

О ЕДИНСТВЕННОСТИ УСТОЙЧИВОГО ПРЕДЕЛЬНОГО ЦИКЛА ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМ С НЕЛИНЕЙНОСТЯМИ ТРЕТЬЕЙ И ПЯТОЙ СТЕПЕНИ

В. С. ДЕНИСОВ (ВИТЕВСК, БЕЛАРУСЬ)

Рассматриваются системы уравнений

$$\frac{dx}{dt} = Ay^3 + By + f(x), \quad \frac{dy}{dt} = g(x) \quad (A > 0, B > 0), \quad (1)$$

$$\frac{dx}{dt} = Ay^5 + By + f(x), \quad \frac{dy}{dt} = g(x) \quad (A > 0, B > 0). \quad (2)$$

При $A = 0$, $B = 1$ получается система нелинейных колебаний (или система Лъенара). Система Лъенара широко изучалась на предмет существования, единственности предельного цикла, оценки числа предельных циклов, их расположения. Однако, из-за отсутствия до настоящего времени общих методов отыскания и локализации предельных циклов, исследования ведутся для различных специальных классов систем, различными методами и в различных направлениях. В монографиях [8, 10] приведены результаты Лефшеца, Левинсона – Смита, Драгилева, Филиппова и многих других авторов. Имеющимся подходам и достигнутым результатам посвящены также обзорные статьи [11, 12]. Так, например, в [10] обсуждаются вопросы существования устойчивого предельного цикла, его единственности для системы Лъенара (и некоторых других систем) с одной особой точкой. В работах Ллойда, Линка и др. (например, [13]) рассматриваются малоамплитудные предельные циклы систем типа Лъенара и оценивается их число в зависимости от степеней многочленов $f(x)$ и $g(x)$. В [13] отмечается, что вопрос о связи между локальными и глобальными результатами до сих пор открыт и представляет интерес для рассмотрения. В работе [12] особо обсуждается метод, использующий функции Дюлака–Черкаса.

Источником наших исследований, в основе которых лежит классический подход Пуанкаре–Ляпунова, были, в частности, работы Кушкова [1,2], в которых он доказал ряд теорем о существовании предельных циклов системы Лъенара и дал условия существования двух предельных циклов этой системы. Отметим, что в работе [2] им была доказана единственность устойчивого предельного цикла, охватывающего неустойчивый. То есть основное внимание уделяется не оценке числа предельных циклов, а их существованию, взаимному расположению и

локализации. Автором настоящей работы в оценки, фигурирующие в условиях теорем, был введен параметр γ , использование которого позволило в работах [3, 4] получить более общие результаты. При этом теоремы Кушкова получаются при значении параметра $\gamma = 2$. В [3] приведен пример конкретной системы, показывающий, что обобщение существенно. Отметим также, что в наших исследованиях $f(x)$ и $g(x)$, как и в работах Кушкова, не обязательно являются многочленами. В статье [5] были найдены достаточные условия единственности устойчивого предельного цикла системы Лъенара, охватывающего конечное число особых точек.

Исследования в этом направлении методами работ [2, 5, 8] были продолжены и для различных обобщенных систем Лъенара. В работе [6] доказана теорема существования по крайней мере двух предельных циклов системы (1). В данной статье для систем (1), (2) доказываем единственность устойчивого предельного цикла, окружающего по крайней мере один неустойчивый предельный цикл. Отметим также, что указывается область (вертикальная полоса), в которой расположен неустойчивый предельный цикл, что позволяет при практическом рассмотрении конкретных систем выбирать удобные начальные условия для изображения траекторий.

Пусть функции $f(x)$ и $g(x)$ определены, непрерывны, обеспечивают существование и единственность решений системы (1) и удовлетворяют условиям:

I. Функции $f(x)$ и $g(x)$ нечетные.

II. Существуют точки x_1, x_3 , такие что $f(0) = f(x_1) = f(x_3) = g(0) = 0$;

$f(x) < 0$ на $(0, x_1)$; $f(x) > 0$ на (x_1, x_3) ; $g(x) < 0$ на $(0, \infty)$.

