ISSN 0321-0367

ВЕСТНИК

Белорусского государственного университета имени В. И. Ленина

СЕРИЯ I

ФИЗИКА

МАТЕМАТИКА

МЕХАНИКА

1
1984

УДК 62-50

Л. А. ПИЛИПЧУК

АЛГОРИТМ РЕШЕНИЯ ДВУХПРОДУКТОВОЙ ТРАНСПОРТНОЙ ЗАДАЧИ С ДОПОЛНИТЕЛЬНОЙ МАТРИЦЕЙ ОГРАНИЧЕНИЙ ПРЯМЫМ МЕТОДОМ

Рассмотрим сетевую двухпродуктовую транспортную задачу с дополнительными ограничениями:

$$\sum_{k=1}^{2} \sum_{(i,j)\in U} c_{ij}^{k} x_{ij}^{k} \to \min, \tag{1}$$

$$\sum_{j\in I_i^{+}(U)} x_{ij}^{k} - \sum_{j\in I_i^{+}(U)} x_{ji}^{k} = a_i^{k},\ i\in I, \tag{2}$$

$$x_{ij}^{k} \geqslant 0,\ x_{ij}^{1} + x_{ij}^{2} \leqslant d_{ij},\ (i,\ j)\in U,\ k=1,\ 2, \tag{3}$$

$$\sum_{k=1}^{2} \sum_{(i,j)\in M_p} \lambda_{ij}^{kp} x_{ij}^{k} = \alpha_p,\ p=\overline{1,\ l}, \tag{4}$$

где I, U — множества узлов и дуг сети S; c_{ij}^{k}, a_i^{k}, d_{ij}, α_p, λ_{ij}^{kp} — заданные числа; $M_p \subset U$ — заданные множества, $I_i^{+}(U) = \{j : (i,\ j) \in U\}$, $I_i^{-}(U) = \{j : (j,\ i) \in U\}$.

В данной работе строится алгоритм решения задачи (1)—(4), которая отличается от [1] наличием коэффициентов λ_{ij}^{kp}, $k=1,\ 2$, $p=\overline{1,\ l}$, $(i,\ j) \in M_p$, $M_p \subset U$, где λ_{ij}^{kp} — произвольные действительные числа.

Опорой сети будем называть совокупность дуг $U_{\text{оп}} = \{U_{\text{оп}}^{1},\ U_{\text{оп}}^{2},\ U^{*}\}$, такую, что $U^k_{\text{оп}} \subset U^k$, $k=1,\ 2$; $U^* \subset U^1_{\text{оп}} \cap U^2_{\text{оп}} = \{(i,\ j) : (i,\ j)^1 \in U^1_{\text{оп}},\ (i,\ j)^2 \in U^2_{\text{оп}}\}$, $U = U^1 \cup U^2$, $I(U^k_{\text{оп}}) = \{i : (i,\ j)^k \in U^k_{\text{оп}},\ k=1,\ 2\}$, и система

$$\sum_{j \in I_i^+(U_{\text{оп}})} x^k_{ij} - \sum_{j \in I_i^-(U_{\text{оп}})} x^k_{ji} = 0,\ i \in I(U^k_{\text{оп}}),$$

$$x^1_{ij} + x^2_{ij} = 0,\ (i,\ j) \in U^*, \tag{5}$$

$$\sum_{k=1}^{2} \sum_{(i,\ j) \in M_{p_1}} \lambda^{kp}_{ij} x^k_{ij} = 0,\ p = \overline{1,\ l},\ k=1,\ 2$$

имеет только тривиальное решение для $M_{p_1} = M_p \cap (U^1_{\text{оп}} \cup U^2_{\text{оп}})$ и нетривиальное для каждой из следующих совокупностей:

1) $\{U^k_{\text{оп}},\ k=1,\ 2,\ U^* \setminus (i,\ j)\}$, где $(i,\ j)$ — любая дуга из U^*;

