УДК 511.225

Н.Н. ЛЕОНОВ, Я.В. РАДЫНО

НЕАРХИМЕДОВ АНАЛИЗ В БЕЛАРУСИ

Николай Николаевич Леонов - кандидат физико-математических наук, ведущий научный сотрудник Института социологии НАН Беларуси. Автор около 50 научных работ по функциональному анализу и его приложениям, вычислительной математике, анализу данных, математической социологии.

Яков Валентинович Радыно - лауреат премии ЛКСМБ и Государственной премии Республики Беларусь, член-корреспондент НАН Беларуси, доктор физико-математических наук, профессор, заведующий кафедрой функционального анализа. Автор более 150 научных работ по функциональному анализу и его приложениям: теории операторов, дифференциально-операторным уравнениям, спектральной теории, теории обобщенных функций, неархимедову анализу, математической физике, в том числе 12 книг - монографий, учебников и учебных пособий.

A survey of investigations in non-Archimedean analysis in Belarus is presented.

Основным объектом, на котором строится анализ, является нормированное поле $\mathbb{K}$, под которым имеют в виду поле с заданной на нем нормой, обладающей свойствами: i) $|x| \geq 0$, ii) $|x| = 0 \Leftrightarrow x = 0$, iii) $|x \cdot y| = |x| \cdot |y|$, iv) $|x + y| \leq |x| + |y|$ для всех $x, y \in \mathbb{K}$. Если вместо неравенства треугольника iv) выполняется так называемое сильное неравенство треугольника iv') $|x + y| \leq \max\{|x| + |y|\}$, то нормированное поле называется неархимедовым. В противном случае - архимедовым.

Наибольший интерес для анализа представляют локально компактные, или локальные, поля, ибо на них имеется мера Хаара, а значит, и нетривиальный анализ Фурье.

Все нормированные локальные поля классифицируются с помощью теоремы Понтрягина - Ковальского следующим образом:

1) архимедовы поля - это $\mathbb{R}$ и $\mathbb{C}$ - поля действительных и комплексных чисел,

2) поле *p*-адических чисел $\mathbb{Q}_p$ - неархимедово поле нулевой характеристики,

3) поле $\mathbb{F}_p[[x]]$ рядов Лорана с коэффициентами из конечного поля $\mathbb{F}_p$ неархимедово поле характеристики *p*.

Остановимся подробнее на $\mathbb{Q}_p$. Если задано простое число *p,* то каждое рациональное $x \in \mathbb{Q}$ однозначно представляется в виде $x = p^{\gamma(x)} \dfrac{m}{n}$, где $n \in \mathbb{N}$,

$m, \gamma(x) \in \mathbb{Z},$ причем m и n не делятся на p. Полагая $|x|_p = p^{-\gamma(x)}$, получаем неархимедову норму на $\mathbb{Q}$. Пополнение $\mathbb{Q}$ по норме $|\cdot|_p$ называется полем p-адических чисел и обозначается $\mathbb{Q}_p$. Аналогично получаем поле действительных чисел $\mathbb{R}$ как пополнение $\mathbb{Q}$ по норме $|x|_\infty = \begin{cases} x, x \ge 0, \\ -x, x < 0, \end{cases}$ т. е. $|x|_\infty$ - это просто модуль x.. Для единообразия в дальнейшем будем писать $\mathbb{Q}_\infty$ вместо $\mathbb{R}$. Следует отметить, что на $\mathbb{Q}$ нормы $|\cdot|_p$ и $|\cdot|_s$ не эквивалентны, если $p \ne s$ (включая $p = \infty$). Удивительнее всего, что на $\mathbb{Q}$ нет других норм, кроме $|\cdot|_p$ и $|\cdot|_\infty$ (теорема Островского).

Таким образом, с математической точки зрения $\mathbb{Q}_\infty \equiv \mathbb{R}$ и $\mathbb{Q}_p$ равноправны и представляют собой некие математические фикции (идеализации). Отметим, что в повседневной жизни и в научных экспериментах ни $\mathbb{Q}_p$, ни $\mathbb{Q}_\infty$ не используются. На практике мы пользуемся только рациональными числами. И поэтому, если речь заходит о пространстве, то математической моделью его следует считать $\mathbb{Q}^3$ с соответствующей метрикой. В силу теоремы Островского математическими идеализациями будут $\mathbb{R}^3$ или $\mathbb{Q}_p^3$. Возникает вопрос: какую из них выбирать?