Введем обозначения:

$$G(x) = \int_0^x -g(s) ds; \quad M = \max_{[-x_3; x_3]} |f(x)|; \quad \varphi(x) = \int_0^x -g(s)f(s) ds; \quad (3)$$

$$V(x, y) = \frac{Ay^4}{4} + \frac{By^2}{2} + G(x); \quad (4)$$

$$V(x, y) = \frac{Ay^6}{6} + \frac{By^2}{2} + G(x). \quad (5)$$

При $A > 0, B > 0$ каждое из уравнений $Ay^3 + By - u = 0$ и $Ay^5 + By - u = 0$ имеет один действительный корень. Будем обозначать его $y(u) = d_u$. В дальнейшем будем предполагать, что

III.

$$G(x) \rightarrow +\infty \quad \text{при} \quad x \rightarrow +\infty. \quad (6)$$

Лемма 1. Если выполнены условия I, II, III, то семейство кривых $V(x, y) = C$ обладает следующими свойствами:

1) симметричны относительно оси абсцисс, замкнуты и окружают начало координат;

2) кривая $V(x, y) = C_1$ ограничивает область, внутри которой находится кривая

$$V(x, y) = C_2, \quad \text{если} \quad C_1 > C_2.$$

Доказательство. Ординаты кривых $V(x, y) = C$, где $V(x, y)$ имеет вид (4), при фиксированном значении x находится по формуле

$$y = \pm \sqrt{\frac{-B + \sqrt{B^2 + 4A(C - G(x))}}{A}}. \quad (7)$$

Заменой $z = y^2$ уравнение $V(x, y) = C$, где $V(x, y)$ имеет вид (5), сводится к неполному кубическому уравнению $z^3 + pz + q = 0$, которое при $\left(\frac{p}{3}\right)^3 + \left(\frac{q}{2}\right)^2 > 0$ имеет, согласно [9], один действительный корень и два комплексно сопряженных. Находя действительный корень, получаем, что ординаты кривых уровня $V(x, y) = C$ в этом случае имеют вид

$$y = \pm \sqrt{\sqrt[3]{3(C - G(x))/A + \sqrt{Q}} + \sqrt[3]{3(C - G(x))/A - \sqrt{Q}}} \quad (8),$$

где

$$Q = B^3/A^3 + 9(C - G(x))^2/A^2.$$

Из вида ординат кривых $V(x, y) = C$ (7) и (8) следует, что при $C - G(x) > 0$ каждому значению x соответствуют две точки кривой $V = C$, симметричные относительно оси абсцисс. Если $C - G(x) = 0$, то такому значению x соответствует одна точка кривой уровня, расположенная на оси абсцисс. При $C - G(x) < 0$ формулами (7), (8) не определены действительные значения. Учитывая также свойство монотонного возрастания функции $G(x)$ и условие III, делаем заключение 1) леммы. Заключение 2) следует из того, что при увеличении модуль ординат кривых $V = C$ возрастает.

Лемма 2. Если выполнены условия I, II, то системы (1), (2) в полуплоскости $x > 0$ не имеют траекторий вида

$$x(t) \rightarrow c \ (c > 0), \ y(t) \rightarrow +\infty \ (y(t) \rightarrow -\infty) \ \text{при} \ t \rightarrow -\infty \ (t \rightarrow +\infty). \quad (9)$$

Доказательство. Если $x(t) \rightarrow c$ при $t \rightarrow -\infty$, то $\frac{dx}{dt} \rightarrow 0$. Если бы существовала траектория такая, что при этом $y(t) \rightarrow \infty$, то тогда бы из первого уравнения любой из рассматриваемых систем следовало, что $\frac{dx}{dt} \rightarrow \infty$. Полученное противоречие доказывает лемму.

Теорема 1. Если выполнены условия I, II, III и IV. $\exists \gamma > 1$, $\exists x_2 \in (x_1; x_3)$ такие, что выполнены неравенства

$$\varphi(x_2) \geq \frac{-4\varphi(x_1)}{(\gamma - 1)^2}, \quad (10)$$

$$G(x_3) - G(x_2) \geq \frac{A}{4}d^4 + \frac{B}{2}d^2 + 2Md, \quad d = d_{\gamma M}, \quad (11)$$

V.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (-f(x)) > 0, \ f'(x) < 0 \ \text{при} \ x \geq x_3 \quad (12)$$

то система (1) имеет по крайней мере один неустойчивый предельный цикл, лежащий в полосе $-x_3 \leq x \leq x_3$, и единственный устойчивый предельный цикл, охватывающий неустойчивый.

