

# НОРМАЛИЗАЦИЯ КВАДРАТИЧНОЙ ФОРМЫ ГАМИЛЬТОНИАНА ОГРАНИЧЕННОЙ ЗАДАЧИ ШЕСТИ ТЕЛ

Д. М. ДИАРОВА (АТЫРАУ, КАЗАХСТАН), Н. И. ЗЕМЦОВА (МОСКВА, РОССИЯ)

*ddiarova@mail.ru, zemni@yandex.ru*

В работе демонстрируется применение достаточно простого алгоритма нормализации по Биркгофу квадратичной формы гамильтониана, который сводится только к нахождению собственных векторов гамильтоновой системы и их нормировке.

Исследование устойчивости по Ляпунову стационарных решений ограниченной задачи  $n$  тел выполняется в рамках КАМ-теории [1,2], на основе теоремы Арнольда–Мозера. Для ее применения необходимо построить ряд канонических преобразований Пуанкаре–Биркгофа [3] гамильтониана, соответствующего данной задаче.

В частности, одно из преобразований состоит в нормализации квадратичной формы гамильтониана. Алгоритм такой нормализации, изложенный в [4] и используемый в исследованиях различных динамических моделей, предполагает решение системы линейных алгебраических уравнений

$$C_{16}z = 0,$$

где  $C_{16}$  – вырожденная матрица 16-го порядка, элементы которой определяются из гамильтоновой системы задачи довольно сложным образом.

На примере ограниченной задачи шести тел демонстрируется применение алгоритма нормализации квадратичной формы гамильтониана в случае простых чисто мнимых корней характеристического уравнения, предложенного в работе [5]. Применение этого алгоритма в конкретной задаче сводится только к нахождению собственных векторов гамильтоновой системы и их нормировке.

Рассматриваемая ограниченная задача шести тел состоит в исследовании движения тела с бесконечно малой массой в поле гравитации, создаваемом в пространстве  $P_0xyz$  взаимным притяжением тел  $P_0, P_1, P_2, P_3, P_4$  с массами  $m_0, m_1, m_2, m_3, m_4$  соответственно. Геометрически конфигурация задачи представляет собой ромб с телами  $P_1, P_2, P_3, P_4$  в вершинах, равномерно вращающийся с угловой скоростью  $\omega$  в плоскости  $z = 0$  вокруг центрального тела  $P_0$ . В работе [6] проведено качественное исследование этой задачи и в частности, показано, что она является двухпараметрической. Параметрами модели явля-

ются величины  $m_1$  – масса в одной из вершин ромба и  $\alpha$ - величина отношения диагоналей ромба.

Гамильтонова система, описывающая динамику в ограниченной задаче шести тел [6] имеет вид

$$\begin{aligned}\frac{dx}{dt} &= \frac{\partial h}{\partial p_x}, & \frac{dy}{dt} &= \frac{\partial h}{\partial p_y}, \\ \frac{dp_x}{dt} &= -\frac{\partial h}{\partial x}, & \frac{dp_y}{dt} &= -\frac{\partial h}{\partial y},\end{aligned}\tag{1}$$

где  $(x, y, p_x, p_y)$  – четырехмерное каноническое фазовое пространство лагранжевых координат и импульсов, а гамильтониан  $h$  выражается равенством

$$\begin{aligned}h(x, y, p_x, p_y) &= \frac{1}{2}(p_x^2 + p_y^2) + \omega(m_1, \alpha)(yp_x - xp_y) - \\ &- \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}} - m_1 \left( \frac{1}{\sqrt{x^2 + (y-1)^2}} + \frac{1}{\sqrt{(x+\alpha)^2 + y^2}} \right) - \\ &- m_2(m_1, \alpha) \left( \frac{1}{\sqrt{(x-\alpha)^2 + y^2}} + \frac{1}{\sqrt{x^2 + (y+1)^2}} \right).\end{aligned}$$

Далее будем рассматривать устойчивую в первом приближении стационарную точку с координатами

$$x^* = 0.238227..., \quad y^* = 0.971211..., \tag{2}$$

вычисленными при  $\alpha = 0.999985$  и  $m_1 = 0.0001$ .

