ISSN 0002—3574

ВЕСЦІ АКАДЭМІІ НАВУК БССР

СЕРЫЯ ФІЗІКА-МАТЭМАТЫЧНЫХ НАВУК

3

МІНСК НАВУКА І ТЭХНІКА

1986

УДК 330.115:62-50

Л. А. ПИЛИПЧУК

АЛГОРИТМЫ РЕШЕНИЯ НЕОДНОРОДНОЙ СЕТЕВОЙ РАСПРЕДЕЛИТЕЛЬНОЙ ЗАДАЧИ

В работе рассматривается неоднородная (двухпродуктовая) сетевая распределительная задача с дополнительными ограничениями и ограниченными пропускными способностями дуг, представляющая собой обобщение задач, рассмотренных в работах [1—3].

1. Двойственный метод. На обобщенной ориентированной конечной сети $S = \{I, U\}$, $|I| < \infty$, рассмотрим неоднородную (двухпродуктовую) транспортную задачу с дополнительными ограничениями

$$\sum_{k=1}^{2} \sum_{(i,j)\in U} c_{ij}^k x_{ij}^k \to \min;$$

$$\sum_{j\in I_i^+(U)} x_{ij}^k - \sum_{j\in I_i^-(U)} \mu_{ji}^k x_{ji}^k = a_i^k, \ i\in I, \ k = 1, 2;$$

$$\sum_{k=1}^{2} \sum_{(i,j)\in U} \lambda_{ij}^{kp} x_{ij}^k = \alpha_p, \ p = \overline{1, l}; \tag{1}$$

$$x_{ij}^1 + x_{ij}^2 \leqslant d_{ij}, \ (i, j)\in U, \ x_{ij}^k \geqslant 0, \ (i, j)\in U, \ k = 1, 2,$$

где вектор $x_{ij} = (x_{ij}^1, x_{ij}^2)$ определяет величину неоднородного потока по дуге (i, j); $a_i = (a_i^1, a_i^2)$ — вектор интенсивности узла $i\in I$; d_{ij} — значение пропускной способности дуги $(i, j)\in U$; $c_{ij} = (c_{ij}^1, c_{ij}^2)$ — стоимость перемещения единичного неоднородного потока по дуге (i, j); $\mu_{ij} = (\mu_{ij}^1, \mu_{ij}^2)$ — вектор, содержащий дуговые множители, отражающий явление преобразования дугового потока; $I_i^+(U) = \{j : (i, j)\in U\}$, $I_i^-(U) = \{j : (j, i)\in U\}$.

Двойственная задача для задачи (1) имеет вид

$$\sum_{k=1}^{2} \sum_{i\in I} a_i^k u_i^k + \sum_{p=1}^{l} \alpha_p r_p - \sum_{(i,j)\in U} d_{ij} w_{ij} \to \max,$$

$$u_i^k - \mu_{ij}^k u_j^k + \sum_{p=1}^{l} \lambda_{ij}^{kp} r_p - w_{ij} \leqslant c_{ij}^k, \ w_{ij} \geqslant 0, \ (i, j)\in U, \ k = 1, 2. \tag{2}$$

Двойственный план—совокупность $\eta = (u^k, \ k = 1, 2; \ r, \ w)$, на которой выполняются ограничения задачи (2). Двойственный план η согласован с копотоком $\delta = (\delta_{ij}^1, \delta_{ij}^2)$, $\delta_{ij}^k = u_i^k - \mu_{ij}^k u_j^k + \sum_{p=1}^{l} \lambda_{ij}^{kp} r_p$, если выполняется соотношение $w_{ij} = \max\{0, \ \delta_{ij}^1, \ \delta_{ij}^2\}$.

Опорой обобщенной сети S назовем совокупность дуг $U_{оп} = \{U_{оп}^1, U_{оп}^2, U^*\}$, $U_{оп}^k \subset U^k$, $k = 1, 2$; $U^* \subset U_{оп}^1 \cap U_{оп}^2$, для которой система

$$\sum_{j\in I_i^+(U_{оп}^k)} x_{ij}^k - \sum_{j\in I_i^-(U_{оп}^k)} \mu_{ji}^k x_{ji}^k = 0, \ i\in I(U_{оп}^k), \ k = 1, 2;$$

$$\sum_{k=1}^{2} \sum_{(i,j)\in U_{оп}^k} \lambda_{ij}^{kp} x_{ij}^k = 0, \ p = \overline{1, l}; \tag{3}$$

$$x_{ij}^1 + x_{ij}^2 = 0, \ (i, j)\in U^*,$$

имеет только тривиальное решение $x_{ij} = 0$, $(i, j)\in U$, $x_{ij} = (x_{ij}^1, x_{ij}^2)$, но допускает нетривиальное решение для каждой из следующих совокупностей дуг:

