ЗАДАЧА КОШИ ДЛЯ ГИПЕРБОЛИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ С ПОСТОЯННЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ В СЛУЧАЕ ДВУХ НЕЗАВИСИМЫХ ПЕРЕМЕННЫХ

В. И. Корзюк, И. С. Козловская (Минск, Беларусь)
korzyuk@bsu.by, kozlovskaja@bsu.by

В аналитическом виде найдено решение задачи Коши для линейного гиперболического уравнения с постоянными коэффициентами, в случае двух независимых переменных при некоторых условиях на коэффициенты. Оператор уравнения представляет собой композицию линейных операторов первого порядка.

Введение. В данной статье рассматривается задача Коши для гиперболического уравнения порядка m с постоянными коэффициентами, где m – целое положительное число. Оператор уравнения представляет собой композицию дифференциальных операторов первого порядка. В задаче Коши искомая функция и уравнение рассматриваются от двух независимых переменных.

Метод нахождения аналитического решения рассматриваемой задачи Коши состоит в следующем. С помощью характеристик уравнения определяется его общее решение. Из общего решения выделяется то, которое удовлетворяет условиям Коши.

Эта задача в такой постановке изучалась авторами в статьях [1, 2]. В [1] рассмотрена задача Коши для однородного уравнения. В [2] рассмотрен случай строго гиперболического уравнения.

В данной работе рассмотрены некоторые другие случаи.

Отметим, что задаче Коши для гиперболических уравнений посвящена многочисленная литература. Более близкие к данной статье можно выделить работы [3–8].

Постановка задачи. Задача изучается на плоскости $\mathbb{R}^2$ двух независимых переменных t и x. В области $Q = (0, \infty) \times \mathbb{R}$ рассматривается гиперболическое уравнение порядка m.

$$\mathfrak{L}^{(m)} u = \prod_{k=1}^{m} \left(\partial_t - a^{(k)}\partial_x + b^{(k)}\right) u\left(t, x\right) = f\left(t, x\right), \quad (t, x) \in Q, \tag{2.1}$$

где $a^{(k)}$, $b^{(k)}$ $(k = 1, \ldots, m)$ – коэффициенты из $\mathbb{R}$ (действительные числа), $f : \mathbb{R}^2 \supset Q \ni (t, x) \to f(t, x) \in \mathbb{R}$ – заданная в Q функция,$\partial_t = \frac{\partial}{\partial t}$, $\partial_x = \frac{\partial}{\partial x}$, $\partial_t^j = \frac{\partial^j}{\partial t^j}$, $\partial_x^j = \frac{\partial^j}{\partial x^j}$, $\partial_t^s \partial_x^j = \frac{\partial^{s+j}}{\partial t^s \partial x^j}$. На границе $\partial Q = \left\{(t, x) \in \overline{Q} | t = 0\right\}$ области Q задаются условия Коши

$$\partial_t^j u(0, x) = \varphi^{(j)}(x), \quad x \in \mathbb{R}, \quad j = 0, \ldots, m-1, \tag{2.2}$$

$\partial_t^0 u = u$, $\bar{Q}$ – замыкание области Q и $\bar{Q} = [0, \infty) \times \mathbb{R}$.

Обозначим через $\mathfrak{K}$ множество целых чисел от 1 до m, т. е. $\mathfrak{K} = \{1, 2, \ldots, m\}$. С учетом кратности коэффициентов $a^{(k)}$ и $b^{(k)}$ оператор $\mathfrak{L}^{(m)}$ запишем в виде

$$\tilde{\mathfrak{L}}^{(m)} = \prod_{k=1}^{p} \left(\partial_t - a^{(k)}\partial_x + b^{(k)}\right)^{r(k)}, \tag{2.3}$$

где целые числа p и $r(k)$ из множества $\mathfrak{K}$ и $\sum_{k=1}^{p} r(k) = m$. Для уравнения

$$\tilde{\mathfrak{L}}^{(m)} u(t, x) = f(t, x) \tag{2.4}$$

общее решение согласно [2] имеет вид

$$u(t, x) = \sum_{k=1}^{p} \sum_{s=1}^{r(k)} t^{s-1} e^{-b^{(k)}t} f^{(ks)}\left(x + a^{(k)}t\right), \tag{2.5}$$

где $f^{(ks)}$ – произвольные дифференцируемые функции.

Рассмотрим в этой статье уравнение (2.1), которое имеет только кратные характеристики (является не строго гиперболическим) и все коэффициенты $a^{(k)}$, $k \in \mathfrak{K}$ равны, т. е. $a^{(k)} = a$, $k \in \mathfrak{K}$.