2) $\{U^1_{\text{оп}} \cup (i,\ j),\ U^2_{\text{оп}},\ U^*\}$, где $(i,\ j)^1$ — любая дуга из $U^1 \setminus U^1_{\text{оп}}$;

3) $\{U^1_{\text{оп}},\ U^2_{\text{оп}} \cup (i,\ j)^2,\ U^*\}$, где $(i,\ j)^2$ — любая дуга из $U^2 \setminus U^2_{\text{оп}}$;

Пара $\{x,\ U_{\text{оп}}\}$ из потока и опоры — опорный поток. Дуги $(i,\ j)^k \in U^k_{\text{оп}}$, $k=1,\ 2$ назовем опорными, остальные — неопорными. Опорный поток назовем невырожденным, если опорные дуговые потоки удовлетворяют следующим неравенствам; $x^k_{ij} > 0$, $(i,\ j)^k \in U^k_{\text{оп}}$, $k=1,\ 2$; $x^1_{ij} + x^2_{ij} < d_{ij}$, для $(i,\ j)^1 \in (U^1_{\text{оп}} \cup U^2_{\text{оп}}) \setminus U^*$ или $(i,\ j)^2 \in (U^1_{\text{оп}} \cup U^2_{\text{оп}}) \setminus U^*$.

Рассмотрим некоторый цикл L_q в сети $S : (i^q_1,\ i^q_2,\ \ldots,\ i^q_s)$. Выбрав в нем направление движения, обозначим через L^+_q и L^-_q множество прямых и обратных дуг цикла L_q соответственно. Число

$$R_p(L_q) = \sum_{(i,\ j) \in L_q} \lambda^{kp}_{ij} \operatorname{sign}(i,\ j)^q,\ k = \begin{cases} 1,\ q \leqslant l_1, \\ 2,\ q > l_1 \end{cases}$$

назовем детерминантом цикла L_q относительно p-го ограничения из (4), функция определяется соотношением

$$\operatorname{sign}(i,\ j)^q = \begin{cases} 1, & \text{если } (i,\ j) \in L^+_q, \\ -1, & \text{если } (i,\ j) \in L^-_q, \\ 0, & \text{если } (i,\ j) \overline{\in} L_q. \end{cases}$$

Дуга $(i^t_1,\ i^t_2) \in U_{\text{оп}}$ называется ациклической, если $(i^t_1,\ i^t_2) \in U^k_{\text{а}}$, $U^{\underline{k}}_{\text{оп}} = U^k_a \cap U^k_{\text{д}} = \varnothing$, где $L_t = \{I_t,\ U_t\}$ — некоторый цикл из множества L. Введем множества U^1_a, U^2_a ациклических дуг соответственно первого и второго продуктов, $U_a = U^1_a \cup U^2_a$, $U^1_a = \bigcup_{t=1}^{l_1} (i^t_1,\ i^t_2)^k$, $U^2_a = \bigcup_{t=l_1+1}^{l_1+l_2} (i^t_1,\ i^t_2)^k$, $k = \begin{cases} 1,\ t \leqslant l_1 \\ 2,\ t > l_1. \end{cases}$

Для каждого цикла составим систему уравнений

$$\sum_{j \in I_i^+(U_t)} \tilde{y}^k_{i^t j^t} - \sum_{j \in I_i^-(U_t)} \tilde{y}^k_{i^t j^t} = 0,$$

$$i \in I(U_t),\ k = \begin{cases} 1,\ t \leqslant l_1, \\ 2,\ t > l_1, \end{cases}\ t = \overline{1,\ l_1 + l_2}$$

из которой однозначно определим потоки $\tilde{y}^k_{i^t j^t}$, предварительно положив поток по ациклической дуге равным

$$y^k_{i^t_1 i^t_2} = 1,\ k = \begin{cases} 1,\ t \leqslant l_1 \\ 2,\ t > l_1,\ t = \overline{1,\ l_1 + l_2}. \end{cases}$$