1) $\{U_{оп}^1, U_{оп}^2, U^* \setminus (i_0, j_0)\}$, где (i_0, j_0) — любая дуга из U^*;

2) $\{U_{оп}^k \cup (i_0, j_0)^k, U_{оп}^{2/k}, U^*\}$, где $(i_0, j_0)^k \in U^k \setminus U_{оп}^k$, $k = 1, 2$. Пара $\{\delta, U_{оп}\}$ из копотока и опоры—опорный копоток. Условия невырожденности опорного копотока $\{\delta, U_{оп}\}$ на обобщенной сети совпадают с анало-

гичными соотношениями невырожденности копотока для общей сети и приведены в [2].

По $\{\delta, U_{\text{оп}}\}$ построим псевдопоток $\varkappa = (\varkappa_{ij}, (i, j) \in U)$, $\varkappa_{ij} = (\varkappa_{ij}^k, k = 1, 2)$: $\varkappa_{ij}^k = 0$, если $\delta_{ij}^k \leqslant 0$ или $\delta_{ij}^k \leqslant w_{ij}$, $w_{ij} = \delta_{ij}^{k_0}$, $k \neq k_0$, $(i, j)^k \in U_{\text{н}}^k$, $U_{\text{н}}^k = U^k \setminus U_{\text{оп}}^k$; $\varkappa_{ij}^{k_0} = d_{ij}$, если $w_{ij} = \delta_{ij}^{k_0} > 0$, $(i, j)^{k_0} \in U_{\text{н}}^{k_0}$, $k = 1, 2$. (4)

Псевдопотоки $\varkappa_{ij}^k$, $(i, j)^k \in U_{\text{оп}}^k$, $k = 1, 2$, однозначно найдутся из системы

$$\sum_{j \in I_i^+(U_{\text{оп}}^k)} \varkappa_{ij}^k - \sum_{j \in I_i^-(U_{\text{оп}}^k)} \mu_{ji}^k \varkappa_{ji}^k = a_i^k - \sum_{j \in I_i^+(U_{\text{н}}^k)} \varkappa_{ij}^k + \sum_{j \in I_i^-(U_{\text{н}}^k)} \mu_{ji}^k \varkappa_{ji}^k, \quad i \in I, \ k = 1, 2;$$

$$\sum_{k=1}^{2} \sum_{(i,j)^k \in U_{\text{оп}}^k} \lambda_{ij}^{kp} \varkappa_{ij}^k = \alpha_p - \sum_{k=1}^{2} \sum_{(i,j)^k \in U_{\text{н}}^k} \lambda_{ij}^{kp} \varkappa_{ij}^k; \tag{5}$$

$$\varkappa_{ij}^1 + \varkappa_{ij}^2 = d_{ij}, \ (i, j) \in U^*.$$

Теорема 1 (критерий оптимальности). *Соотношения* $\varkappa_{ij}^k = 0$ *при*

$$\delta_{ij}^k < w_{ij}; \quad \sum_{k \in K_{\text{оп0}}(i,j)} \varkappa_{ij}^k = d_{ij}, \ \varkappa_{ij}^k \geqslant 0, \ \textit{при} \ k \in K_{\text{оп0}}(i, j) =$$

$$= \{k \in K_{\text{оп}}(i, j) : w_{ij} = \delta_{ij}^k, \ w_{ij} > 0\}, \ \textit{если} \ K_{\text{оп0}}(i, j) \neq \varnothing; \tag{6}$$

$$\sum_{k \in K_{\text{оп1}}(i,j)} \varkappa_{ij}^k \leqslant d_{ij}, \ \varkappa_{ij}^k \geqslant 0, \ \textit{при} \ k \in K_{\text{оп1}}(i, j) =$$

$$= \{k \in K_{\text{оп}}(i, j) : w_{ij} = \delta_{ij}^k, \ w_{ij} = 0\}, \ \text{если} \ K_{\text{оп1}}(i, j) \neq \varnothing,$$

