

ПОЛИНОМИАЛЬНЫЕ ЭВОЛЮЦИОННЫЕ ОПЕРАТОРЫ

Ю. М. ВУВУНИКЯН (Гродно, БЕЛАРУСЬ)

Для любого числа a обозначим через X_a – пространство бесконечно дифференцируемых функций на числовой оси, носители которых содержатся на полупрямой $[a; +\infty)$, а через X – индуктивный предел семейства X_a , $a \in \mathbb{R}$.

Определение 1. Полиномиальным эволюционным оператором степени m будем называть оператор A , определяемый равенством

$$Ax = \sum_{n=1}^m S_n(a_n * x^{\otimes n}) \quad (x \in X),$$

где $x^{\otimes n}$ – n -ая тензорная степень функции $x \in X$, a_n – обобщенная функция на пространстве $\mathbb{R}^n$, носитель которой содержится в положительном гипероктанте $[0; +\infty)^n$, $*$ – операция свертки, S_n – оператор сокращения переменных степени n : $S_n f(t_1, t_2, \dots, t_n) = f(t, t, \dots, t)$.

Отметим, что полиномиальным эволюционным оператором удовлетворяют важному условию причинности [2]: если $\text{supp } x \subset [t_0; +\infty)$ ($t \in \mathbb{R}$), то $\text{supp } Ax \subset [t_0; +\infty)$.

Определение 2. Множество всех полиномиальных эволюционных операторов степени m будем обозначать V_m . Обобщенную функцию a_n назовем *импульсной характеристикой порядка n* оператора A , а семейство (a_n) – *системой импульсных характеристик* оператора A .

Определение 3. Линейный оператор A_1 , определяемый равенством

$$A_1 x = a_1 * x,$$

называется *первой операторной компонентой оператора A* .

Определение 4. Билинейный оператор A_2 , определяемый равенством

$$A_2(x_1, x_2) = S_2(a_2 * (x_1 \otimes x_2)) \quad (x_1, x_2 \in X)$$

называется *второй операторной компонентой оператора A* .

В общем случае, для любого натурального числа $n \leq m$ определим полиномиальный оператор A_n ,

$$A_n(x_1, x_2, \dots, x_n) = S_n(a_n * (x_1 \otimes x_2 \otimes \dots \otimes x_n)) \quad (x_1, x_2, \dots, x_n \in X),$$

который будем называть n -й операторной компонентой оператора A .

В случае, когда $x_1 = x_2 = \dots = x_n = x$ будем обозначать $x^n = (x_1, x_2, \dots, x_n)$. Тогда имеем

$$A_n x^n = S_n(a_n * x^{\otimes n}),$$

и, следовательно,

$$Ax = \sum_{n=1}^m A_n x^n, \quad (x \in X).$$

Рассмотрим тензорное произведение двух полиномиальных эволюционных операторов.

Пусть A и B – полиномиальные эволюционные операторы степени m_1 и m_2 соответственно:

$$Ax = \sum_{n=1}^{m_1} S_n(a_n * x^{\otimes n}), \quad Bx = \sum_{j=1}^{m_2} S_j(b_j * x^{\otimes j}).$$

И пусть $u = Ax$, $v = Bx$.

Рассмотрим тензорное произведение $u \otimes v$. В силу билинейности тензорного произведения имеем:

$$\begin{aligned} u \otimes v &= Ax \otimes Bx = \sum_{n=1}^{m_1} S_n(a_n * x^{\otimes n}) \otimes \sum_{j=1}^{m_2} S_j(b_j * x^{\otimes j}) = \\ &= \sum_{n=1}^{m_1} \sum_{j=1}^{m_2} S_n(a_n * x^{\otimes n}) \otimes S_j(b_j * x^{\otimes j}) = \sum_{n=1}^{m_1} \sum_{j=1}^{m_2} S_{n,j}((a_n * x^{\otimes n}) \otimes (b_j * x^{\otimes j})) \end{aligned} \quad (1)$$