Упорядочим произвольным образом дуги множества U^*. Пусть $D_1 = \{R_p(L_q),\ q = \overline{1,\ l_1 + l_2},\}_{p=\overline{1,\ l}} - l \times (l_1 + l_2)$ — матрица, составленная из чисел

$R_p(L_q)$, и $D_2 = \{\delta_{\tau(i,j),\ (i,j)} t\ \underset{\in U^*}{(i_1, i_2)^k},\ (i_1, i_2)^k \in U_a^k,\ k=1,\ 2,\} - |U^*| \times (l_1 + l_2)$-матрица, составленная из элементов

$$\delta_{\tau(i,j),t} = \begin{cases} y^k_{i^t j^t}, & \text{если } (i^t, j^t) \in U_t \cap U^*, \\ 0, & \text{если } (i^t, j^t) \overline{\in} U_t \cap U^*, \end{cases}$$

где $\tau(i, j)$ — порядковый номер дуги в U^*, $k = \begin{cases} 1, & t \leqslant l_1 \\ 2, & t > l_1. \end{cases}$ Составим $(|U^*| + l) \times (l_1 + l_2)$ — матрицу $D = \begin{Bmatrix} D_1 \\ D_2 \end{Bmatrix}$. Если $l_1 + l_2 \neq |U^*| + l$, то дополним матрицу D нулями до квадратной матрицы. Число $R = \det D$ назовем детерминантом опоры $U_{\text{оп}}$.

Теорема (критерий опорности). Для того чтобы совокупность $U_{\text{оп}}$ была опорой сети S, необходимо и достаточно выполнение условий:

1) $I(U^k_{\text{оп}}) = I,\ k = 1,\ 2;$
2) $U^k_{\text{оп}},\ k = 1,\ 2$ — связные множества;
3) $R \neq 0$.

Доказательство теоремы аналогично [1]. По опоре $U_{\text{оп}}$ построим потенциалы $u_i = \{u_i^1, u_i^2\}$, $i \in I$; r_p, $p = \overline{1, l}$; r_{p_1}, $p_1 = \overline{l+1, l+|U^*|}$, как решение системы:

$$u_i^k - u_j^k + \sum_{p=1}^{l} \lambda_{ij}^{kp} r_p - c_{ij}^k = 0,\ (i, j) \in U^k_{\text{оп}} \setminus U^*,$$
$$u_i^1 - u_j^1 + \sum_{p=1}^{l} \lambda_{ij}^{1p} r_p - c_{ij}^1 = u_i^2 - u_j^2 + \sum_{p=1}^{l} \lambda_{ij}^{2p} r_p - c_{ij}^2,\ (i, j) \in U^*,\ k = 1,\ 2. \tag{6}$$

Будем говорить, что $u_i = \{u_i^1,\ u_i^2\}$ — вектор потенциалов узлов $i \in I$, r_p — потенциал дополнительного ограничения (4), r_{p_1}—потенциал ограничения $x_{ij}^1 + x_{ij}^2 \leqslant d_{ij}$.

Для нахождения потенциалов r_p, r_{p_1}, $p = \overline{1, l}$, $p_1 = \overline{l+1, l+|U^*|}$, следуя [1], запишем систему:

$$\sum_{p=1}^{l} R_p(L_t) r_p + \sum_{p_1=l+1}^{l+|U^*|} r_{p_1} \delta_{\tau(i,j),t} = \sum_{(i,j) \in L_t} c_{ij}^k \operatorname{sign}(i, j)^t \tag{7}$$

Равенство (7) можно переписать в следующем виде:

$$D'r = c,\ r = \{r_p,\ r_{p_1}\},\ c = \{c_1,\ c_2,\ \ldots,\ c_{l_1+l_2}\}, \tag{8}$$
$$c_t = \sum_{(i,j) \in L_t} c_{ij}^k \operatorname{sign}(i, j)^t,\ k = \begin{cases} 1, & t \leqslant l_1 \\ 2, & t > l_1. \end{cases}$$