достаточны, а в случае невырожденности и необходимы для оптимальности опорного копотока $\{\delta, U_{\text{оп}}\}$. *Псевдопоток* $\varkappa$, *соответствующий оптимальному опорному копотоку* $\{\delta, U_{\text{оп}}\}$, *в этом случае является оптимальным потоком задачи (1).*

Доказательство. *Достаточность.* Пусть выполнены соотношения (6). Из (6) с учетом (4), (5) следует, что псевдопоток $\varkappa$ является потоком задачи (1). Оптимальность копотока δ в задаче (2) и потока $\varkappa$ в задаче (1) следует из равенства значений целевых функций прямой (1) и двойственной (2) задач на $\varkappa$ и δ:

$$\sum_{k=1}^{2} \sum_{(i,j) \in U} c_{ij}^k \varkappa_{ij}^k = \sum_{k=1}^{2} \sum_{(i,j) \in U} \Big(u_i^k - \mu_{ij}^k u_j^k + \sum_{p=1}^{l} \lambda_{ij}^{kp} r_p \Big) \varkappa_{ij}^k =$$

$$= \sum_{k=1}^{2} \sum_{i \in I} u_i^k \Big(\sum_{j \in I_i^+(U)} \varkappa_{ij}^k - \sum_{j \in I_i^-(U)} \mu_{ji}^k \varkappa_{ji}^k \Big) + \sum_{p=1}^{l} r_p \sum_{k=1}^{2} \sum_{(i,j) \in U} \lambda_{ij}^{kp} \varkappa_{ij}^k -$$

$$- \sum_{(i,j) \in U} d_{ij} w_{ij} = \sum_{k=1}^{2} \sum_{i \in I} a_i^k u_i^k + \sum_{p=1}^{l} \alpha_p r_p - \sum_{(i,j) \in U} d_{ij} w_{ij}.$$

Необходимость. Пусть δ^0 — невырожденный оптимальный копоток, построенный по оптимальному двойственному плану (u^0, r^0, w^0). Из теории двойственности следует, что существует оптимальный поток x^0 задачи (1) и пара x^0, (u^0, r^0, w^0) удовлетворяет условиям дополняющей нежесткости

$$x_{ij}^{0k}\left(u_i^{0k} - \mu_{ij}^k u_j^{0k} + \sum_{p=1}^{l} \lambda_{ij}^{kp} r_p^0 - w_{ij}^0 - c_{ij}^k\right) = 0, \quad (i,\ j)\in U,\ k = 1,\ 2;$$

$$w_{ij}^0 (x_{ij}^{01} + x_{ij}^{02} - d_{ij}) = 0, \quad (i,\ j)\in U.$$

Значит, для неопорных дуг выполняются соотношения: $x_{ij}^{0k_0} = 0$, если $\delta_{ij}^{0k} \leqslant 0$ или $\delta_{ij}^{0k} \leqslant w_{ij}^0$, $w_{ij}^0 = \delta_{ij}^{0k_0} > 0$, $k \neq k_0$, $(i,\ j)^k \in U_{\text{н}}^k$; $x_{ij}^{0k_0} = d_{ij}$, если $w_{ij}^0 = \delta_{ij}^{0k_0} > 0$, $(i,\ j)^{k_0} \in U_{\text{н}}^{k_0}$, $k_0,\ k \in K = \{1,\ 2\}$. Поскольку x_{ij}^{0k}, $(i,\ j)^k \in U_{\text{оп}}^k$, $k = 1,\ 2$, однозначно вычисляются из (5) по заданным неопорным дуговым потокам, то заключаем, что $x^0 = \varkappa$. Справедливость соотношений (6) для $\varkappa = x^0$ следует из условий дополняющей нежесткости для $(i,\ j)^k \in U_{\text{оп}}^k$, $k = 1,\ 2$. Теорема доказана.