где $S_{n,j}$ – оператор сокращения переменных, действие которого на произвольную функцию f , имеющей $n+j$ независимых переменных, определяется следующей формулой:

$$S_{n,j}f(t_1, t_2, \dots, t_n, s_1, s_2, \dots, s_j) = f(t, t, \dots, t, s, s, \dots, s).$$

Рассмотрим теперь выражение $(a_n * x^{\otimes n}) \otimes (b_j * x^{\otimes j})$. Для его преобразования мы применим общую теорему о коммуникационных соотношениях между сверткой и тензорной степенью. Аналогично случаю обобщенной функций одной переменной будем говорить, что обобщенная вектор-функция функция n переменных *финитна слева*, если носитель ее содержится в конусе $[t_0; +\infty)^n$, где t_0 – некоторое фиксированное число.

Теорема 1. Пусть a^k ($k = 1, 2, \dots, i$) и w^k ($k = 1, 2, \dots, i$) – финитные слева обобщенные функции n_k переменных соответственно. Тогда справедливо следующее равенство:

$$\bigotimes_{k=1}^i (a^k * w^k) = \left(\bigotimes_{k=1}^i a^k \right) * \left(\bigotimes_{k=1}^i w^k \right). \quad (2)$$

Доказательство. Достаточно доказать равенство (2) для случая $l = 2$, а затем применить математическую индукцию. Итак, пусть a^1, w^1 – финитные слева обобщенные функции n_1 переменных, a^2, w^2 – финитные слева обобщенные функции n_2 переменных. Докажем, что тогда справедливо следующее равенство:

$$(a^1 * w^1) \otimes (a^2 * w^2) = (a^1 \otimes a^2) * (w^1 \otimes w^2). \quad (*)$$

Действительно, так как обобщенные функции a^1, a^2, w^1, w^2 финитны слева, то существует такое число t^* , что

$$\text{supp } a^1, \text{ supp } w^1 \subset ([t^*; +\infty))^{n_1} \text{ и } \text{supp } a^2, \text{ supp } w^2 \subset ([t^*; +\infty))^{n_2}.$$

Зафиксируем $\varepsilon > 0$ и построим бесконечно дифференцируемую на всей числовой оси функцию θ , равную тождественно единице на полуоси $[t^* - \varepsilon; +\infty)$ и финитную слева. Тогда для любой финитной бесконечно дифференцируемой функции $\phi \in D(\mathbb{R}^{n_1+n_2})$ имеем

$$\begin{aligned} & ((a^1 * w^1) \otimes (a^2 * w^2))(\phi) = \\ & < (a^1 * w^1)(t), < (a^2 * w^2)(s), \phi(t, s) > > = \\ & = < (a^1 \otimes w^1)(t_1, t_2), < (a^2 \otimes w^2)(s_1, s_2), \\ & \quad \theta^{\otimes n_1}(t_1) \theta^{\otimes n_1}(t_2) \theta^{\otimes n_2}(s_1) \theta^{\otimes n_2}(s_2) \times \\ & \times \phi(t_1 + t_2, s_1 + s_2) > > = < (a^1 \otimes w^1 \otimes a^2 \otimes w^2)(t_1, t_2, s_1, s_2), \\ & \quad \theta^{\otimes n_1}(t_1) \theta^{\otimes n_1}(t_2) \theta^{\otimes n_2}(s_1) \theta^{\otimes n_2}(s_2) \phi(t_1 + t_2, s_1 + s_2) > = \\ & = < ((a^1 \otimes a^2) \otimes (w^1 \otimes w^2))(t_1, s_1, t_2, s_2), \\ & \quad \theta^{\otimes(n_1+n_2)}(t_1, s_1) \theta^{\otimes(n_1+n_2)}(t_2, s_2) \phi((t_1, s_1) + (t_2, s_2)) > = \\ & < (a^1 \otimes a^2)(t_1, s_1), < (w^1 \otimes w^2)(t_2, s_2), \\ & \quad \theta^{\otimes(n_1+n_2)}(t_1, s_1) \theta^{\otimes(n_1+n_2)}(t_2, s_2) \phi((t_1, s_1) + (t_2, s_2)) > > = \\ & = < (a^1 \otimes a^2)(t_1, s_1), < (w^1 \otimes w^2)(t_2, s_2), \\ & \quad \theta^{\otimes(n_1+n_2)}(t_1, s_1) \theta^{\otimes(n_1+n_2)}(t_2, s_2) \phi((t_1, s_1) + (t_2, s_2)) > > = \\ & = ((a^1 \otimes a^2) * (w^1 \otimes w^2))(\phi). \end{aligned}$$