Система (8) относительно r имеет единственное решение, так как $R \neq 0$. Величины r_{p_1}, вычисленные из системы (8), обозначим через γ_{ij}, $(i, j) \in U^*$. Имеем

$$\bar{c}_{ij}^k = \begin{cases} c_{ij}^k, & (i, j) \overline{\in} U^*, \\ c_{ij}^k - \gamma_{ij}, & (i, j) \in U^*,\ k = 1,\ 2. \end{cases}$$

Вместо системы (6) запишем эквивалентную ей систему:

$$u_i^k - u_j^k + \sum_{p=1}^{l} \lambda_{ij}^{kp} r_p - \bar{c}_{ij}^k = 0,\ (i, j) \in U^k_{\text{оп}},\ k = 1,\ 2.$$

Теперь векторы потенциалов $u_i = \{u_i^1,\ u_i^2\}$ найдем с помощью деревьев $U^k_{\text{д}}$, $k = 1,\ 2$ и чисел $\bar{c}_{ij}^k$, где $U^k_{\text{д}} = U^k_{\text{оп}} \setminus U^k_{\text{а}}$, $U^k_{\text{а}}$ — множество ациклических дуг, как в классическом методе потенциалов [2].

Для каждой дуги вычислим вектор оценок

$$\Delta_{ij} = \{\Delta_{ij}^1,\ \Delta_{ij}^2\} : \Delta_{ij}^k = u_i^k - u_j^k + \sum_{p=1}^{l} \lambda_{ij}^{kp} r_p - c_{ij}^k,\ (i, j) \in U,\ k = 1,\ 2.$$

Следуя [3], можно доказать

Критерий оптимальности. Если для опорного потока выполняются соотношения:

а) на ненасыщенных дугах $(x^1_{ij}+x^2_{ij}<d_{ij})$:

$$\Delta^k_{ij}\leqslant 0 \text{ при } x^k_{ij}=0; \tag{9}$$

$$\Delta^k_{ij}=0 \text{ при } x^k_{ij}>0,\ (i,\ j)\in U,\ k=1,\ 2. \tag{10}$$

б) на насыщенных дугах $(x^1_{ij}+x^2_{ij}=d_{ij})$:

$$\Delta^1_{ij}=\Delta^2_{ij}\geqslant 0 \text{ при } x^1_{ij}>0,\ x^2_{ij}>0, \tag{11}$$

$$\Delta^1_{ij}\geqslant\Delta^2_{ij},\ \Delta^1_{ij}\geqslant 0 \text{ при } x^1_{ij}=d_{ij},\ x^2_{ij}=0,\ (i,\ j)\in U. \tag{12}$$

Критерий субоптимальности. Поток $x=\{x^{k0}_{ij},\ (i,\ j)\in U,\ k=1,\ 2\}$ назовем ε-оптимальным (субоптимальным), если

$$\sum_{k=1}^{2}\ \sum_{(i,\ j)\in U} c^k_{ij}x^k_{ij}-\sum_{k=1}^{2}\ \sum_{(i,\ j)\in U} c^k_{ij}x^{k0}_{ij}\leqslant\varepsilon.$$

Для любого ε-оптимального потока выполняется неравенство (13) (доказательство аналогично [1]).

$$\sum_{k=1}^{2}\ \sum_{(i,\ j)\in U} c^k_{ij}x^k_{ij}-\sum_{k=1}^{2}\ \sum_{(i,\ j)\in U} c^k_{ij}x^{k0}_{ij}\leqslant\beta, \tag{13}$$

где $\beta=-\sum\limits_{k=1}^{2}\ \sum\limits_{\substack{(i,\ j)\in U,\\ \max\{\Delta^k_{ij},\ k=1,\ 2;\ 0\}=0}}\Delta^k_{ij}x^k_{ij}-\sum\limits_{\substack{(i,\ j)\in U,\\ \max\{\Delta^1_{ij},\ \Delta^2_{ij},\ 0\}>0}}(\Delta^l_{ij}x^l_{ij}+\Delta^k_{ij}(x^k_{ij}-d_{ij}))$.