В евклидовой геометрии немаловажную роль играет аксиома Архимеда, которая утверждает, что для всякого $x \in \mathbb{Q}$ существует $n_x \in \mathbb{N}$ такое, что $|n_x| > |x|$ (т. е. множество $\mathbb{N}$ неограниченно), или для всякого $\varepsilon > 0$ существует $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ такое, что $\frac{1}{n_\varepsilon} < \varepsilon$. Другими словами, аксиома Архимеда означает, что **мы можем измерять сколь угодно малые расстояния.** Поскольку геометрическому понятию расстояния соответствует аналитическое понятие нормы на $\mathbb{Q}$, то неархимедовость означает, что $|n| \le |1|$ для всех $n \in \mathbb{N}$, или невозможность измерения расстояний, меньших некоторой величины! А это, как хорошо известно [1], эквивалентно сильному неравенству треугольника iv') для нормы. Вот почему такие нормирования называются неархимедовыми. В работе [1] отмечается:

«В квантовой теории с учетом гравитации имеется следующий результат. Если Δx - погрешность в измерении длины, то, оказывается, имеется неравенство:

$$\Delta x \ge l_{pl} = \sqrt{\frac{hG}{c^3}}, \tag{1}$$

где h - постоянная Планка, c - скорость света, G - гравитационная постоянная. Величина l_{pl} очень мала, порядка 10^{-33} см, она носит название планковской длины».

Таким образом, неравенство (1) показывает, что **невозможно измерение расстояний меньше планковских.** В связи со сказанным можно предположить, что квантово-математической моделью пространства является $\mathbb{Q}_p^3$! Другими словами, на больших расстояниях физическое пространство имеет архимедову структуру, а на малых - неархимедову.

Остается открытым вопрос: какое из $p = 2,$ 3, 5 ,7, 11, ... предпочтительнее, т. е. какими простыми p математически описывается (характеризуется) пространство микромира? Наиболее адекватным представляется следующий ответ: надо рассматривать все p сразу! Возникающий при этом объект был введен в математический обиход К. Шевалле в 1930-х гг. для формулировки локально-глобального принципа в алгебре, обобщающего принцип Минковского - Хассе, и назван аделем.

Напомним это понятие. Рассмотрим совокупность $\mathbb{A}$ всех последовательностей вида $a=(a_\infty,a_2,a_3,...,a_p,...)$, где a_∞ - вещественное число, a_p - p-адическое число, причем все a_p, начиная с некоторого p (своего для каждого a), являются целыми p-адическими числами. Множество А образует кольцо, если сложение и умножение определить покомпонентно. Это кольцо называется кольцом аделей, а аддитивная группа кольца - группой аделей и обозначается тоже $\mathbb{A}$. Мультипликативная подгруппа $\mathbb{A}^\times$ кольца А называется группой иделей. Таким образом,

$$\mathbb{A}^\times \subset \mathbb{A} \subset \mathbb{Q}_\infty \times \prod_p \mathbb{Q}_p.$$

На абелевых группах $\mathbb{A}^\times$ и $\mathbb{A}$ вводятся топологии (более сильные, чем тихоновская), превращающие их в коммутативные локально-компактные группы с мерами Хаара $\mu^\times$ и μ соответственно.

Поскольку, согласно принципу Воловича, «фундаментальные физические законы должны допускать формулировку, инвариантную относительно выбора числового поля» [1], не только математический, но и физический интерес представляет постановка задач, аналогичных рассмотренным, и других задач для произвольных нормированных локально-компактных полей и аделей над ними.

Подобно линейным нормированным пространствам над полями вещественных и комплексных чисел, можно изучать пространства над неархимедово нормированными полями. В этом случае, однако, естественно рассматривать неархимедово нормированные пространства, у которых норма удовлетворяет сильному неравенству треугольника $\|x+y\| \le \max\{\|x\|,\|y\|\}$. Заметим, что при этом условии нормирование поля с необходимостью неархимедово. В частности, неархимедово нормированным пространством над неархимедово нормированным полем $(\mathbb{K},|\cdot|)$ является пространство заданных на произвольном компактном топологическом пространстве $\mathbb{K}$-значных непрерывных функций с естественно определяемыми алгебраическими операциями и sup-нормой.

В нормированном поле $(\mathbb{K},|\cdot|)$ можно определить расстояние известным образом: $d(x,y)=|x-y|$. Если нормирование неархимедово, то это расстояние также удовлетворяет неравенству более сильному, чем неравенство треугольника: $d(x,y)\le \max\{d(x,z),d(z,y)\}$, $\forall x,y,z\in\mathbb{K}$, и которое тоже называется сильным неравенством треугольника, или ультраметрическим неравенством. Этим же свойством обладает и расстояние в неархимедово нормированном пространстве, порождаемое нормой. Важно, однако, что существуют содержательные примеры метрических пространств, расстояние в которых не порождено нормой и удовлетворяет ультраметрическому неравенству. Такие пространства называются неархимедовыми метрическими, или ультраметрическими пространствами. Исторически первым пространством такого рода было, по-видимому, пространство Бэра, образуемое множеством последовательностей со значениями в произвольном множестве, где расстояние между двумя различными последовательностями $x=(x_0, x_1, ...)$ и $y=(y_0, y_1, ...)$ определяется как значение фиксированной убывающей функции от наименьшего i, при котором $x_i \ne y_i$. Строго говоря, ультраметрические пространства без алгебраической структуры относятся к топологии, а не к анализу. Практика же показывает, что эта область разрабатывается в основном теми же специалистами, что и неархимедов анализ в узком смысле, чем и объясняется освещение ее в настоящей статье.