Кроме этого все коэффициенты $b^{(k)}$ различны для любых $k, j \in \mathfrak{K}$ $b^{(k)} \neq b^{(j)}$ для $k \neq j$. В этом случае общее решение уравнения (2.1) имеет вид

$$u(t, x) = \sum_{k=1}^{m} e^{-b^{(k)}t} f^{(k)}(x + at), \tag{2.6}$$

где $f^{(k)}$ – произвольные из C^m функциии.

Ограничения на коэффициенты уравнения (2.1), при которых будет рассмотрена задача Коши, сформулируем в виде условия.

Условие 1. Уравнение (2.1) является не строго гиперболическим, для которого выполняются следующие условия на его коэффициенты:

(i) $a^{(k)} = a$ для любого номера $k \in \mathfrak{K}$, $a \neq 0$;

(ii) $b^{(k)} \neq b^{(j)}$ для любых $k, j \in \mathfrak{K}$, $k \neq j$.

Отметим, что для случая, когда уравнение (2.1) является строго гиперболическим, классическое решение задачи Коши получено в работах авторов [1,2].

Решение задачи Коши. Рассмотрим сначала однородное уравнение

$$\mathfrak{L}^{(m)} u = 0, \quad (t, x) \in Q. \tag{3.1}$$

Найдем решение задачи Коши (3.1), (2.2), если выполняется условие 1.

Вычислим производные по t от функции (2.6). Для $j=\overline{0,m-1}$ получаем

$$\partial_t^j u=\sum_{k=1}^{m} e^{-b^{(k)}t}\sum_{s=0}^{j}(-1)^{j-s}A_j^s(b^{(k)})^{j-s}(a^s)\partial_t^s f^{(k)}(x+at), \tag{3.2}$$

где $A_j^s=\frac{j!}{s!(j-s)!}$, $0!=1$. Подставляя значения производных (3.2) в условия (2.2), получаем систему уравнений относительно функций $f^{(k)}:x\to f^{(k)}(x)$, $k=\overline{1,m}$,

$$\sum_{k=1}^{m}\sum_{s=0}^{j}(-1)^{j-s}A_j^s(b^{(k)})^{j-s}(a^s)d^s f^{(k)}(x)=\varphi^{(j)}(x),\quad j=\overline{0,m-1}. \tag{3.3}$$

Рассматриваем более подробно систему уравнений (3.3). Она записывается следующим образом:

$$\begin{array}{ll}
j=0, & \sum\limits_{k=1}^{m} f^{(k)}(x)=\varphi^{(0)}(x),\\
j=1, & a\sum\limits_{k=1}^{m} df^{(k)}(x)-\sum\limits_{k=1}^{m} b^{(k)}f^{(k)}(x)=\varphi^{(1)}(x),\\
j=2, & a^2\sum\limits_{k=1}^{m} d^2f^{(k)}(x)-aA_2^1\sum\limits_{k=1}^{m} b^{(k)}df^{(k)}(x)+\\
 & +\sum_{k=1}^{m}(b^{(k)})^2f^{(k)}(x)=\varphi^{(2)}(x),\\
\dots & \\
j=m-2, & a^{m-2}\sum\limits_{k=1}^{m} d^m f^{(k)}(x)-\dots+\\
 & +(-1)^{m-2-s}a^sA_{m-2}^s(b^{(k)})^{m-2-s}d^sf^{(k)}(x)+\\
 & +\dots+(-1)^{m-2}(b^{(k)})^{m-2}f^{(k)}(x)=\varphi^{(m-2)}(x)\\
j=m-1, & a^{m-1}\sum\limits_{k=1}^{m} d^{m-1} f^{(k)}(x)-\dots+\\
 & +(-1)^{m-1-s}a^sA_{m-1}^s(b^{(k)})^{m-1-s}d^sf^{(k)}(x)+\\
 & +\dots+(-1)^{m-1}(b^{(k)})^{m-1}f^{(k)}(x)=\varphi^{(m-1)}(x).
\end{array} \tag{3.4}$$

Систему (3.4) преобразуем. Для этого первое уравнение из (3.4) умножаем на a^j и от обеих частей вычисляем производную j-го порядка. Полученное уравнение вычитаем из j-го уравнения системы (3.4). Такую операцию проводим для каждого $j=\overline{1,m-1}$.