Доказательство. При $\gamma > 1$ из неравенства (10) следует выполнение условия (5) из работы [6]: $\varphi(x_2) \geq \frac{2\varphi(x_1)}{1-\gamma}$. Действительно,

$$\frac{-4\gamma\varphi(x_1)}{(\gamma - 1)^2} - \frac{2\gamma\varphi(x_1)}{1 - \gamma} = -2\varphi(x_1)\frac{1 + \gamma}{(\gamma - 1)^2} > 0,$$

так как $\varphi(x_1) < 0$ в силу условия II и определения функции $\varphi(x)$. Тогда все условия теоремы 2 работы [6] выполнены, то есть существование по крайней мере двух предельных циклов доказано. При этом устойчивый предельный цикл охватывает неустойчивый и имеет точки, расположенные вне полосы $-x_3 \leq x \leq x_3$.

Будем обозначать $y_{ji}^+ = y_j^+(x_i)$ – значения ординат траекторий $L_j(t)$ ($y = y_j(x)$) при $x = x_i$ в полуплоскости $y > 0$. Так же $y_{ji}^- = y_j^-(x_i)$ – значения ординат той же траектории при $y < 0$. Разность значений функции Ляпунова $V(x, y)$, определенной формулой (4), вдоль траектории $L_j(t)$ на отрезке $[a, b]$ будем обозначать как $V_j^+|_a^b$:

$$V_j^+|_a^b = V(b; y_j^+(b)) - V(a; y_j^+(a)) \ \text{при} \ y > 0.$$

Аналогично введем обозначение $V_j^-|_a^b$ при $y < 0$.

Из доказательства теоремы 1 работы [6] следует существование траектории $L(t)$, проходящей через точку $Q(x_2, d)$ такой, что полутраектория $L^-(t)$ пересечет ось ординат в точке $A(0, y^+(0))$, где $y^+(0) > d$, а полутраектория $L^+(t)$ пересекает изоклину бесконечности $Ay^3 + By + f(x) = 0$ при $x \leq x_3$ и затем выходит на ось ординат в точке $D(0, y^-(0))$, где $y^-(0) < -y^+(0) < -d$.

Выполнение условий рассматриваемой теоремы достаточно для отсутствия траекторий вида

$$x(t) \rightarrow +\infty, \quad y(t) \rightarrow b(\text{const}) \text{ при } t \rightarrow +\infty. \quad (13)$$

Действительно, при выполнении условия III кривые $V(x, y) = C$ заполняют всю плоскость. Производная функции $V(x, y)$ в силу системы (1) по аргументу t имеет вид

$$\frac{dV}{dt} = -f(x)g(x).$$

Из условий II и V следует, что $\frac{dV}{dt} < 0$ при $x > x_3$, и тогда любая полутраектория $L^+(t)$ находится в некоторой ограниченной области $V(x, y) \leq C_0$, то есть траектории вида (13) отсутствуют.

Рассмотрим две произвольные траектории $L_j(t)$ ($y = y_j(x)$, $j = 1, 2$), проходящие через точки $(x_3, y_j^+(x_3))$, для которых выполняются условия

$$y_2^+(x_3) > y_1^+(x_3) > 0.$$

Траектории $L_j(t)$ в силу поля направлений, заключений лемм 1, 2 и отсутствия траекторий вида (13) ведут себя аналогично траектории $L(t)$, то есть полутраектории $L_j^-(t)$ выходят на ось ординат при $y > 0$ в точках $A_j(0, y_j^+(0))$, где $y_2^+(0) > y_1^+(0) > d$, а полутраектории $L_j^+(t)$ выходят на ось ординат при $y < 0$ в точках $B_j(0, y_j^-(0))$, где $y_2^-(0) < y_1^-(0) < -d$. При этом на отрезке $[0; x_2]$ для ординат траекторий $L_j(t)$ выполнены неравенства $y_2^+(x) > y_1^+(x) \geq d$ и $y_2^-(x) < y_1^-(x) \leq -d$.