Такова вкратце логическая структура неархимедова анализа. Что же касается его истории, то ее началом следует, по-видимому, считать открытие p-адических чисел К. Гензелем в начале XX в., сделанное под влиянием потребностей теории чисел, которая долгое время оставалась основной областью применений таких неархимедовых структур, как нормированное поле p-адических чисел $\mathbb{Q}_p$, нормированное кольцо целых p-адических чисел $\mathbb{Z}_p$, множества p-адических векторов и функций с теми или иными алгебраическими структурами, обобщения p-адических чисел, где вместо простого числа p выступает простой идеал дедекиндова поля. Примерно также давно известно и упомянутое ультраметрическое пространство Бэра, которое использовалось в основном в топологии.

В последние десятилетия положение существенно меняется. Во-первых, стал развиваться p-адический анализ, подобно тому, как это было с вещественным и комплексным анализом. Возникли и расширяются его приложения - сначала в физике, а затем и в других областях. Теория ультраметрических пространств также находит все более широкое применение - опять же в физике, биологии, экономике, психологии, теории принятия решений, а также в теории приближений (нейронные сети, вейвлеты), в математической статистике и анализе данных, программировании.

Развитие неархимедова анализа в Беларуси происходило по общему сценарию. Вначале p-адический анализ был применен для задач теории чисел; пионером здесь был выдающийся белорусский математик, основатель отечественной школы теории чисел академик В.Г. Спринджук. Его ученики и сотрудники продолжили использование методов неархимедова анализа в теории чисел. В 1981-1982 гг. на кафедре функционального анализа БГУ В.Г. Спринджуком был организован семинар по неархимедову анализу, что способствовало распространению идей этой области математики среди специалистов не только по теории чисел, но и из других областей математики, в первую очередь - функционального анализа. Это вызвало развитие ряда направлений математического анализа на неархимедовых структурах, а затем и его приложений. Далее обзор работ по неархимедову анализу приводится в той же последовательности: теория чисел, а затем математический и функциональный анализ; попутно указываются приложения полученных результатов. Поскольку данная статья содержит обзор результатов белорусских авторов, мы сочли возможным не приводить точные ссылки на зарубежные источники, что вызвало бы чрезмерное увеличение объема статьи; соответствующие библиографические указания содержатся в цитированных работах.

1. Использование p-адического анализа в области теории чисел

Во многих разделах теории чисел делимость некоторой совокупности целых чисел на заданную степень простого числа не менее важна, чем величины рассматриваемых чисел. Остановимся на некоторых наиболее значительных результатах по теории чисел, полученных в Беларуси.

Пусть $w \in \mathbb{Q}_p$ и

$$P(w) = a_n w^n + \ldots + a_1 w + a_0,$$
$$a_j \in Z, 0 \le j \le n, H = H(P) = \max_{1 \le j \le n} |a_j|.$$

Оказывается, за счет выбора коэффициентов a_j для любого простого числа p можно доказать, что запись $P(w)$ начинается с $b_l p^l$, где $0 \le b_l \le p-1$, а величина p_l имеет порядок $H^{n+1}(P)$. А именно с помощью принципа ящиков Дирихле при любом $Q > 1$ можно выбрать такие $\left|a_j\right| \le Q$, $1 \le j \le n$, что

$$\left|P(w)\right|_p < pQ^{-n-1},$$

откуда нетрудно получить разрешимость неравенства

$$\left|P(w)\right|_p < pH^{-n-1}$$

для любого $w \in Q_p$ и бесконечного числа многочленов $P(w)$.

В.Г. Спринджук [2] перенес свой метод, с помощью которого решил знаменитую проблему Малера, на p-адический случай. Он доказал, что при любом $\varepsilon > 0$ множество тех $w \in \mathbb{Q}_p$, для которых неравенство

$$\left|P(w)\right|_p < H^{-n-1-\varepsilon} \tag{2}$$

разрешимо для бесконечного числа $P(w)$, имеет нулевую меру Хаара.