Затем полученное второе уравнение

$$-\sum_{k=1}^{m} b^{(k)}f^{(k)}(x)=\varphi^{(1)}(x)-ad\varphi^{(0)}(x)$$

умножим на $A_j^1 a^{j-1}$ и дифференцируем обе части его до порядка $j-1$. Полученное уравнение

$$-A_j^1 a^{j-1} \sum_{k=1}^{m} b^{(k)} d^{j-1} f^{(k)}(x) = d^{j-1} \left(\varphi^{(1)}(x) - d\varphi^{(0)}(x) \right) A_j^1$$

вычитаем из j-го уравнения $(j = \overline{2, m-1})$ новой полученной системы

$$\sum_{k=1}^{m} f^{(k)}(x) = \varphi^{(0)}(x),$$

$$\sum_{k=1}^{m} \sum_{s=0}^{j-1} (-1)^{j-s} A_j^s (b^{(k)})^{j-s} a^s d^s f^{(k)}(x) = \varphi^{(j)} - a^2 d^j \varphi^{(0)}, \quad j = \overline{1, m-1}.$$

Опять третье уравнение новой уже полученной системы умножаем на $A_j^2 a^{j-2}$ и дифференцируем $j-2$ раз для $j = \overline{3, m-1}$. Полученное равенство вычитаем из j-го уравнения. Предложенную схему продолжаем до $j - m + 2$. В результате получим алгебраическую систему

$$\boldsymbol{B}\, \boldsymbol{f}(x) = \widetilde{\boldsymbol{\varphi}}(x),$$

где $\boldsymbol{f}(x) = \left(f^{(1)}(x), \ldots, f^{(m)}(x) \right)$, $\boldsymbol{B}$ – матрица определителя Вандермонда

$$\|\boldsymbol{B}\| = \begin{vmatrix} 1 & \ldots & 1 \\ b^{(1)} & \ldots & b^{(k)} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ (b^{(1)})^{m-1} & \ldots & (b^{(k)})^{m-1} \end{vmatrix} = \prod_{1 \leqslant j < i \leqslant m} (b^{(i)} - b^{(j)}) \neq 0, \qquad (3.6)$$

$\widetilde{\boldsymbol{\varphi}}(x)$ – вектор-функция, состоящий из элементов вектора-функции $\boldsymbol{\varphi} = \left(\varphi^{(0)}(x), \ldots, \varphi^{(m-1)} \right)(x)$, где $\widetilde{\boldsymbol{\varphi}}(x) = \left(\varphi^{(0)}(x), -1(\varphi^{(1)}(x) - ad\varphi^{(0)}(x)), \right.$ $\varphi^{(2)}(x) - a^2 d^2 \varphi^{(0)}(x) - a A_2^1 d \left(\varphi^{(1)}(x) - ad\varphi^{(0)}(x) \right), \ldots, (-1)^{m-1} \left[\varphi^{(m-1)}(x) \right.$ $-a^{m-1} d^{m-1} \varphi^{(0)}(x) - \ A_{m-1}^1 d^{m-2} \left(\varphi^{(1)}(x) - ad\varphi^{(0)}(x) \right) - \ldots - A_{m-1}^{m-2} ad \times$ $\left. \times \left(\varphi^{(m-2)}(x) - \ldots \right) \right] \Big)$.

Решая систему (3.5) находим функции $f^{(k)}(x)$, которые определяются формулой

$$f^{(k)}(x) = \frac{1}{\|\boldsymbol{B}\|} \|\boldsymbol{B}^{(k)}(\widetilde{\boldsymbol{\varphi}}(x))\| =$$

$$= \frac{1}{\|\boldsymbol{B}\|} \begin{vmatrix} 1 & \ldots & 1 & \widetilde{\varphi}^{(0)}(x) & 1 & \ldots & 1 \\ b^{(1)} & \ldots & b^{(k-1)} & \widetilde{\varphi}^{(1)}(x) & b^{(k+1)} & \ldots & b^{(m)} \\ \ldots & \ldots & \ldots & & & & \\ (b^{(1)})^{m-1} & \ldots & (b^{(k-1)})^{m-1} & \widetilde{\varphi}^{(m-1)}(x) & (b^{(k+1)})^{m-1} & \ldots & (b^{(m)})^{m-1} \end{vmatrix}$$

Обозначим через $C^p(\mathbb{R})$ множество непрерывных и непрерывно дифференцируемых до порядка p включительно функций, заданных на всем множестве действительных чисел $\mathbb{R}$.

Теорема 1. *Если функции $\varphi^{(k)}$ принадлежат $C^{2m-1-k}(\mathbb{R})$, $k = \overline{0, m-1}$, уравнение (3.1) является не строго гиперболическим и для коэффициентов его выполняется условие 1, то для задачи Коши (3.1), (2.2) существует единственное решение $u : \mathbb{R}^2 \supset Q \supset (t,x) \to u(t,x) \subset \mathbb{R}$ из класса $C^m(\overline{Q})$ и оно определяется формулой*

$$u(t,x) = \frac{1}{\|\boldsymbol{B}\|} \sum_{k=1}^{m} e^{-b^{(k)}t} \|\boldsymbol{B}^{(k)}(\widetilde{\varphi}(x+at))\|. \tag{3.7}$$

Если в рассматриваемой задаче Коши гиперболическое уравнение (2.1) является неоднородным, то этот случай сводится к рассмотренной задаче (3.1), (2.2) [2].