Выполнив линеаризацию системы (1) в окрестности фазовой точки  $(x^*, y^*, p_{x^*} = -\omega y^*, p_{y^*} = \omega x^*)$ , получим гамильтонову систему 4-го порядка

$$\left( \frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}, \frac{dp_x}{dt}, \frac{dp_y}{dt} \right)^T = A(x, y, p_x, p_y)^T,$$

где матрица  $A$  имеет вид:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & \omega & 1 & 0 \\ -\omega & 0 & 0 & 1 \\ a' & b' & 0 & \omega \\ b' & c' & -\omega & 0 \end{bmatrix},$$

$$\begin{aligned}
a' &= m_0 \frac{2x^{*2} - y^{*2}}{(x^{*2} + y^{*2})^{5/2}} + m_1 \frac{2(x^* - \alpha)^2 - y^{*2}}{((x^* - \alpha)^2 + y^{*2})^{5/2}} + \\
&+ m_2 \frac{2x^{*2} - (y^* - 1)^2}{(x^{*2} + (y^* - 1)^2)^{5/2}} + m_1 \frac{2(x^* + \alpha)^2 - y^{*2}}{((x^* + \alpha)^2 + y^{*2})^{5/2}} + \\
&+ m_2 \frac{2x^{*2} - (y^* + 1)^2}{(x^{*2} + (y^* + 1)^2)^{5/2}}, \\
b' &= m_0 \frac{3x^* y^*}{(x^{*2} + y^{*2})^{5/2}} + 3m_1 \frac{(x^* - \alpha)y^*}{((x^* - \alpha)^2 + y^{*2})^{5/2}} + \\
&+ 3m_2 \frac{x^*(y^* - 1)}{(x^{*2} + (y^* - 1)^2)^{5/2}} + 3m_1 \frac{(x^* + \alpha)y^*}{((x^* + \alpha)^2 + y^{*2})^{5/2}} + \\
&+ 3m_2 \frac{x^*(y^* + 1)}{(x^{*2} + (y^* + 1)^2)^{5/2}}, \\
c' &= m_0 \frac{2y^{*2} - x^{*2}}{(x^{*2} + y^{*2})^{5/2}} + m_1 \frac{2y^{*2} - (x^* - \alpha)^2}{((x^* - \alpha)^2 + y^{*2})^{5/2}} + \\
&+ m_2 \frac{2(y^* - 1)^2 - x^{*2}}{(x^{*2} + (y^* - 1)^2)^{5/2}} + m_1 \frac{2y^{*2} - (x^* + \alpha)^2}{((x^* + \alpha)^2 + y^{*2})^{5/2}} + \\
&+ m_2 \frac{2(y^* + 1)^2 - x^{*2}}{(x^{*2} + (y^* + 1)^2)^{5/2}}.
\end{aligned}$$

Для стационарного решения (2) собственные значения матрицы линейного приближения  $A$  являются чисто мнимыми числами, равными  $\pm 0.99946i$ ,  $\pm 0.0321827i$ , и их частоты  $\sigma_1 = 0.99946$ ,  $\sigma_2 = 0.0321827$ , а угловая скорость  $\omega = 1.00004$ .

Выполним степенное разложение гамильтониана  $h$  в ряд Тейлора с точностью до четырех степеней координат и импульсов в окрестности стационарной точки (2). Полученный гамильтониан  $H$  имеет вид

$$\begin{aligned}
H &= H_2(x, y, p_x, p_y) + H_3(x, y) + H_4(x, y) + \dots, \\
H_2 &= 0.414745x^2 - 0.914839y^2 + 0.5(p_x^2 + p_y^2) - \\
&- 0.694021xy + 1.00004(yp_x - xp_y), \\
H_3 &= -0.323075x^3 + 0.833487y^3 - 1.04368x^2y + 1.32724xy^2, \\
H_4 &= -0.178065x^4 - 0.730939y^4 + 1.5077x^3y + \\
&+ 1.59978x^2y^2 - 2.0855xy^3.
\end{aligned}$$

Необходимо преобразовать квадратичную форму  $H_2$  к нормальной форме по Биркгофу:

$$K_2 = \frac{1}{2}\sigma_1(q_1^2 + p_1^2) - \frac{1}{2}\sigma_2(q_2^2 + p_2^2). \quad (3)$$

Переход к новым переменным  $q_1, q_2, p_1, p_2$  зададим в виде матричного равенства

$$(x, y, p_x, p_y)^T = B(q_1, q_2, p_1, p_2)^T. \quad (4)$$

Далее изложим алгоритм построения матрицы  $B$ , состоящий из восьми пунктов, в виде инструкций системы *Mathematica* [7].