Пусть далее $\Psi(x)$ - монотонно убывающая функция, определенная на $\mathbb{R}_+$, K - некоторый цилиндр в $\mathbb{Q}_p$ с мерой Хаара μK и $L_n(\Psi)$ - множество $w \in K$, для которых неравенство (2) с правой частью $H^{-n}\Psi(H)$ разрешимо для бесконечного числа $P(w)$. Если $\Psi(H) = H^{-w}$, то обозначим это множество как $L_n(w)$. В цикле работ (укажем только некоторые из них - [3, 4]) В.И. Берником, В.В. Бересневичем и Э.И. Ковалевской был получен полный аналог классической теоремы Хинчина для множества $L_n(\Psi)$. В частности, было доказано, что

$$\mu L_n(\Psi) = \begin{cases} 0, \text{ если } \sum\limits_{H=1}^{\infty} \Psi(H) < \infty, \\ \mu K, \text{ если } \sum\limits_{H=1}^{\infty} \Psi(H) = \infty. \end{cases} \tag{3}$$

При $w > n + 1$, как это следует из (3), множество $L_n(w)$ имеет нулевую меру, поэтому множества $L_n(w_1)$ и $L_n(w_2)$, $n + 1 < w_1 < w_2$, можно различать только с помощью размерности Хаусдорфа. В.И. Берником и И.Л. Мороцкой [5] было доказано, что

$$\dim L_n(w) = \frac{n+1}{w}.$$

Изучались более общие, чем (2), неравенства, когда в левой части стоит не многочлен, а функция более общего вида. В этом направлении ведутся интенсивные исследования Д. Клейнбоком, Г. Маргулисом и их учениками. В.В. Бересневичем и Э.И. Ковалевской [6] полностью исследован случай $n = 2$.

В работах В.Г. Спринджука и его учеников С.В. Котова и Л.А. Трелиной (см. [7]) многие результаты в диофантовых уравнениях получены за счет применений p-адического анализа. Это позволило вскрыть качественно новые факты, например, оценить снизу скорость возрастания наибольшего простого делителя бинарной формы, углубить оценку рациональных приближений к алгебраическим числам. Изучены решения уравнения Туэ в рациональных числах, знаменатели которых составлены из фиксированного набора простых чисел с неизвестными показателями. Рассмотрены уравнения вида

$$f(x, y) = Ap_1^{z_1} \cdot \ldots p_s^{z_s}, (x, y) = 1, \tag{4}$$

объединяющие в себе уравнение Туэ и уравнение Малера. С привлечением оценки в p-адических метриках получены эффективные границы для решения уравнений (4).

2. Анализ на неархимедовых структурах

2.1. Замена переменных в интегралах комплекснозначных функций *p*-адических и адельных аргументов. В последнее десятилетие *p*-адический анализ, и особенно интегрирование комплекснозначных функций по *p*-адическим областям, стал важной частью аппарата *p*-адической математической физики [1]. Задача вычисления различных адельных интегралов стала актуальной после опубликования работ Б. Драговича по адельной квантовой механике. Основным инструментом при вычислении интегралов являются аналоги классической формулы замены переменной для областей $\Omega \subset \mathbb{R}$:

$$\int_{\varphi(\Omega)} f(y)dy = \int_{\Omega} f(\varphi(x)) \,|\, \varphi'(x) \,|\, dx.$$

В работах Р.С. Владимирова использовалась формула замены для *p*-адических областей в случае аналитического отображения j в многомерных областях. Подход, основанный на понятии непрерывной дифференцируемости *p-ада*-ческих отображений, был описан В. Шиховым в одномерном случае. Я.В. Радыно и Е.М. Радыно данный подход был развит для специально определяемых непрерывно дифференцируемых отображений многомерных областей $\Omega \subset \mathbb{Q}_p^n$, Ими также был рассмотрен общий случай абсолютно непрерывного отображения. Использование производной Радона - Никодима позволяет делать замену переменной, когда само отображение нигде не имеет производной в обычном смысле. Для адельных интегралов была доказана формула замены переменной в случае непрерывно дифференцируемых отображений и рассмотрена возможность применения для замены переменных адельных аналитических отображений [8, 9].

2.2. Распределения на группе аделей **и их преобразования Фурье.** Концептуальное значение в современной математике имеет понятие распределения Шварца. Распределение понимается как непрерывный функционал на пространстве основных функций. Подобным образом строятся распределения Брюа - Шварца на группах *p*-адических чисел и аделях (Ф. Брюа, А. Вейль, В.С. Владимиров). Распределения в *p*-адической и адельной математической физике заняли такое же важное место, как и в обычной. Особенно интересными оказались так называемые однородные распределения, обобщающие распределения вида $|x|^s$ на действительной оси, подробно изученные И.М. Гельфандом.