Производная функции $\psi(y) = Ay^3 + By$ по аргументу x вдоль интегральных кривых $L_j(t)$ имеет вид

$$\left. \frac{d}{dx} \psi(y) \right|_{y=y_j} = (3Ay_j^2 + B) \frac{g(x)}{Ay_j^3 + By_j + f(x)},$$

откуда получим следующую оценку:

$$\begin{aligned} & \frac{d}{dx} (\psi(y_1^+(x)) - \psi(y_2^+(x))) < \\ & < \frac{(3A(y_1^+)^2 + B)g(x)[A(y_2^+)^3 + By_2^+ - A(y_1^+)^3 - By_1^+]}{[A(y_1^+)^3 + By_1^+ + f(x)][A(y_2^+)^3 + By_2^+ + f(x)]}. \end{aligned}$$

В силу монотонного возрастания функции $\psi(y)$, отрицательности $g(x)$ и положительности ψ из последнего неравенства следует, что

$$\frac{d}{dx} (\psi(y_1^+(x)) - \psi(y_2^+(x))) < 0. \quad (14)$$

Производная функции $V(x, y)$ по аргументу x в силу системы (1) имеет вид

$$\frac{dV}{dx} = \frac{-f(x)g(x)}{Ay^3 + By + f(x)} = \frac{-f(x)g(x)}{\psi(y) + f(x)}. \quad (15)$$

Интегрируя равенство (15) вдоль траекторий $L_j(t)$ на отрезке $[0; x_1]$ в полуплоскости $y > 0$ и учитывая равенство

$$r = \psi(y_1^+(x_1)) - \psi(y_2^+(x_1)) = \min_{[0; x_1]} [\psi(y_1^+(x)) - \psi(y_2^+(x))],$$

являющееся следствием неравенства (14), находим оценку разности изменений функции $V(x, y)$ вдоль $L_j(t)$ на отрезке $[0; x_1]$ в полуплоскости $y > d$:

$$\begin{aligned} V_2^+|_0^{x_1} - V_1^+|_0^{x_1} &= \int_0^{x_1} \frac{-f(x)g(x)[\psi(y_1^+(x)) - \psi(y_2^+(x))]}{[\psi(y_2^+(x)) + f(x)][\psi(y_1^+(x)) + f(x)]} dx < \\ &< \frac{r\varphi(x_1)}{[\psi(y_2^+(x_1)) - M][\psi(y_1^+(x_1)) - M]}. \end{aligned} \quad (16)$$

Из неравенства (14) следует, что

$$r = \psi(y_1^+(x_1)) - \psi(y_2^+(x_1)) = \max_{[x_1; x_2]} [\psi(y_1^+(x)) - \psi(y_2^+(x))].$$

Интегрируя теперь равенство (15) вдоль траекторий $L_j(t)$ на отрезке $[x_1; x_2]$ в полуплоскости $y > 0$, получим оценку

$$V_2^+|_{x_1}^{x_2} - V_1^+|_{x_1}^{x_2} < \frac{r[\varphi(x_2) - \varphi(x_1)]}{[\psi(y_2^+(x_1)) + M][\psi(y_1^+(x_1)) + M]}. \quad (17)$$

Складывая неравенства (16) и (17) и учитывая неравенство (10), получим оценку разности изменений значений функции $V(x, y)$ вдоль траекторий $L_j(t)$ на отрезке $[0; x_2]$ в полуплоскости $y > d$:

$$V_2^+|_0^{x_2} - V_1^+|_0^{x_2} < r\varphi(x_1) \left[\frac{1}{(\gamma - 1)^2 M^2} - \frac{(\gamma + 1)^2}{(\gamma - 1)^2} \frac{1}{M^2 (\gamma + 1)^2} \right] = 0. \quad (18)$$

Аналогично доказывается неравенство для полуплоскости $y < -d$:

$$V_2^-|_{x_2}^0 - V_1^-|_{x_2}^0 < 0. \quad (19)$$

Далее, на отрезке $[x_2; x_3]$ сумма $Ay^3 + By + f(x)$ вдоль кривой $L_2^+(t)$ больше этой суммы вдоль кривой $L_1^+(t)$. Тогда, вычитая разность, полученную интегрированием равенства (15) вдоль $L_1^+(t)$, из разности, полученной таким же образом вдоль $L_2^+(t)$, получим оценку