Пусть $\{\delta,\ U_{\text{оп}}\}$ не удовлетворяет критерию оптимальности (6). Вычислим оценку субоптимальности

$$\beta = \sum_{k=1}^{2} \sum_{(i,j)\in U,\ \delta_{ij}^k \leqslant 0} \delta_{ij}^k \varkappa_{ij}^k - \sum_{(i,j)\in U,\ w_{ij} = \delta_{ij}^{k_0} > 0} \left(\varkappa_{ij}^{2/k_0} \delta_{ij}^{2/k_0} + \delta_{ij}^{k_0} (\varkappa_{ij}^{k_0} - d_{ij})\right).$$

Пусть опорные компоненты вектора $\varkappa$ удовлетворяют прямым ограничениям задачи (1):

$$\varkappa_{ij}^k \geqslant 0,\ (i,\ j)^k \in U_{\text{оп}}^k,\ k = 1,\ 2; \quad \sum_{k\in K_{\text{оп}}(i,j)} \varkappa_{ij}^k \leqslant d_{ij} - \tag{7}$$

$$- \sum_{k\in K_{\text{н}}(i,j)} \varkappa_{ij}^k,\ (i,\ j)\in U \setminus U^*,\ K_{\text{оп}}(i,\ j) = \{k \in K : (i,\ j)^k \in U_{\text{оп}}^k\},$$

$$K_{\text{н}}(i,\ j) = K \setminus K_{\text{оп}}(i,\ j).$$

Теорема 2 (критерий субоптимальности). *Если при данном $\varepsilon \geqslant 0$ для псевдопотока $\varkappa$, построенного по опорному копотоку $\{\delta,\ U_{\text{оп}}\}$, выполняются условия (7) и неравенство $\beta \leqslant \varepsilon$,* то *$\varkappa$ — ε-оптимальный поток задачи (1). Обратно, если $\varkappa^\varepsilon$ — ε-оптимальный поток задачи (1), то существует такая опора $U_{\text{оп}}^\varepsilon$, что оценка субоптимальности опорного потока $\{\varkappa^\varepsilon,\ U_{\text{оп}}^\varepsilon\}$ удовлетворяет неравенству $\beta \leqslant \varepsilon$.*

Если условия критерия субоптимальности выполняются, то решение задачи (1) прекращаем на ε-оптимальном потоке $\varkappa^\varepsilon$. В противном случае строим новый копоток $\bar{\delta}$ в виде $\bar{\delta} = \delta + \Delta\delta = \delta + \sigma t$, где $t = (t_{ij},\ (i,\ j)\in U)$, $t_{ij} = (t_{ij}^1,\ t_{ij}^2)$ — подходящее направление изменения копотока δ, σ — шаг вдоль него. Построение t, σ и правила замены опоры проводятся по схеме, изложенной в [2].

2. Адаптивный метод. Пусть $\{x,\ U_{\text{оп}}\}$ — начальный опорный поток задачи (1). По опоре $U_{\text{оп}}$ и параметрам задачи построим потенциалы $u_i = (u_i^1,\ u_i^2)$, $i \in I$, узлов сети, потенциалы r_p, $p = \overline{1, l}$, дополнительных ограничений и потенциалы r_{p_1}, $p_1 = \overline{l+1,\ l+|U^*|}$, как решение системы

$$u_i^k - \mu_{ij}^k u_j^k + \sum_{p=1}^{l} \lambda_{ij}^{kp} r_p - c_{ij}^k = 0, \quad (i,\ j)^k \in U_{\text{оп}}^k \setminus U^*,\ k = 1,\ 2;$$

$$u_i^1 - \mu_{ij}^1 u_j^1 + \sum_{p=1}^{l} \lambda_{ij}^{1p} r_p - c_{ij}^1 = u_i^2 - \mu_{ij}^2 u_j^2 + \sum_{p=1}^{l} \lambda_{ij}^{2p} r_p - c_{ij}^2, \quad (i,\ j)\in U^*. \tag{8}$$

Укажем способ решения системы (8). Обозначим через $r = (r_p,\ p = \overline{1, l};\ r_{p_1},\ p_1 = \overline{l+1,\ l+|U^*|})$, через ρ — вектор $(\rho_{\tau(\xi,\eta)^k},\ (\xi,\ \eta)^k \in U_{\text{бнц}}^k,\ k = 1,\ 2)$, где $\rho_{\tau(\xi,\eta)^k} = \sum\limits_{(i,j)\in U_t(\xi,\eta)^k} c_{ij}^k \tilde{y}_{ij}^t$, $U_{\text{биц}}^k$ — множество бициклических дуг [4], $\tilde{y}_{ij}^t$, $(i, j)^k \in U_t$ — решение системы

$$\sum_{j\in I_i^+(U_t)} \tilde{y}_{ij}^t - \sum_{j\in I_i^-(U_t)} \mu_{ij}^k \tilde{y}_{ji}^t, \ t = \overline{1, l_1 + l_2},$$

$$k = 1, \ t \leqslant l_1; \ k = 2, \ t > l_1; \ l_k = |U_{\text{биц}}^k|, \ k = 1, 2,$$