Распределения Брюа - Шварца стали очень важны в теории ζ-функций после работ Дж. Тэйта, К. Ивасавы, А. Вейля. Функциональное уравнение для ζ-функции Римана в них сводится к вычислению преобразования Фурье адельного однородного распределения (распределения Тэйта): $F\Delta_{s,\theta} = \Delta_{1-s,\bar{\theta}}$, где распределение $\Delta_{s,\theta}$ задается интегралом по иделям, а θ - мультипликативный характер:

$$\Delta_{s,\theta}(\varphi) = \int_{\mathbb{A}^\times} \varphi(x)\theta(x)\,|\,x\,|^s\, d^\times x, \quad \varphi \in S(\mathbb{A}).$$

В работах [10, 11] было рассмотрено мультииндексное обобщение функции $|\,x\,|^s = \prod_\nu |\,x_\nu\,|_\nu^s$ вида $|\,x\,|^\alpha = \prod_\nu |\,x_\nu\,|_\nu^{\alpha_\nu}$, где $\alpha = (\alpha_2, \alpha_3, ..., \alpha_p, ...)$, что дает обобщение распределения Тэйта на множестве дискретных аделей $\mathbb{A}_0$. Для данного распределения: были найдены условия регулярности, принадлежности пространству $L_p(\mathbb{A}_0)$, был вычислен спектр связанного с ним оператора Владимирова.

В [12] рассмотрено другое возможное обобщение распределения Тэйта, задаваемое формулой

$$\Delta_{g,\theta}(\varphi) = \int_{\mathbb{A}^\times} \varphi(\lambda)\theta(\lambda)g(|\,\lambda\,|)d^\times\lambda, \quad \varphi \in S(\mathbb{A}),$$

где $g \in L_1^{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}_+) \cap S'(\mathbb{R}_+)$. Для него строится регуляризация и доказывается функциональное уравнение

$$(F\Delta_{g,\theta})(\varphi) = \Delta_{g^\tau,\bar{\theta}}(\varphi) - \varepsilon_{\bar{\theta}}\varphi(0)\int_{(0,+\infty)} g(t)t^{-1}d^*t + \varepsilon_\theta (F\varphi)(0)\int_{(0,+\infty)} g^\tau(t)d^*t,$$

где $g^\tau(t)=t\cdot g(t^{-1})$, ε_θ равно 1, если $\theta \equiv 1$, и равно 0 в противном случае. Это уравнение дает также адельный аналог некоторых вычислений В.С. Владимирова в p-адическом случае.

2.3. Мнемофункций егоровского типа на множествах p-адических чисел и аделях. Локальные формулы следов. Несмотря на важность p-адических и адельных распределений Брюа - Шварца, их применение существенно ограничено тем, что они не образуют алгебры, поскольку не всегда определено произведение. К примеру, о решениях в классе распределений можно говорить только для линейных псевдодифференциальных уравнений (В.С. Владимиров, А.Н. Кочубей, Ш. Харан). В действительном случае проблема умножения была отмечена самим создателем теории распределений Л. Шварцем и наиболее успешно решалась в рамках подхода, который условно можно назвать аппроксимационным (Я. Микусинский, Я. Хирата, Х.Х. Христов и В.П. Дамянов). Его идея состоит в том, чтобы заменить распределение сходящейся к нему направленностью «гладких» функций. Этот подход получил развитие после выхода работ Ж. Коломбо, М. Обергуггенбергера, Х.А. Биагиони, где были построены алгебры «новых обобщенных функций». Общая концепция построения подобных алгебр, названных алгебрами мнемофункций, была дана А.Б. Антоневичем и Я.В. Радыно.

В работах [13-15] были построены алгебры мнемофункций егоровского типа на множествах p-адических чисел $\mathbb{Q}_p$, дискретных аделей $\mathbb{A}_0$ и множестве аделей $\mathbb{A}$. Доказаны теоремы о вложениях распределений и функций в алгебры мнемофункций, вычислен в явном виде ряд образов при вложении и их произведений, введено преобразование Фурье мнемофункций и установлены его свойства. В случае $\mathbb{Q}_p$ и $\mathbb{A}_0$ конструкция мнемофункций использует открыто-компактные подгруппы. Это позволяет доказать некоторые точные равенства при вложении τ, а именно $\tau(a \cdot u) = \tau(a) \cdot \tau(u)$, $\tau(Fu) = F(\tau(u))$, где $a \in S$ - функция Брюа - Шварца, $u \in S'$ - распределение. В случае $\mathbb{R}$ и $\mathbb{A}$ здесь имеет место лишь свойство ассоциированности.

Заманчивой областью приложения мнемофункций являются теоретико-числовые формулы следа, подобные рассмотренным А. Коном, которые связывают известное в теории чисел распределение Вейля со следом оператора взвешенного растяжения. В p-адическом случае используемая в формуле следа регуляризация полностью совпадает с мнемофункциональной. В действительном случае мнемофункциональная регуляризация имеет несколько более общий вид с дополнительной константой [16].

В работе [17] приведены многочисленные примеры p-адических мнемофункций и их произведений. Другими словами, составлена таблица произведений известных p-адических распределений в терминах мнемофункций.