Для этого используется вспомогательная задача

$$\prod_{k=1}^{m} \left(\partial_t - a\partial_x + b^{(k)}\right) w(t,\tau,x) = 0, \tag{3.8}$$

$$\partial_t^j w(0,\tau,x) = 0, \quad j = \overline{0, m-2}, \quad \partial_t^{m-1} w(0,\tau,x) = f(\tau,x). \tag{3.9}$$

Решение задачи Коши (3.8), (3.9) $w(t,\tau,x)$ определяется формулой

$$w(t,\tau,x) = \sum_{k=1}^{m} e^{-b^{(k)}t} f(\tau, x+at) \left(\prod_{i=1, i\neq k}^{m} (b^{(k)} - b^{(i)}) \right)^{-1}. \tag{3.10}$$

Тогда функция

$$\widetilde{u}(t,x) = \sum_{k=1}^{m} \int_0^t e^{-b^{(k)}(t-\tau)} f(\tau, x + a(t-\tau)) \left(\prod_{i=1, i\neq k}^{m} (b^{(k)} - b^{(i)}) \right)^{-1} d\tau \tag{3.11}$$

будет решением уравнения (2.1), удовлетворяющем однородным начальным условиям

$$\partial_t^j \widetilde{u}(0,x) = 0, \quad j = \overline{0, m-1}. \tag{3.12}$$

Данное утверждение следует из (3.8) и (3.9).

Объединяя результат теоремы 1 и решение (3.11), удовлетворяющее условиям Коши (3.12), получим решение задачи (2.1), (2.2). Результат сформулируем в виде теоремы.

Теорема 2. *Если функции $\varphi^{(k)}$ принадлежат множеству $C^{2m-1-k}(\mathbb{R})$, $k = \overline{0, m-1}$, функция f – множеству $C^{m-1}(\mathbb{R})$, уравнение (2.1) является не строго гиперболическим (характеристики имеют кратность m), выполняется условие 1, то для задачи Коши (2.1), (2.2) существует единственное классическое решение u из множества $C^m(\overline{Q})$, которое определяется формулой*

$$u(t,x) = \frac{1}{\|\boldsymbol{B}\|}\sum_{k=1}^{m} e^{-b^{(k)}t}\|\boldsymbol{B}^{(k)}(\widetilde{\boldsymbol{\varphi}}(x+at))\| +$$

$$\sum_{k=1}^{m}\int_0^t e^{-b^{(k)}(t-\tau)} f(\tau, x+a(t-\tau)) \left(\prod_{i=1, i\neq k}^{m}(b^{(k)}-b^{(i)})\right)^{-1} d\tau.$$

Список литературы

[1] Корзюк В.И., Козловская И.С. *Решение задачи Коши для гиперболического уравнения для однородного дифференциального оператора в случае двух независимых переменных* // Доклады НАН Беларуси. 2011. Т. 55, № 5. С. 9–13.

[2] Корзюк В.И., Козловская И.С. *Решение задачи Коши для гиперболического уравнения с постоянными коэффициентами в случае двух независимых переменных* // Дифференц. уравнения. 2012. Т. 48, № 5. С. 700–709.

[3] Tran, Duc Van / The characteristic method and its generalizations for first-order nonlin-ear partial differential equations / Tran Duc Van, Mikio Tsuji, Nguen Duy Thai Son. – CHAPMAN & HALL/CRC. Monographs and Surveys in Pure and Applied Mathemat-ics; 101. Boca Raton–London–New York–Washington, D.C. 2000. 237 p.

[4] Петровский И. Г. *Uber das Cauchysche Problem fur System von partiellen Differential gleichungen* // Математ. сб. 1937. № 2(44). С. 815–870.

[5] Петровский И. Г. Sur l'analyticite des solutions des systemes d'equations differentielles

[6] Torchinsky A. *The Fourier transform and the wave equation.* arXiv: 0904.3252v1 [math.AP] 21 Apr. 2009.

[7] Мамадалиев Н. К. *О представлении решения видоизмененной задачи Коши* // Сибирский математический журнал. 2000. Т. 41, № 5. С. 1087–1097.

[8] Kragler R. *The Method of Inverse Differential Operators Applied for the Solution of PDEs* // Gadomski L., Jakubiak M., Prokopenya A.N. (Eds.) Computer Algebra Systems in Teaching and Research. Differential Equations, Dynamical Systems and Celestial Mechanics. Siedlce. 2011. P. 79–95.