$$V_2^+|_{x_2}^{x_3} - V_1^+|_{x_2}^{x_3} < 0. \quad (20)$$

Аналогично доказывается неравенство

$$V_2^-|_{x_3}^{x_2} - V_1^-|_{x_3}^{x_2} < 0. \quad (21)$$

Рассмотрим конечную область σ , ограниченную контуром l , состоящим из дуг траекторий $L_j(t)$ при $x \geq x_3$ и вертикальных отрезков $[N_2; N_1]$, $[M_1; M_2]$ прямой $x = x_3$, где $M_j(x_3; y_j^+(x_3))$, $N_j(x_3; y_j^+(x_3))$, $j = 1, 2$. Применим к этой области формулу Грина

$$\oint_l f(x) dy = \iint_\sigma f'(x) dx dy. \quad (22)$$

Вычисляя криволинейные интегралы по дугам траекторий $L_j(t)$ и по указанным выше вертикальным отрезкам прямой $x = x_3$, получим

$$\int_{M_1 N_1} f(x) dy = \int_{y_1^+(x_3)}^{y_1^-(x_3)} \left(-\frac{dV}{dy} \right) dy = V_1^+(x_3, y_1^+(x_3)) - V_1^-(x_3, y_1^-(x_3));$$

$$\int_{N_2 M_2} f(x) dy = \int_{y_2^-(x_3)}^{y_2^+(x_3)} \left(-\frac{dV}{dy} \right) dy = V_2^-(x_3, y_2^-(x_3)) - V_2^+(x_3, y_2^+(x_3));$$

$$\int_{M_2 M_1} f(x) dy = 0, \quad \int_{N_1 N_2} f(x) dy = 0,$$

так как $f(x_3) = 0$.

Складывая последние четыре равенства, получим:

$$\oint_l f(x) dy = [V_2^-(x_3, y_2^-(x_3)) - V_2^+(x_3, y_2^+(x_3))] - \\ - [V_1^-(x_3, y_1^-(x_3)) - V_1^+(x_3, y_1^+(x_3))].$$

Двойной интеграл в правой части равенства (22) отрицателен, так как подынтегральная функция по условию V (неравенство (12)) отрицательна. Тогда отрицательна и левая часть (22), а это означает, что

$$[V_2^-(x_3, y_2^-(x_3)) - V_2^+(x_3, y_2^+(x_3))] - \\ - [V_1^-(x_3, y_1^-(x_3)) - V_1^+(x_3, y_1^+(x_3))] < 0. \quad (23)$$

Складывая неравенства (18), (19), (20), (21) и (23), получим окончательную оценку

$$[V_2^-(0, y_2^-(0)) - V_2^+(0, y_2^+(0))] - [V_1^-(0, y_1^-(0)) - V_1^+(0, y_1^+(0))] < 0. \quad (24)$$

Так как $y = y_1(x)$ – любая траектория, а устойчивый предельный цикл существует, то можем считать теперь, что $y = y_1(x)$ – устойчивый предельный цикл. Тогда выполняется равенство $V(0, y_1^-(0)) = V(0, y_1^+(0))$. Из неравенства (24) при этом следует, что $V_2^-(0, y_2^-(0)) < V_2^+(0, y_2^+(0))$. В силу симметрии кривых $V = C$ относительно оси абсцисс выполняется неравенство $-y_2^-(0) < y_2^+(0)$, то есть интегральная кривая L_2 ($y = y_2(x)$) не может быть предельным циклом. Теорема доказана.

Теорема 2. Если выполнены условия I, II, III и IV. $\exists \gamma > 1$, $\exists x_2 \in (x_1; x_3)$ такие, что выполнены неравенства

$$\varphi(x_2) \geq \frac{2\varphi(x_1)}{1 - \gamma}, \quad (25)$$

$$G(x_3) - G(x_2) \geq \frac{A}{6} d^6 + \frac{B}{2} d^2 + 2Md,$$

где $d = d_{\gamma M}$ – действительный корень уравнения $Ay^5 + By - \gamma M = 0$ и

V.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (-f(x)) > 0,$$

то система (2) имеет по крайней мере один устойчивый предельный цикл, охватывающий по крайней мере один неустойчивый предельный цикл, расположенный в полосе $-x_3 \leq x \leq x_3$.