2.4. Оператор Владимирова. В работах [10, 11] излагается адельный аналог лапласиана - так называемый оператор Владимирова.

Пусть $\mathbb{A}$ - адель. Тогда $\mathbb{A} = \mathbb{Q}_\infty \times \mathbb{A}_0$. Сомножитель $\mathbb{A}_0$ с топологией из $\mathbb{A}$ образует локально-компактную группу, называемую группой конечных аделей. Пусть $\xi = (\xi_2, \xi_3, \ldots, \xi_p, \ldots) \in \mathbb{A}_0$ и $\alpha = (\alpha_2, \alpha_3, \ldots, \alpha_p, \ldots) \in \mathbb{R}^\infty$ - бесконечный мультииндекс. При условии $\lim\limits_{p\to\infty} \alpha_p \ln p = 0$ выражение $|\xi|^\alpha = \prod\limits_p |\xi_p|_p^{\alpha_p}$ задает на $\mathbb{A}_0$ почти везде конечную функцию, принадлежащую $L_q^{\mathrm{loc}}(\mathbb{A}_0)$ при всех $q \in [1,+\infty)$ таких, что $\alpha_p > -\frac{1}{q}$ для каждого *p*, но не принадлежащую $L_q(\mathbb{A}_0)$ ни для какого $q \in [1,+\infty)$

Далее определяется оператор

$$A_\alpha : L_2(\mathbb{A}_0) \ni \psi(\xi) \to |\xi|^\alpha \psi(\xi) \in L_2(\mathbb{A}_0),$$

область определения которого есть $D(A_\alpha) = S(\mathbb{A}_0)$ - пространство основных функций Брюа - Шварца на группе конечных аделей.

Установлено, что оператор A_α (при $\alpha > -\frac{1}{2}$) самосопряжен в существенном и его замыкание совпадает с оператором

$$M_\alpha : L_2(\mathbb{A}_0) \ni \psi(\xi) \to |\xi|^\alpha \psi(\xi) \in L_2(\mathbb{A}_0)$$

с естественной областью определения

$$D(M_\alpha) = \left\{\psi \in L_2(\mathbb{A}_0 : |\xi|^\alpha \psi(\xi) \in L_2(\mathbb{A}_0)\right\}.$$

Оператором Владимирова называем псевдодифференциальный оператор вида

$$V_\alpha \psi(x) = \int_{\mathbb{A}_0} |\xi|^\alpha \psi(\xi) \chi_0(-\xi x) dx$$

с областью определения $S(\mathbb{A}_0)$.

Оператор V_α является самосопряженным оператором в $L_2(\mathbb{A}_0)$. Его замыкание $\overline{V_\alpha}$ с областью определения

$$D(\overline{V_\alpha}) = \left\{\psi \in L_\alpha(\mathbb{A}_0 : |\xi|^\alpha \psi(\xi) \in L_2(\mathbb{A}_0)\right\}$$

является самосопряженным оператором и его спектр $\sigma(V_\alpha)$ заполняет правую полуось $\mathbb{R}_+$.

2.5. Меры на неархимедовых пространствах. Построение мер на компактном ультраметрическом пространстве изучалось Н.Н. Леоновым [18, 19]. Были исследованы четыре конструкции мер. Первая из них - известная мера Хаусдорфа, которая строится в метрическом пространстве с помощью покрытия множеств шарами. Если потребовать, чтобы шары, образующие покрытие, имели одинаковый радиус, получается мера, называемая энтропийной. Далее, с использованием уточнения структуры шаров в компактном ультраметрическом пространстве [18, 20] была построена так называемая иерархическая мера, не имеющая аналога в произвольном компактном метрическом пространстве. Наконец, рассмотрена мера, получающаяся с помощью предложенного В.Л. Рвачевым и В.А. Рвачевым среднего значения непрерывной вещественной функции на рассматриваемом компакте. Это среднее определяется как предел средних значений функции по минимальным ε-сетям при стремлении ε к нулю (ε-сеть называется минимальной, если не существует ε-сети с меньшим числом элементов). Если таким образом определенное среднее представляет собой линейный непрерывный функционал на пространстве непрерывных функций, то по теореме Рисса оно определяет меру, которую можно назвать мерой Рвачевых. Н.Д. Авербух и Ю.И. Маковоз показали, однако, что в евклидовом пространстве эта конструкция порождает меру Лебега, а для такого естественного класса множеств, как абсолютно выпуклые компактные подмножества бесконечномерного банахова пространства, указанное среднее, вообще говоря, не существует. В [18, 19] доказано, что на компактном ультраметрическом пространстве хаусдорфова и иерархическая меры существуют всегда, но могут не совпадать. Что касается энтропийной меры и меры Рвачевых, то если одна из них существует, то существует и другая, и эти меры равны. Для так называемых однородных пространств, т. е. таких, в которых любые два замкнутых шара одинакового радиуса изометричны, все четыре меры совпадают. Однородными являются абсолютно выпуклые множества в неархимедово нормированных векторных пространствах. Заметим, что понятие абсолютной выпуклости в неархимедовом случае определяется специальным образом. На множестве $\mathbb{Z}_p$ все эти конструкции задают меру Хаара.

