

МЕТОДЫ ПАРАМЕТРИЗАЦИИ В ЗАДАЧАХ ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ

В. В. ДИКУСАР (МОСКВА, РОССИЯ), М. ВУЙТОВИЧ (РАДОМ, ПОЛЬША)

dikussar@yandex.tu

Предложен двухэтапный метод решения задач оптимального управления со смешанными ограничениями. На первом этапе решается дискретная задача (системы линейных алгебраических уравнений (СЛАУ) и несобственные задачи линейного программирования (ЛП)) на основе методов факторного анализа. Далее формулируется гипотеза о геометрии оптимальной траектории, то есть выделяются промежутки времени постоянства множества номеров активных ограничений. На втором этапе сформулированная гипотеза проверяется аналитически с использованием принципа максимума Понтрягина и формализма Дубовицкого–Милютина. Приведены примеры использования данной схемы для решения модельных задач оптимального управления выбором портфеля ценных бумаг и внешним долгом. Предложен способ регуляризации вырожденного принципа максимума. Экстремум ищется в классе кусочно-непрерывных управлений. К указанному классу относятся также параметры сформулированных задач.

Задача динамического портфеля. Математическая модель динамики рынка ценных бумаг имеет вид [1] (задача A_0)

$$\dot{V} = Q, \quad \dot{F} = R, \quad \dot{S} = -\rho_0 V + \rho F + Q - R, \quad t \in [0, T], \quad (1)$$

а ограничения на управления и фазовые координаты соответственно

$$Q_1 \leq Q(t) \leq Q_2, \quad R_1 \leq R(t) \leq R_2, \quad t \in [0, T], \quad (2)$$

$$V(t) \geq 0, \quad F(t) \geq 0, \quad S(T) \geq 0, \quad t \in [0, T]. \quad (3)$$

Требуется найти $\max S(T)$ с учетом ограничений (??)–(??) при нулевых начальных и граничных условиях

$$V(0) = 0, \quad F(0) = 0, \quad S(0) = 0, \quad V(T) = 0, \quad F(T) = 0. \quad (4)$$

Здесь $F(t)$ – объем портфеля ценных бумаг, $V(t)$ – величина задолженности банку по кредиту, $S(t)$ – остаток средств на счете операции, $Q(t)$ – скорость изменения объема средств, использованных по кредитной линии, $R(t)$ – скорость изменения объема портфеля ценных бумаг, ρ_0 – скорость выплат по кредиту, ρ – скорость получения дивидендов; $R(t)$, $Q(t)$ – управляющие функции; $V(t)$, $F(t)$, $S(t)$ – фазовые переменные.

Теорема 1. *Решение задачи A_0 существует и единственно.*

В работе [1] задача A_0 решалась за счет редуцирования к задаче линейного программирования путем интегрирования системы (??) явным методом Эйлера. При заданной точности вычислений за счет мелкости разбиения отрезка $[0, T]$ получалась задача ЛП большой размерности. При этом возникали две основные проблемы:

1. Поиск оптимального решения за приемлемое время.
2. Некорректность задачи ЛП.

Для поиска оптимального решения применим метод продолжения решений по параметру. Разобьем отрезок интегрирования $[0, T]$ на ряд вложенных отрезков

$$[0, t_1] \subset [0, t_2] \subset \dots \subset [0, t_m], \quad t_m = T. \quad (5)$$

На отрезке $[0, t_1]$ проведем дискретизацию задачи (??) на базе явного метода Эйлера. Так как отрезок $[t_0, t_1]$ мал, то в результате получим задачу ЛП небольшой размерности. Для этой задачи выполнены условия (??)

$$V(0) = 0, \quad F(0) = 0, \quad S(0) = 0, \quad V(t_1) = 0, \quad F(t_1) = 0, \quad S(t_1) \rightarrow \max.$$

Отметим, что решение задачи A_0 для $T = t_1$ всегда существует и единственно. В результате решения получим оптимальное управление $u_{10} = (Q_{10}, R_{10})$. Далее используем полученное решение в качестве первого приближения для решения задачи A_0 для отрезка $[0, t_2]$. Этот процесс можно продолжить вплоть до $t_m = T$. Заметим, что оптимальное решение, полученное на предыдущем отрезке, является допустимым на последующем расширенном отрезке.

