$ для системы (5) является совокупность дуг $S_{on}=\bigcup_{q=1}^{p} D^q$, где D^q – множество дуг покрывающего дерева для q продукта.

3. ОЦЕНКИ ДУГ

При производстве-перевозке нескольких продуктов надо решать задачу не по отдельности продуктов, а в их совокупности. Это объясняется тем, что пропускная способность $d_{k,q}$ для различных продуктов по дуге разная и суммарный поток по дуге должен быть ограничен $\tilde{f}_k=\sum_{q=1}^{p} f_{k,q}\le d_k$.

Суть алгоритма состоит в следующем: следует найти такие Δf_k, что

$f^{/}_{k,q} = f_{k,q} + \Delta f_{k,q}$ и $H(f) > H(f + \Delta f)$. Если зафиксировать $f_{k.q}$ то получим:

$$\sum_{q=1}^{p}\sum_{k=1}^{m_0} c_{k,q}\Delta f_{k,q} \to \min \tag{8}$$

$$\sum_{i=O(k)} \Delta f_{k,q} - \sum_{i=T(k)} \Delta f_{k,q} = 0,\ i = \overline{1,n}, q = \overline{1,p} \tag{9}$$

$$-\tilde{f}_k \le \sum_{q=1}^{p} \Delta f_{k,q} \le d_k - \tilde{f}_k,\ -f_{k,q} \le \Delta f_{k,q} \le d_{k,q} - f_{k,q},\ k = \overline{1,m_0} \tag{10}$$

Эту задачу (8)-(10) можно решить прямым опорным алгоритмом (p однородных задач, учитывая ограничения на суммарный поток) [1]. Можно решать задачу (8)-(10) одновременно на всех p сетях, но система потенциалов усложняется за счет взаимосвязи потоков [2]. В предложенном подходе система потенциалов исключается из рассмотрения, поскольку получены аналитические выражения для оценок:

$$\Delta_{(\tau,\rho),q} = c_{(\tau,\rho),q} + \sum_{(i,j)\in U_D^q} c_{(i,j),q}\delta^{\tau\rho}_{(i,j),q},\ (\tau,\rho) \in U_H^q,\ q = \overline{1,p},$$

через элементы $\delta_{(\tau,\rho),q} = \left(\delta^{\tau\rho}_{(i,j),q}, (i,j) \in U^q\right), (\tau,\rho) \in U_H^q$ базиса пространства решений системы линейных уравнений (9) [3].

На новой итерации пересчитываются оценки только для дуг фундаментального разреза, порожденного опорной дугой, которая выводится из опоры. Остальные оценки не изменяются [4], [5].

ЛИТЕРАТУРА

1. Пилипчук Л. А. Алгоритмы решения неоднородной сетевой распределительной задачи // Весці АН Беларусі. 1986. №3.

2. Pilipchuk L. A. Network optimization problems // Applications of Mathematics in Engineering and Economics '27, eds. D. Ivanchev and M.D. Todorov – Heron Press, Sofia, 2002.

3. Pilipchuk L.A., Koliago Yu. L., Pesheva Yu. H. Algorithms for Solving Large Sparse Underdetermined Linear Systems in the Production-transport Problem with Additional Constraints // Application of Mathematics in Engineering and Economics. Proceedings of the 29 th International Summer School. Bulvest, Sofia, 2004.

4. Pilipchuk L.A., Pesheva Yu. H., Malakhovskaya Yu. V. Decomposition of Linear Systems in Network optimization Problems // Application of Mathematics in Engineering and Economics. Proceedings of the 29 th International Summer School. Bulvest, Sofia, 2004.

5. Pilipchuk L.A., Pesheva Yu. H., Laguto A. A. Linear-fractional Network Problem // Application of Mathematics in Engineering and Economics. Proceedings of the 29 th International Summer School. Bulvest, Sofia, 2004.