1. Ищем собственные значения и собственные векторы матрицы  $A$  с помощью команды системы *Mathematica*:

```
res = Eigensystem [A]
{{ {1.38737 × 10-16 + 0.99946 i, 1.38737 × 10-16 - 0.99946 i,
-1.66534 × 10-16 + 0.0321827 i, -1.66534 × 10-16 - 0.0321827 i},
{ {0.739693 + 0. i, -0.134084 + 0.386202 i, 0.134089 + 0.353078 i,
0.353726 - 0.134011 i}, {0.739693 + 0. i, -0.134084 - 0.386202 i,
0.134089 - 0.353078 i, 0.353726 + 0.134011 i},
{0.686884 + 0. i, -0.168403 + 0.0156187 i, 0.168409 + 0.00648654 i,
0.686406 - 0.00541966 i}, {0.686884 + 0. i, -0.168403 - 0.0156187 i,
0.168409 - 0.00648654 i, 0.686406 + 0.00541966 i}}}}
```

2. Определим следующую матрицу:

$$\mathbf{II} = \begin{pmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{1} \\ -\mathbf{1} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & -\mathbf{1} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{pmatrix};$$

3. Вычислим множители  $\chi_1, \chi_2$ , обеспечивающие симплектичность матрицы преобразования (4), по следующей формуле:

$$\chi_k = \frac{1}{\sqrt{|(r_k, IIs_k)|}}, \quad k = 1, 2,$$

где  $e_k = r_k + is_k$  - собственный вектор, соответствующий собственному значению  $i\sigma_k$ :

```
r[k_] := Table[Re[e[k][[i]]], {i, 1, 4}];
s[k_] := Table[Im[e[k][[i]]], {i, 1, 4}];
k[1] = 1 / (Abs[r[1] . (II . s[1])]) ^ (1 / 2)
k[2] = 1 / (Abs[r[2] . (II . s[2])]) ^ (1 / 2)
2.6488
13.6684
```

4. Вычислим множители  $\delta_1, \delta_2$  для выбора знаков в нормальной форме (3) с помощью формулы:

$$\delta_k = \text{sign}(r_k, IIs_k), \quad k = 1, 2.$$

```

δ[1] = Sign[r[1].(II.s[1])]
δ[2] = Sign[r[2].(II.s[2])]

1

-1

```

5. Определим матрицу  $B$  преобразования (4) с элементами  $-\chi_k s_k$  для столбцов  $k = 1, 2$  и с элементами  $\delta_k \chi_k r_k$  для столбцов  $2+k, k = 1, 2$ :

```

B = Transpose[{-k[1] s[1], -k[2] s[2], δ[1] k[1] r[1],
               δ[2] k[2] r[2]}}];
MatrixForm[B]

```

$$\begin{pmatrix} 0. & 0. & 1.9593 & -9.38863 \\ -1.02297 & -0.213483 & -0.355162 & 2.3018 \\ -0.935233 & -0.0886608 & 0.355174 & -2.30188 \\ 0.35497 & 0.0740782 & 0.93695 & -9.38209 \end{pmatrix}$$

6. Выполним замену переменных (4):

```

X = B[[1]].{q1, q2, p1, p2};
Y = B[[2]].{q1, q2, p1, p2};
Px = B[[3]].{q1, q2, p1, p2};
Py = B[[4]].{q1, q2, p1, p2};

```

7. Получаем преобразованную квадратичную форму  $H_2$  в каноническом виде:

```

K2 = Expand[H2];
K2 = Select[K2, Abs[#[[1]]] > 10-5 &]
1/2 (Coefficient[K2, p12] * 2 p12 + Coefficient[K2, q12] * 2 q12) +
1/2 (Coefficient[K2, p22] * 2 p22 + Coefficient[K2, q22] * 2 q22)
0.49973 p12 - 0.0160913 p22 + 0.49973 q12 - 0.0160913 q22

1/2 (0.99946 p12 + 0.99946 q12) + 1/2 (-0.0321827 p22 - 0.0321827 q22)

```

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ, проект № 10-01-00283.

#### Список литературы

- [1] Арнольд В.И. *Об устойчивости положений равновесия гамильтоновой системы обыкновенных дифференциальных уравнений в общем эллиптическом случае* // ДАН СССР. 1961. Т.137, № 2. С. 255–257.
- [2] Мозер Ю. *Лекции о гамильтоновых системах*. М.: Мир, 1973.
- [3] Биркгоф Дж. Д. *Динамические системы*. Ижевск: Изд. дом "Удмуртский университет", 1999.
- [4] Гребеников Е.А., Козак Д., Якубяк М. *Методы компьютерной алгебры в проблеме многих тел*. Москва: Изд-во РУДН, 2002.

- [5] Маркеев А.П. *Линейные гамильтоновы системы и некоторые задачи об устойчивости движения спутника относительно центра масс.* Ижевск, НИЦ "Регулярная и хаотичная динамика", Институт компьютерных исследований, 2009.
- [6] Zemtsova N.I. *Stability of the stationary solutions of the differential equations of restricted Newtonian problem with incomplete symmetry.* Kiev. // Nonlinear Dynamics and Systems Theory. 2003. Vol. 3, no. 1. P. 105–116.
- [7] Дьяконов В. П., *Mathematica в математических и научно-технических расчетах.* Москва: СОЛОН-Пресс, 2004.