Теорема 2. *Принцип максимума для задачи A_0 является тривиальным.*

Для получения содержательного принципа максимума вместо системы (??) рассмотрим возмущенную систему (задача A_1)

$$\dot{V} = Q - \alpha V, \quad \dot{F} = R, \quad \dot{S} = -\rho_0 V + \rho F + Q - R, \quad \alpha > \rho_0, \quad t \in [0, T]. \quad (6)$$

Все остальные ограничения (??)–(??) считаются без изменений.

Справедливы следующие теоремы.

Теорема 3. *Пусть $\alpha > \rho_0$. Тогда для задачи A_1 справедлив нетривиальный принцип максимума в форме Дубовицкого–Милютина [2].*

Теорема 4. Пусть $\alpha > \rho_0$. Тогда значения функционалов $S_0(T)$ и $S_1(T)$ для задач A_0 и A_1 асимптотически совпадают.

Принцип максимума Π_0 [2] редуцирует исходную задачу A_1 к краевой задаче по выбору $\psi_V(0)$ и $\psi_F(0)$ таким образом, чтобы удовлетворить краевым условиям (??). Здесь ψ_V и ψ_F — сопряженные переменные.

Положим $T = t_1$ (1.5) и на отрезке $[0, t_1]$ решим краевую задачу A_1 . При этом получим $\psi_{V_1} = \psi_V(0)$, $\psi_{F_1} = \psi_F(0)$. Используем полученные значения ψ_{V_1} и ψ_{F_1} для решения краевой задачи A_1 на $[0, t_2]$ в качестве первого приближения. Методы прогнозирования по накопленной информации позволяют вычислить последующие приближения для ψ_{V_i} и ψ_{F_i} на отрезке $[0, t_i]$, $i = \overline{2, m}$. В качестве экстраполяции наиболее приемлемыми оказались ортогональные полиномы Чебышева [3].

Теорема 5. Для задачи A_1 существуют нерегулярные точки.

Решение краевой задачи с закрепленным правым концом.
Рассматривается краевая задача

$$\dot{x} = f(x, t), \quad x(T) = B, \quad t \in [0, T], \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad f \in \mathbb{R}^n. \quad (7)$$

Требуется выбрать

$$x(0) = A, \quad A = (a_1, \dots, a_n), \quad (8)$$

таким образом, чтобы удовлетворить краевым условиям (??). Предполагается, что краевая задача (??), (??) имеет единственное решение.

Введем функционал

$$F(T, A) = \sum_{i=1}^n (x_i(t) - b_i)^2, \quad B = (b_1, \dots, b_n). \quad (9)$$

Минимум функционала $F(T, A)$ (??) на множестве начальных значений $x_0 = A$ и решений дифференциального уравнения (??) определяет решение краевой задачи (??), (??). Разобьем теперь отрезок интегрирования на ряд вложенных отрезков

$$[0, t_1] \subset [0, t_2] \subset \dots \subset [0, T]. \quad (10)$$

На отрезке $[0, t_1]$ определим функционал вида (??)

$$F(t_1, A) = \sum_{i=1}^n (x_i(t_1) - b_i)^2. \quad (11)$$

Далее на $[0, t_2]$ рассматривается минимум функционала (??) с заменой t_1 на t_2 . Указанный процесс можно продолжить до момента $t = T$.

При применении метода Ньютона по поиску нулей функции $F'(A)$ необходимо вычислять элементы матрицы Гессе. Накопленная информация при продолжении позволяет оценить первые и вторые производные матрицы Гессе

$$\frac{\partial F}{\partial a_i} = F'_t \frac{dt}{da_i}, \quad \frac{\partial^2 F}{\partial a_i^2} = [F''_{tt}(a_i)'_t - f'_t(a_i)''_{tt}] \left[\frac{dt}{da_i} \right]^3. \quad (12)$$

Аналогичным образом вычисляются смешанные вторые производные.