Эти результаты имеют ряд применений. Так, на вполне ограниченном метрическом пространстве можно задать такую ультраметрику, относительно которой оно также вполне ограничено, и топологии, порожденные обеими метриками, совпадают почти всюду относительно хаусдорфовой меры, порожденной этой ультраметрикой [21].

2.6. Теория приближений. А.Я. Радына исследовал приближения непрерывных функций функциями из конечномерного подпространства: он сконструировал такой объект, как *p*-адический линейный сплайн, названный по аналогии с вещественным случаем, и изучил вопросы равномерного приближения непрерывней функции такими сплайнами. Существенным моментом в разработанной им теории являются методы интерполяции.

Пусть непрерывная вещественная функция f задана на отрезке $[0,1]$ и $0 = x_1 < x_2 < \ldots < x_N = 1$ - узлы интерполяции. Тогда существует единственная непрерывная кусочно-линейная функция L_N, совпадающая с f в заданных узлах, причем когда максимум расстояний между соседними узлами интерполяции стремится к нулю, то L_N равномерно стремится к f. Эта кусочно-линейная функция называется линейным сплайном. Отметим, что ее можно записать в виде следующей линейной комбинации: $L_N(x) = \sum_{i=1}^{N} \lambda_i |x - x_i|$, где $\lambda_i;\ i = 1, \ldots, N,$ - коэффициенты, определяемые из интерполяционных равенств. Тогда *p*-адическим линейным сплайном назовем функцию вида $L_n(x) = \sum_{i=0}^{p^n-1} \lambda_i |x - i|_p$, где вместо обыкновенного модуля стоит *p*-адический модуль, а узлами интерполяции являются натуральные числа от 0 до $p_n - 1$, p - некоторое простое число, n - натуральное, коэффициенты $\lambda_i, i = 0, \ldots, p^n - 1$, определяются из интерполяционных соотношений: $L_n(x) = f(i)$, $i = 0, \ldots, p_n - 1$. В работе [22] было доказано существование и единственность такого сплайна, равномерное стремление L_n к f при $n \to \infty$ для вещественных функций и отсутствие такого приближения для *p*-адической функции. В последнем случае предлагалось рассмотреть модифицированный сплайн вида $\sum_{i=0}^{p^n-1} \lambda_i \cdot \frac{|x - i|_{tr}}{|x - i|_p}$, где $|\cdot|_{tr}$ - тривиальное нормирование.

Вопросам приближения вещественной функции *p*-адического аргумента *p*-адическими линейными сплайнами посвящена статья [23]. В ней более кратко и ясно описаны все понятия и теоремы. Ключевым моментом нахождения сплайна методом интерполяции является обращение матрицы расстояний между узлами интерполяции $\left(\left|x_i - x_j\right|_p\right)_{i,j=1}^{p^n}$. Оказалось, что такая матрица есть частный случай матрицы Паризи [24]; в названных статьях предложен новый способ ее обращения, который годится и для матриц Паризи наиболее общего вида. Работа [25] посвящена доказательству критерия обратимости матрицы Паризи, нахождению обратной к ней матрицы, собственных чисел, двух асимптотик собственных значений потока матриц Паризи и выражению их через интеграл по мере Хаара от некоторой локально-постоянной функции, определенной на единичном шаре кольца a-адических чисел (подробнее про a-адические числа см. [26]) либо на всем кольце a-адических чисел. Более того, получено представление матрицы Паризи через интегральный оператор типа свертки по кольцу a-адических чисел.

В статье [27] рассматривается r-мерное обобщение m-адического линейного сплайна (тут m не обязательно простое) и его аппроксимативные свойства. А именно изучается сплайн вида $L_n(\mathbf{x}) = \sum_{\bar{i} \in S_n} \lambda(\mathbf{i}) \cdot \|\mathbf{x} - \mathbf{i}\|$, где сумма берется по множеству r-мерных векторов, компоненты которых принимают значения $\{0, 1, 2, \ldots, m^n - 1\}$, а $\|\mathbf{x}\| = \max\{|x_1|_m, |x_2|_m, \ldots, |x_r|_m\}$, $\mathbf{x} \in \mathbb{Z}_m^r$. В работе доказано, что равномерная норма разности между таким сплайном, построенным по характеристической функции шара радиуса m_{-u}, и самой этой функцией имеет асимптотику $O(m^{-2rn+(1-r)u-1})$, $n \to \infty$.

Перечисленные результаты применимы к теории спиновых стекол.