способы отыскания которого приведены в [5]. Упорядочим произвольным образом дуги множества U^*, обозначим через $\tau = \tau(i, j)$ порядковый номер дуги $(i, j) \in U^*$, $1 \leqslant \tau \leqslant |U^*|$. Пусть $D_1 = (\tilde{R}_p(Z_t), \ p = \overline{1, l}; \ t = \overline{1, l_1 + l_2})$ — $l \times (l_1 + l_2)$-матрица, составленная из чисел $\tilde{R}_p(Z_t) = \sum\limits_{(i,j)\in U_t} \lambda_{ij}^{kp} \tilde{y}_{ij}^t$, $Z_t = \{I_t, U_t\}$; $D_2 = (\delta_{\tau,t}, \ \tau = \overline{1, |U^*|}; \ t = \overline{1, l_1 + l_2})$ — $|U^*| \times (l_1 + l_2)$-матрица, составленная из чисел: $\delta_{\tau(i,j),t} = \tilde{y}_{ij}^t$ при $(i, j) \in U_t \cap U^*$; $\delta_{\tau(i,j),t} = 0$ при $(i, j) \notin U_t \cap U^*$. Сформируем $(l + |U^*|) \times (l_1 + l_2)$-матрицу $D = \begin{pmatrix} D_1 \\ D_2 \end{pmatrix}$. Из системы $D'r = \rho$, которая имеет единственное решение, так как $\det D \neq 0$, вычислим вектор r, часть компонент r_{p_1}, $p_1 = \overline{l + 1, l + |U^*|}$, которого обозначим через γ_{ij}, $(i, j) \in U^*$. Тогда система (8) эквивалентна следующей системе уравнений:

$$u_i^k - \mu_{ij}^k u_j^k + \sum_{p=1}^{l} \lambda_{ij}^{kp} r_p - \bar{c}_{ij}^k = 0,$$

$$\bar{c}_{ij}^k = \begin{cases} c_{ij}^k, \ (i, j)^k \in U_{\text{оп}}^k \setminus U^*, \\ c_{ij}^k - \gamma_{ij}, \ (i, j) \in U^*, \ k = 1, 2. \end{cases}$$

Способ решения последней системы приведен в [4]. Для каждой дуги (i, j) вычислим вектор оценок $\Delta_{ij} = (\Delta_{ij}^1, \Delta_{ij}^2)$:

$$\Delta_{ij}^k = u_i^k - \mu_{ij}^k u_j^k + \sum_{p=1}^{l} \lambda_{ij}^{kp} r_p - c_{ij}^k, \ k = 1, 2.$$

Теорема 3 (критерий оптимальности). *Соотношения* $\Delta_{ij}^k \leqslant 0$ *при* $x_{ij}^k = 0$; $\Delta_{ij}^k = 0$ *при* $x_{ij}^k > 0$ *на ненасыщенных дугах*

$$(x_{ij}^1 + x_{ij}^2 < d_{ij});$$

$$\Delta_{ij}^1 = \Delta_{ij}^2 \geqslant 0 \ \textit{при} \ x_{ij}^1 > 0, \ x_{ij}^2 > 0; \tag{9}$$

$$\Delta_{ij}^k \geqslant \Delta_{ij}^{2/k}, \ \Delta_{ij}^k \geqslant 0 \ \textit{при} \ x_{ij}^k = d_{ij}, \ x_{ij}^{2/k} = 0, \ k = 1, 2,$$

на насыщенных дугах $(x_{ij}^1 + x_{ij}^2 = d_{ij})$ *достаточны, а в случае невырожденности необходимы для оптимальности опорного потока* $\{x, U_{\text{оп}}\}$.