Параметрическая форма дает возможность выбрать метод интерполяции. Наиболее эффективным оказался метод ортогональных функций в форме Чебышева (полиномы Чебышева).

Итерационный процесс строится по формуле

$$x_{k+1} = x_k + (E - \lambda_k B_k)^{-1} B_k A_k \Phi(x_k), \quad (13)$$

$A_k = \mu_k [\Phi'(x_k)]^*$, $B_k = -[A_k \Phi'(x_k) \Phi(x_k)]$, $\Phi(x_k) = F'(x_k)$, λ_k , μ_k – параметры метода [2]. Формула (??) представляет собой непрерывный аналог метода Ньютона.

В случае плохо обусловленной матрицы Гессе применяются методы интегрирования жестких систем [3]. Регуляризация метода Ньютона приводит к сингулярно возмущенным системам. Такая система решается за счет сингулярного разложения матрицы линейной системы. Для нахождения истинных корней используется полярное разложение матрицы Якоби.

Модель внешнего долга.

Обозначения для количественных характеристик системы.

$x_i(t)$, $i = 1, 2$, – фондовооруженность труда в i -м секторе;

$y_i(t)$, $i = 1, 2$, – производительность труда в i -том секторе;

$\mu_i(t)$, $i = 1, 2$, – коэффициенты амортизации фондов в i -том секторе;

$u_1(t)$ – поток внешних инвестиций в первый сектор;

$u_2(t)$ – поток фондообразующей продукции из второго сектора в первый;

$u_3(t)$ – поток внешних инвестиций во второй сектор;

$u_4(t)$ – поток фондообразующей продукции второго сектора, направленный на собственное развитие;

u_5 – поток импорта потребительских товаров (постоянен);

$e_1(t)$ – поток экспорта первого сектора;

$\alpha_i(t)$, $i = 1, 2$, – доля потребления продукции первого сектора
в соответствующих отраслях;

$c_2(t)$ – поток продукции, направленный на неинвестиционное потребление;

μ_3 – коэффициент, учитывающий необходимость обслуживания внешнего долга;

ν – коэффициент, служащий для сопоставления внутренних и внешних цен;

$x_3(t)$ – внешний долг в момент времени t .

Динамические соотношения системы. Предполагается, что связь между фондовооруженностью труда $x_i = x_i(t)$, $i = 1, 2$, и его производительностью $y_i = y_i(t)$ определяется в секторе i функцией вида

$$y_i = f_i(x_i), \quad i = 1, 2, \quad (14)$$

где $f_i(x_i)$ удовлетворяют неоклассическим условиям

$$f'_i(x_i) > 0, \quad f''_i(x_i) < 0, \quad i = 1, 2.$$

Динамика фондовооруженности в i -ом секторе задана уравнением

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= -\mu_1 x_1 + u_1 + u_2, \\ \dot{x}_2 &= -\mu_2 x_2 + u_3 + u_4. \end{aligned} \quad (15)$$

Уравнения баланса продукции для секторов имеют вид

$$f_1(x_1) = e_1(t) + \alpha_1 f_1(x_1) + \alpha_2 f_2(x_2), \quad (16)$$

$$f_2(x_1) = u_2 + u_4 + c_2(t). \quad (17)$$

Для внешнего долга можно записать

$$\dot{x}_3 = -\mu_3 x_3 + u_1 + u_3 + u_5 - \nu e_1(t). \quad (18)$$

Ограничения на фазовые переменные и управления системы. Предполагается, что поток потребления не может быть меньше некоторого минимального значения

$$u_5 + c_2(t) > c_{\min}, \quad t \in [0, T]. \quad (19)$$

Кроме того, уровень фондовооруженности во втором секторе не должен падать ниже некоторого критического уровня

$$x_2(t) \geq x_{2\min}, \quad t \in [0, T]. \quad (20)$$

Смысл ограничения (??) состоит в том, что падение фондовооруженности в этом секторе ниже указанного критического уровня означает деиндустриализацию государства и утрату технологической независимости.