Некоторыми вопросами теории приближений занимался Н.Н. Леонов. Он исследовал [28, 29] поперечники по Колмогорову и ε-энтропию в компактных неархимедово нормированных пространствах. В частности, оказалось, что для множества непрерывных функций, заданных на $\mathbb{Z}_p$, принимающих значения в $\mathbb{Q}_p$, равномерно ограниченных и удовлетворяющих условию Липшица, эти величины имеют тот же порядок изменения, что и для аналогичных классов вещественных функций.

Авторы выражают признательность В.И. Бернику, А.Я. Радына и Е.М. Радыно за помощь в работе над статьей.

1. Владимиров В.С., Волович И. В., Зеленое Е. И. p-Адический анализ и математическая физика. М., 1993.

2. Спринджук В. Г. Проблема Малера в метрической теории чисел. Мн., 1967.

3. Бересневич В.В., Берник В.И., Ковалевская Э. И. // Докл. НАН Беларуси. 2002. Т. 46. № 4. С. 13.

4. Beresnevich V.V., Bernik V.I., Kovalevskaya E.I. // J. of Number Theory. 2005. 111. P. 33.

5. Берник В.И., Мороцкая И.Л. // Весці АН БССР. Сер. фіз.-мат. навук. 1986. № 3. С. 3.

6. Береснезич В.В., Ковалевская Э. И. // Мат. заметки. 2003. Т. 73. Вып. 1. С. 22.

7. Спринджук В.Г. Классические диофантовы уравнения от двух неизвестных. М., 1982.

8. Радыно Е.М., Радыно Я. В. // Докл. НАН Беларуси. 2002. № 3. С. 8.

9. Radyna Yauhen // North-Holland Mathematics Studies series. Vol. 197. Proceedings of the International Stefan Banach conference on Functional Analysis and its applications, May 28-31 2002, Lviv, Ukraine. Lvi v, 2004. P. 267.

10. Волович И.В., Радыно Я.В., Хренников А.Ю. // Выбраныя навук. працы Бел. дзярж. ун-та. У 7 т. Т. 6. Матэматыка. Мн., 2001. С. 11.

11. Khrennikov A. Yu., Radyno Ya. V. // Advanced Studies in Contemporary Mathematics (Kyungshang). Memoirs of the Jangjeon Mathematical Society. 2003. Vol. 7. №. 2. P. 1.

12. Радыно Е.М. // Докл. НАН Беларуси. 2004. № 3. С. 14.

13. Радыно Е.М. // Там же. 2003. №4. С. 10.

14. Радыно Е.М. // Там же. 2004. № 4. С. 10.

15. Radyna Yauhen // International conference «Analysis and Related Topics», November 17-20, 2005, Lviv, Ukraine. Lviv, 2005. P. 90.

16. Радыно Е.М., Радыно Я. В. // Труды Мат. ин-та им. В.А. Стеклова. Избранные вопросы p-адической физики и анализа: Сб. ст. 2004. Т. 245. С. 228.

17. Горяйнова И.А., Радыно Я. В. // Докл. НАН Беларуси. 2005. Т. 49. № 5. С. 36.

18. Леонов Н.Н. // Докл. НАН Беларуси. 1996. Т. 40. № 5. С. 36.

19. Леонов Н.Н. Математическая социология: структурно-аппроксимационный подход. Мн., 2002.

20. Леонов Н.Н. // Весцi НАН Беларусi. Сер. фiз.-мат. навук. 1997. № 4. С. 42.

21. Leonov N.N. // International Conference on Functional Analysis and its Applications. Lviv, 2002. P. 121.

22. Radyna A., Khrennikov A. // J. of Approximation Theory. 2003. Vol. 120. Iss. 1. P. 124.

23. Радына А.Я. //Весцi НАН Беларусi. Сер. фiз.-мат. навук. 2004. № 2. С. 21.

24. Mezard M., Parisi G., Virasoro M.A. Spin Glass Theory and Beyond. Singapore, 1987.

25. Khrennikov A., Radyna A. // Advanced Studies in Contemporary Mathematics. 2004. Vol. 8. № 2. P. 95.

26. Хьюитт Э., Росс К. Абстрактный гармонический анализ: в 2 т. М., 1975. Т. 2.

27. Radyna A. // North-Holland Mathematics Studies. Vol. 197. Proceedings of the International Conference on Functional Analysis and its Applications Dedicated to the 110-th Anniversary of Stefan Banach, May 23-31 2002, Lviv, Ukraine. Lviv, 2004. P. 257.

28. Леонов Н.Н. // Докл. Академии наук Беларуси. 1997. Т. 41. № 1. С. 22.

29. Леонов Н.Н. // Там же. № 4. С. 30.

Поступила в редакцию 28.07.06.

$x_t \in A$ $t \in \mathrm{N}$

$2 \le N < \infty$

$\in$