Опору $U_{\text{оп}}$ назовем правильной, если выполняются соотношения: $\Delta_{ij}^k \leqslant 0$, $(i, j)^k \in U_{\text{н}}^k$, $(i, j)^{2/k} \in U_{\text{оп}}^{2/k}$; $\Delta_{ij}^k = -\gamma_{ij} \geqslant 0$, $(i, j) \in U^*$, $k = 1, 2$. Из соотношений (9) следует, что существует оптимальная правильная опора. Поэтому в дальнейшем будем рассматривать только правильные опоры. Для опорного потока $\{x, U_{\text{оп}}\}$ вычислим оценку субоптимальности

$$\beta(x, U_{\text{оп}}) = -\sum_{k=1}^{2} \sum_{(i,j)\in U, \max\{\Delta_{ij}^1, \Delta_{ij}^2\} < 0} \Delta_{ij}^k x_{ij}^k -$$

$$- \sum_{(i,j)\in U, \max\{\Delta_{ij}^1, \Delta_{ij}^2\} = \Delta_{ij}^k > 0} (\Delta_{ij}^{2/k} x_{ij}^{2/k} + \Delta_{ij}^k (x_{ij}^k - d_{ij})). \tag{10}$$

Используя соотношения двойственности, легко доказать следующее неравенство: $\sum_{k=1}^{2}\sum_{(i,j)\in U} c_{ij}^k x_{ij}^k - \sum_{k=1}^{2}\sum_{(i,j)\in U} c_{ij}^k x_{ij}^{0k} \leqslant \beta(x, U_{оп})$, из которого следует

Теорема 4 (критерий субоптимальности). *При любом $\varepsilon \geqslant 0$ для ε-оптимальности (субоптимальности) потока x^ε необходимо и достаточно чтобы существовала такая опора $U_{оп}^\varepsilon$, что для опорного потока $\{x^\varepsilon, U_{оп}^\varepsilon\}$ выполняется неравенство $\beta(x^\varepsilon, U_{оп}^\varepsilon) \leqslant \varepsilon$.*

Справедливо разложение $\beta(x, U_{оп}) = \beta(x) + \beta(U_{оп})$, где $\beta(x)$, $\beta(U_{оп})$ — меры неоптимальности потока x и опоры $U_{оп}$. Пусть для опорного потока $x, U_{оп}\}$ критерии оптимальности (теорема 3) и субоптимальности (теорема 4) не выполняются. Осуществим итерацию $\{x, U_{оп}\} \to \{\bar{x}, \bar{U}_{оп}\}$, которую составим из двух частей: замена потока; замена опоры.

Замена потока. Построим множество $U_{опн}^k = \{(i, j) \in U : (i, j)^k \in U_н^k, (i, j)^{2/k} \bar{\in} U_н^{2/k}\}$. Множество $U_н^1 \cap U_н^2$ разобьем на три непересекающихся подмножества $U_н^{+1}$, $U_н^{+2}$, $U_н^- : U_н^{+k} \subset \{(i, j) \in U_н^1 \cap U_н^2 : \Delta_{ij}^k \geqslant \Delta_{ij}^{2/k}, \Delta_{ij}^k \geqslant 0\}$, $k = 1, 2$; $U_н^- \subset \{(i, j) \in U_н^1 \cap U_н^2 : \Delta_{ij}^1 \leqslant 0, \Delta_{ij}^2 \leqslant 0\}$.

Подсчитаем максимум приращения целевой функции задачи (1) по допустимым направлениям $l = (l_{ij}^k, (i, j) \in U, k = 1, 2)$, соответствующим нормировке [6]: $-x_{ij}^k \leqslant l_{ij}^k$, $k \in K_н(i, j)$, $(i, j) \in U$; $l_{ij}^1 + l_{ij}^2 \leqslant d_{ij} - x_{ij}^1 - x_{ij}^2$, $(i, j) \in U$; $-x_{ij}^k \leqslant l_{ij}^k$, $(i, j) \in U^*$, $k = 1, 2$. Неопорные компоненты оптимального подходящего направления имеют вид $l_{ij}^k = -x_{ij}^k$, $(i, j) \in U_н^-$, $k = 1, 2$; $l_{ij}^k = d_{ij} - x_{ij}^k$, $l_{ij}^{2/k} = -x_{ij}^{2/k}$, $(i, j) \in U_н^{+k}$, $k = 1, 2$; $l_{ij}^k = -x_{ij}^k$, $(i, j)^k \in U_{опн}^k$, $k = 1, 2$. Опорные компоненты вектора l однозначно найдем из системы

$$\sum_{j\in I_i^+(U_{оп}^k)} l_{ij}^k - \sum_{j\in I_i^-(U_{оп}^k)} \mu_{ji}^k l_{ji}^k = -\sum_{j\in I_i^+(U_н^k)} l_{ij}^k + \sum_{j\in I_i^-(U_н^k)} \mu_{ji}^k l_{ji}^k,$$