Значение внешнего долга не может превышать некоторого порогового уровня, за которым следует финансовое банкротство страны:

$$x_3(t) \leq x_{3\max}, \quad t \in [0, T]. \quad (21)$$

Начальное состояние системы известно:

$$x_1(0) = x_{10}, \quad x_2(0) = x_{20}, \quad x_3(0) = x_{30}. \quad (22)$$

Целевая функция. Рассматривается задача о минимизации внешнего долга при наличии ограничений (??)–(??), т. е.

$$x_3(T) \rightarrow \min, \quad (23)$$

и заданных краевых условиях

$$x_1(T) = x_{11}, \quad x_2(T) = x_{21}. \quad (24)$$

Общая формулировка задачи. Для приближенного решения задачи (??)–(??) примем следующие зависимости:

$$\begin{aligned} f_1(x_1) &= \gamma_1 x_1, & x_1(t) &\leq a_1, \\ f_2(x_2) &= \gamma_2 x_2, & x_2(t) &\leq a_2, \end{aligned} \quad (25)$$

где γ_1 , γ_2 , a_1 , a_2 являются константами. С учетом принятых предположений имеем (задача В):

– систему дифференциальных уравнений

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= -\mu_1 x_1 + u_1 + u_2, & \beta_1 &= \nu \gamma_1 (1 - \alpha_1), \\ \dot{x}_2 &= -\mu_2 x_2 + u_3 + u_4, & \beta_2 &= \nu \gamma_2 \alpha_2, \\ \dot{x}_3 &= \mu_3 x_3 + u_1 + u_3 + u_5 - \beta_1 x_1 + \beta_2 x_2; \end{aligned} \quad (26)$$

– фазовые ограничения типа неравенств

$$\begin{aligned} 0 &\leq x_1(t) \leq a_1, \\ x_{2\min} &\leq x_2(t) \leq a_2, \\ 0 &\leq x_3(t) \leq x_{3\max}; \end{aligned} \quad (27)$$

– смешанное ограничение типа равенства

$$u_2(t) + u_4(t) + c_2(t) = \beta_3 x_2(t); \quad (28)$$

- ограничения на управляющие функции типа неравенств

$$\begin{aligned} 0 \leq u_i(t) \leq u_{i1}, \quad i = \overline{1, 4}, \\ c_2 \geq c_{\min} - u_5; \end{aligned} \quad (29)$$

- начальные и краевые условия

$$x_1(0) = x_{10}, \quad x_2(0) = x_{20}, \quad x_3(0) = x_{30}, \quad (30)$$

$$x_1(T) = x_{11}, \quad x_2(T) = x_{21}. \quad (31)$$

Целевая функция

$$x_3(T) \rightarrow \min \quad (32)$$

при наличии ограничений (??)–(??).