Если для опорного потока $\{x,\ U_{\text{оп}}\}$ приведенные критерии оптимальности (9—12) и субоптимальности (13) не выполняются, опишем алгоритм улучшения потока.

Среди дуг, для которых не выполнен критерий оптимальности, найдем дугу с максимальным нарушением, т. е. если для ненасыщенной дуги не выполнены условия (9)—(10), то помечаем число Δ^k_{ij}, если же для насыщенной дуги не выполнены условия (11)—(12), то при $\max\{\Delta^1_{ij},\ \Delta^2_{ij}\}>0$ помечаем число $\Delta^l_{ij}-\Delta^k_{ij}$, при $\max\{\Delta^k_{ij},\ k=1,\ 2\}<0$ и $x^k_{ij}\geqslant 0,\ k=1,\ 2$ помечаем число Δ^k_{ij}. Среди отмеченных чисел выбираем максимальное по модулю число. Рассмотрим следующие случаи:

1) максимальное из отмеченных чисел имеет вид Δ^k_{ij} и находится на дуге $(i_0,\ j_0)^k,\ (i_0,\ j_0)^k\overline{\in}U^*$;

2) максимальное из чисел имеет вид Δ^k_{ij} и находится на дуге $(i_0,\ j_0)^k$, $(i_0,\ j_0)\in U^*$;

3) максимальное число имеет вид $\Delta^l_{ij}-\Delta^k_{ij},\ l,\ k=1,\ 2,\ l\neq k$.

Рассмотрим каждый из этих случаев.

1. Не нарушая общности, положим $k=1$.

Найдем поток $Y(U^1_{\text{оп}}\cup U^2_{\text{оп}}\cup(i_0,\ j_0)^1)=\{y^k_{ij},\ (i,\ j)^k\in U^k_{\text{оп}},\ y^1_{i_0j_0},\ k=1,\ 2\}$, компоненты которого удовлетворяют системе (5), записанной относительно множества $\{U^1_{\text{оп}}\cup(i_0,\ j_0)^1,\ U^2_{\text{оп}},\ U^*\}$, и условию $y^1_{i_0j_0}=\operatorname{sign}\Delta^1_{i_0j_0}$. Аналогично [1] определим вектор α:

$$\alpha=\begin{cases}-R_p(L_0)\cdot y^1_{i_0j_0},\ p=\overline{1,\ l}\\ -\tilde{y}^0_{ij}y^1_{i_0j_0},\ \text{если } (i,\ j)\in U^*\cap U^0\\ 0,\ \text{если } (i,\ j)\in U^*\setminus U^0,\end{cases}$$

где $Z_0=\{I,\ U^0\}$ — множество узлов и дуг цикла, образованного дугами $(i_0,\ j_0)^1$ и $(i,\ j)^1\in U^1_{\text{оп}}\setminus U^1_{\text{а}}$, и определим потоки на ациклических дугах.

Потоки на дугах $U^k_{\text{оп}} \setminus U^k_{\text{а}}$ определяются по формуле:

$$y^k_{ij} = \begin{cases} \sum\limits_{t \in T(i,\,j)^k} \widetilde{y}^k_{i^t j^t} \cdot y^k_{i_1^t i_2^t}, \; T(i,\,j)^k \neq \varnothing, \\ 0, \; T(i,\,j)^k = \varnothing, \; k = \begin{cases} 1, \; t \leqslant l_1 \\ 2, \; t > l_1, \end{cases} \end{cases} \qquad (14)$$