$$i \in I,\ k = 1, 2;\ \sum_{k=1}^{2}\sum_{(i,j)^k\in U_{оп}^k} \lambda_{ij}^{kp} l_{ij}^k = -\sum_{k=1}^{2}\sum_{(i,j)^k\in U_н^k} \lambda_{ij}^{kp} l_{ij}^k,\ p = \overline{1, l};$$

$$l_{ij}^1 + l_{ij}^2 = 0,\ (i, j) \in U^*.$$

Максимально допустимый шаг вдоль l подсчитываем по формулам: $\theta_0 = \min\{1, \theta_{i_0j_0}^{k_0}, \theta_{i_0j_0}\}$; $\theta_{i_0j_0}^{k_0} = \min \theta_{ij}^k$, $(i, j)^k \in U_{оп}^k$, $k = 1, 2$; $\theta_{ij}^k = -x_{ij}^k / l_{ij}^k$ при $l_{ij}^k < 0$; $\theta_{ij}^k = \infty$ при $l_{ij}^k > 0$; $\theta_{i_0j_0} = \min \theta_{ij}$, $(i, j) \in (U_{оп}^1 \cap U_{оп}^2) \bigcup_{k=1}^{2} U_{опн}^k$, $\theta_{ij} = (d_{ij} - x_{ij}^1 - x_{ij}^2)/(l_{ij}^1 + l_{ij}^2)$ при $l_{ij}^1 + l_{ij}^2 > 0$; $\theta_{ij} = \infty$ при $l_{ij}^1 + l_{ij}^2 \leqslant 0$. Новый поток x строим в виде $\bar{x} = x + \theta_0 l$. Если $\theta_0 = 1$, то $\bar{x}$ — оптимальный поток. Пусть $\theta_0 < 1$, $\beta(\bar{x}, U_{оп}) = (1 - \theta_0)\beta(x, U_{оп})$. Если $\beta(\bar{x}, U_{оп}) \leqslant \varepsilon$, то построен ε-оптимальный поток $x^\varepsilon = \bar{x}$. В противном случае переходим ко второй части итерации.

Замена опоры. Новую опору $U_{оп}$ выберем так, чтобы уменьшилась мера $\beta(U_{оп}) = \sum_{k=1}^{2}\sum_{i\in I} a_i^k u_i^{0k} + \sum_{p=1}^{l} \alpha_p r_p^0 - \sum_{(i,j)\in U} d_{ij} w_{ij}^0 - \sum_{k=1}^{2}\sum_{i\in I} a_i^k u_i^k - \sum_{p=1}^{l} \alpha_p r_p + \sum_{(i,j)\in U} d_{ij} w_{ij}$, где (u, r, w) — сопровождающий двойственный план, построенный на опоре $U_{оп}$, (u^0, r^0, w^0) — оптимальный двойственный план. Уменьшения $\beta(U_{оп})$ достигаем с помощью двойственного опорного метода, изложенного выше. В результате итерации построен новый опорный поток $\{\bar{x}, \bar{U}_{оп}\}$, для которого $\beta(\bar{x}, \bar{U}_{оп}) \leqslant \beta(x, U_{оп})$.

Summary

The dual and adaptive methods for solution of the two-product distributive transport problem with additional equality constraints are considered.

Литература

1. Пилипчук Л. А. // Вестн. Белорус. ун-та. Сер. 1, физ., мат., и мех. 1984. № 1. С. 42—46.
2. Пилипчук Л. А. Двойственный метод решения двухпродуктовой транспортной задачи с дополнительными ограничениями. Мн., 1983. Деп. в БелНИИНТИ 02.06.83, № 644-Бе-Д83.
3. Пилипчук Л. А. Мультипоток минимальной стоимости с дополнительными ограничениями на частичные суммы дуговых потоков. М., 1981. Деп. в ВИНИТИ 28.05.81, № 2522-81.
4. Габасов Р., Кириллова Ф. М. Методы линейного програмирования. Мн.: Изд-во Белорус. ун-та. 1978. Ч. 2. 239 с.; 1980. Ч. 3. 368 с.
5. Габасов Р., Костюкова О. И. // Изв. АН СССР. Техническая кибернетика. 1979. № 2. С. 36—43.
6. Проблемы оптимального управления / Под ред. Р. Габасова, Ф. М. Кирилловой. Мн.: Наука и техника, 1981. 370 с.

Белорусский государственный университет им. В. И. Ленина

Поступила в редакцию 18.06.84