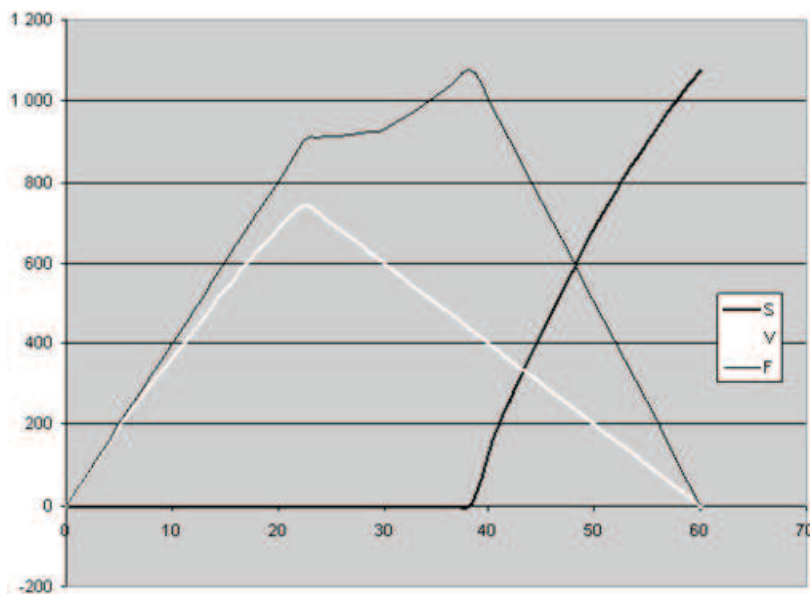


Рисунок 1

Теорема 6. *Решение задачи В существует и единственно в рамках определенных ограничений на параметры задачи.*

Теорема 7. *В задаче В существуют нерегулярные точки [2].*

При решении этой задачи проводилась дискретизация с использованием явных и неявных схем первого порядка точности. Получающиеся задачи ЛП решались с помощью программы “FACTOR”. Программа факторного анализа состоит из основной программы, специальной программы ввода DATA и пяти подпрограмм: CORRE, EIGEN, TRACE, LOAD и VARMX, модифицированной автором для работы