где $T(i,\,j)^k = \{t : (i,\,j)^k \in U^t(i_1,\,i_2)^k,\ (i_1,\,i_2)^k \in U^k_{\text{а}},\ (i^t,\ j^t)^k$ — ациклическая дуга, определившая цикл $Z_t = Z_{t(i_1,\,i_2)^k}$. Новый поток $\overline{x}$ строим в виде: $\overline{x}^k_{ij} = x^k_{ij} + \Theta y^k_{ij}$, $(i,\,j)^k \in U^k_{\text{оп}}$, $k = 1,\,2$; $\overline{x}^1_{i_0 j_0} = x^1_{i_0 j_0} + \Theta y^1_{i_0 j_0}$; $\overline{x}^k_{ij} = x^k_{ij}$, $(i,\,j)^k \in U^k \setminus U^k_{\text{оп}}$, где Θ — максимально допустимый шаг, найденный по стандартным правилам [3]. При переходе $x \to \overline{x}$ стоимость потока уменьшилась на величину — $\Theta\,|\Delta^1_{i_0 j_0}|$. Опорные множества меняем по правилам, указанным в [1].

2. Найдем поток $Y(U^1_{\text{оп}} \cup U^2_{\text{оп}})$, удовлетворяющий системе (5), записанной относительно множеств $\{U^1_{\text{оп}},\ U^2_{\text{оп}},\ U^* \setminus (i_0,\ j_0)\}$, и условию $y^1_{i_0 j_0} + y^2_{i_0 j_0} = -1$. Компоненты вектора α и ациклические направления определим аналогично [1]. Из соотношения (14) найдем y^k_{ij}, $(i,\,j)^k \in U^k_{\text{оп}} \setminus U^k_{\text{а}}$. Новый поток $\overline{x}$ строим в виде $\overline{x}^k_{ij} = x^k_{ij} + \Theta y^k_{ij}$, $(i,\ j)^k \in U^k_{\text{оп}}$, $k = 1,\ 2$, $\overline{x}^k_{ij} = x^k_{ij}$, $(i,\,j) \overline{\in} U_{\text{оп}}$, $k = 1,\ 2$, где Θ — максимальный шаг, найденный по стандартным правилам. При переходе $x \to \overline{x}$ стоимость потока уменьшится на величину $\Theta\Delta^1_{i_0 j_0}$. Опорные множества меняем по правилам, указанным в [1].

3. Найдем потоки $\{y^k_{ij},\ (i,\ j)^k \in U^k_{\text{оп}},\ y^k_{i_0 j_0},\ k = 1,\ 2\}$, удовлетворяющие системе (5), записанной относительно множеств $\{U^1_{\text{оп}} \cup (i_0,\ j_0)^1,\ U^2_{\text{оп}} \cup (i_0,\ j_0)^2,\ U^* \cup (i_0,\ j_0)\}$, при условиях $y^1_{i_0 j_0} = \operatorname{sign}(\Delta^l_{i_0 j_0} - \Delta^k_{i_0 j_0})$, $y^2_{i_0 j_0} = -\operatorname{sign}(\Delta^l_{i_0 j_0} - \Delta^k_{i_0 j_0})$. Подходящие направления изменения потока найдем так же, как и в [1].

Новый поток $\overline{x}$ строим в виде $\overline{x}^k_{ij} = x^k_{ij} + \Theta y^k_{ij}$, $(i,\ j)^k \in U^k_{\text{оп}} \cup (i_0,\ j_0)^k$, $\overline{x}^k_{ij} = x^k_{ij}$, $(i,\ j)^k \in U^k_{\text{оп}} \cup (i_0,\ j_0)^k$, $k = 1,\ 2$, Θ — максимально-допустимый шаг, найденный по стандартным правилам. Стоимость потока уменьшается на величину $\Theta\,|\Delta^l_{i_0 j_0} - \Delta^k_{i_0 j_0}|$. Опора преобразуется по правилам, указанным в [1].

ЛИТЕРАТУРА

1. Пилипчук Л. А. Мультипоток минимальной стоимости с дополнительными ограничениями на частичные суммы дуговых потоков.— Рукопись депонирована в ВИНИТИ. № 2522-81. Деп. от 28.05.81.

2. Данциг Дж. Линейное программирование, его обобщения и применения.— М., 1966.

3. Габасов Р., Кириллова Ф. М. Методы линейного программирования.— Минск, 1980, ч. 2.

Поступила в редакцию
12.07.82.

Кафедра МОУ