Если выполнены условия теоремы 2 и при этом вместо неравенства (25) выполнено неравенство

$$\varphi(x_2) \geq -\frac{4\varphi(x_1)}{(\gamma - 1)^2},$$

и $f'(x) < 0$ при $x \geq x_3$, то система (2) имеет по крайней мере один неустойчивый предельный цикл, лежащий в полосе $-x_3 \leq x \leq x_3$, и единственный устойчивый предельный цикл, охватывающий неустойчивый.

Доказательство существования предельных циклов проводится так же, как в работе [6]. При этом во всех оценках вместо функции $\psi(y) = Ay^3 + By$ будет участвовать функция $\psi(y) = Ay^5 + By$. Единственность устойчивого предельного цикла доказывается так же, как и в теореме 1.

Отметим, что в данной работе дано подробное изложение результатов, анонсированных в [7] и полученных для систем более общего вида

$$\frac{dx}{dt} = \psi(y) + f(x), \quad \frac{dy}{dt} = g(x),$$

где $\psi(y) = Ay^{4n-1} + By^{2n-1}$ или $\psi(y) = Ay^{6n-1} + By^{2n-1}$. Здесь рассмотрен частный случай $n = 1$. Исследование систем указанного вида с нелинейностями более высоких степеней проводится так же, как и для систем (1), (2).

Список литературы

- [1] Кушков, Н. Н. *Некоторые теоремы о предельных циклах для системы нелинейных колебаний* / Н. Н. Кушков // УМН. 1958. Т. 13, вып. 2 (80). С. 203–209.
- [2] Кушков, Н. Н. *О предельных циклах системы нелинейных колебаний* / Н. Н. Кушков // Труды Ленинградского технологического института целлюлозно-бумажной промышленности. 1962. Вып. 10. С. 135–143.
- [3] Денисов, В. С. *О существовании предельных циклов нелинейных колебаний* / В. С. Денисов // Дифференц. уравнения. Сборник трудов математических кафедр пединститутов РСФСР. Рязань. 1974. Вып. 3. С. 46–52.
- [4] Денисов, В. С. *Предельные циклы одной автономной системы* / В. С. Денисов // Дифференц. уравнения. 1979. Т. 15, № 9. С. 1572–1579.
- [5] Денисов, В. С. *О единственности устойчивого предельного цикла системы нелинейных колебаний с конечным числом особых точек* / В. С. Денисов, С. И. Примакова // Вестник Витебского государственного технологического университета. Вып. 1 / УО «ВГТУ». Витебск, 1995. С. 85–88.

- [6] Денисов, В. С. *О существовании предельных циклов одной динамической системы с кубической нелинейностью* / В. С. Денисов, О. О. Примакова // Дифференциальные уравнения и системы компьютерной алгебры: материалы Международной конференции, г. Брест, 2005. В 2-х ч. Ч. 1. Мн.: БГПУ, 2005. С. 102–107.
- [7] Денисов В. С. *Предельные циклы динамических систем с нелинейностями выше кубической по одной переменной* / В. С. Денисов // Пятые Богдановские чтения по обыкновенным дифференциальным уравнениям: тезисы докладов, г. Минск, 2010. – Мн.: Институт математики НАН Беларуси, 2010. С. 30–31.
- [8] Немыцкий, В. В. *Качественная теория дифференциальных уравнений* / В. В. Немыцкий, В. В. Степанов. М. Л.: ГИТТЛ, 1949. 550 с.
- [9] Корн, Г. *Справочник по математике* / Г. Корн, Т. Корн. М.: Наука, 1970. 720 с.
- [10] Рейссиг Р. *Качественная теория нелинейных дифференциальных уравнений* / Р. Рейссиг, Г. Сансоне., Р Конти . М.: Наука, 1974. 320 с.
- [11] Черкас Л. А. *Методы оценки числа предельных циклов автономных систем* / Л.А. Черкас. // Дифференц. уравнения. 1977. Т. XII, №5. С. 779–802.
- [12] . Grin A., Schneider K.R. *On some classes of limit cycles of planar dynamical systems* / A. Grin, K. R. Schneider // Dynamics of continuous, discrete and impulsive systems, Series A: Mathematical Analysis. 2007. Vol. 14, №5. P. 641–656.
- [13] Lynch S. *Limit cycles generalized Lienard equations*, / S. Lynch. // Applied Mathematics Letters. November 1995. Vol. 8, Issue 6. P. 15–17.