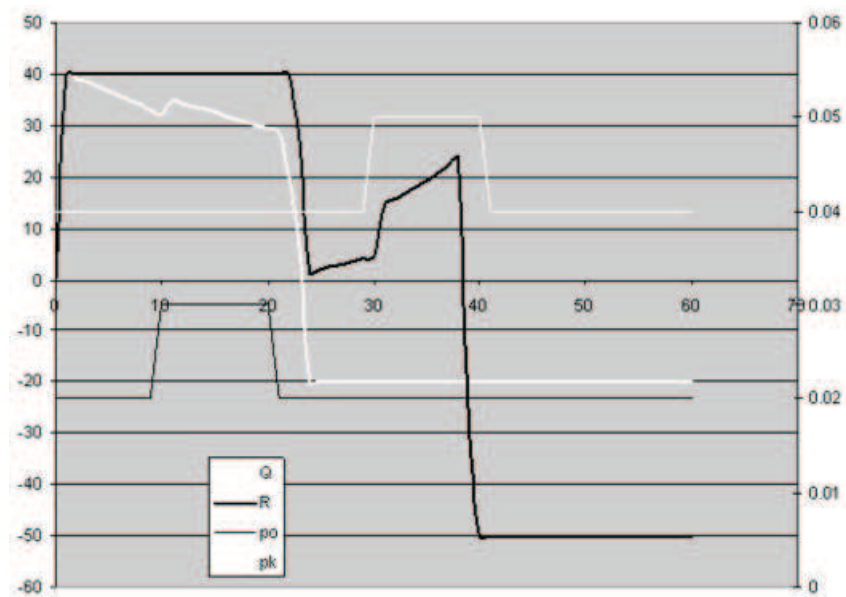


Рисунок 2

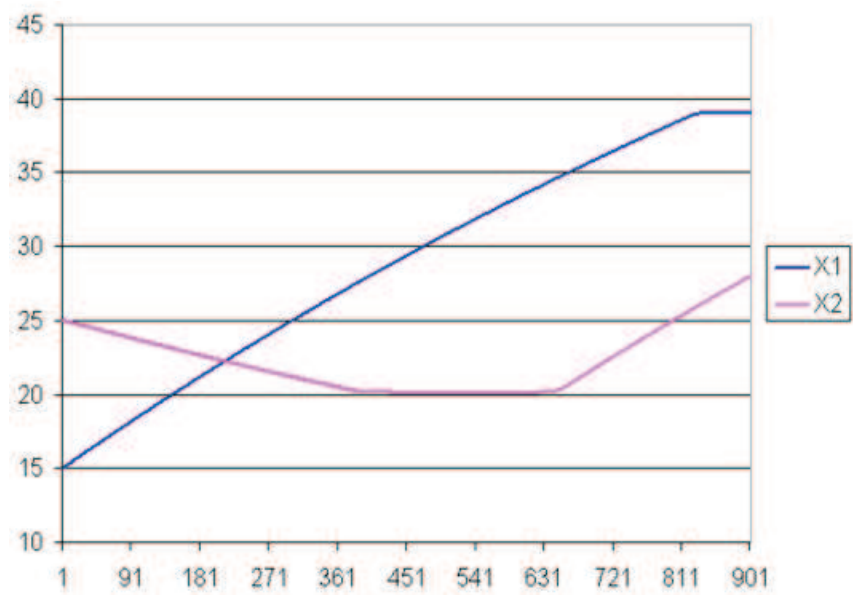


Рисунок 3

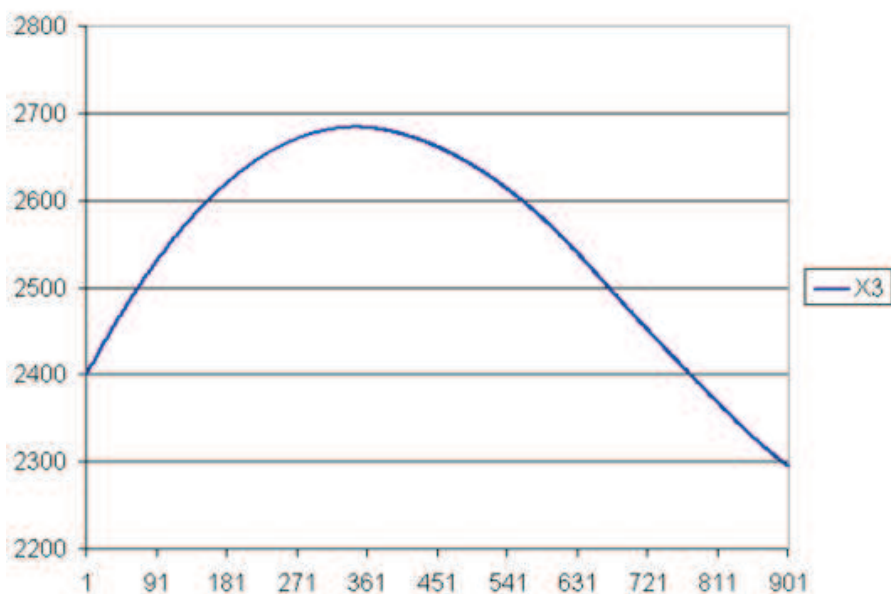


Рисунок 4

под платформой Win32 и позволяющей решать задачи ЛП с большим числом переменных. Данная программа позволяет удобно описывать и решать дискретные аппроксимации задач ОУ при большом числе точек дискретизации. Решение задачи ЛП показано на рисунках 1–4. Аналитическое решение для данных моделей построено на основе принципа максимума.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ. Коды проектов: N° 10-08-00624, N° 11-07-00201.

Список литературы

- [1] Умнов А.Е., Умнов Е.А., Чекарев Д.А. *Параметрический двухуровневый метод решения задач оптимального управления со смешанными ограничениями* // Моделирование процессов управления: Сб. ст. МФТИ. М., 2004. С. 68–73.
- [2] Дубовицкий А.Я., Милютин А.А. *Необходимые условия экстремума в некоторых линейных задачах со смешанными ограничениями* // Вероятностные процессы и управление. М.: Наука, 1978. С. 42–74.
- [3] Дикусар В.В., Кошья М., Фигура А. *Задачи оптимального управления при наличии ограничений общего вида*. М.: МФТИ, 2001.
- [4] Дикусар В.В., Шомполова О.И. *Применение факторного анализа для решения задач линейного программирования* // Тр. ИСА РАН. 2010. Т. 53(3), вып. 14. С. 142–153.
- [5] Вуйтович М., Шомполова О.И. *Факторный анализ* // Тр. ИСА РАН. 2010. Т. 53(3), вып. 14. С. 126–141.