Таким образом, мы доказали, что имеет место равенство

$$((a^1 * w^1) \otimes (a^2 * w^2))(\phi) = (a^1 \otimes a^2) * (w^1 \otimes w^2)(\phi),$$

откуда в силу произвольности выбора $\phi \in D(\mathbb{R}^{n_1+n_2})$ следует равенство (*), что и требовалось доказать.

Применяя равенство (2) (в случае $i = 2$) к соотношению (1), получаем

$$u \otimes v = Ax \otimes By = \sum_{n_1, n_2=1}^{m_1, m_2} S_{n_1, n_2}((a_{n_1} \otimes b_{n_2}) * (x^{\otimes n_1} \otimes y^{\otimes n_2})). \quad (3)$$

Полагая же в равенстве (3) $y = x$, имеем:

$$\begin{aligned} Ax \otimes Bx &= \sum_{n_1, n_2=1}^{l, j} S_{n_1, n_2}((a_{n_1} \otimes b_{n_2}) * (x^{\otimes n_1} \otimes x^{\otimes n_2})) = \\ &= \sum_{n_1, n_2=1}^{l, j} S_{n_1, n_2}((a_{n_1} \otimes b_{n_2}) * x^{\otimes (n_1+n_2)}). \end{aligned} \quad (4)$$

Чтобы распространить равенство (4) на любое конечное число тензорных сомножителей, рассмотрим понятие *композиции* [1, стр.67] натурального числа n , под которым понимается такой конечный набор $\alpha = (n_1, n_2, \dots, n_l)$ натуральных чисел, что $|\alpha| = n_1 + n_2 + \dots + n_l = n$.

Полезно отметить, что так как $n_1, n_2, \dots, n_l \geq 1$, то $n \geq l$.

Натуральные числа $n_1, n_2, \dots, n_l$ называются *частями композиции* числа n . Множество всех композиций натурального числа n с l частями будем обозначать $\Xi_{n, l}$. Отметим, что мощность множества $\Xi_{n, l}$ равна $C_{n-1}^{l-1} = \frac{(n-1)!}{(l-1)!(n-l)!}$.

Рассмотрим также понятие *композиции с ограничениями*. Пусть $m = (m_1, m_2, \dots, m_l)$ – фиксированный конечный набор натуральных чисел. Будем говорить, что композиция $\alpha = (n_1, n_2, \dots, n_l) \in \Xi_{n, l}$ удовлетворяет ограничению m , если $n_k \leq m_k$ ($k = 1, 2, \dots, l$). Множество всех композиций натурального числа n с l частями, удовлетворяющих ограничению m , будем обозначать $\Xi_{n, l, m}$.

С помощью множества $\Xi_{n, 2, m}$ формулу (4) можно записать в следующем виде:

$$Ax \otimes Bx = \sum_{n=2}^{|m|} \sum_{(n_1, n_2) \in \Xi_{n, 2, m}} S_{n_1, n_2}((a_{n_1} \otimes b_{n_2}) * x^{\otimes n}) \quad (5)$$

Таким образом, мы получили следующую теорему о тензорном произведении двух эволюционных операторов.

Теорема 2. Пусть A и B – полиномиальные эволюционные операторы степеней m_1 и m_2 соответственно:

$$Ax = \sum_{n=1}^{m_1} S_n(a_n * x^{\otimes n}), \quad Bx = \sum_{j=1}^{m_2} S_j(b_j * x^{\otimes j}).$$

Тогда справедлива формула(5).

Формула (5) доказана для случая тензорного произведения двух эволюционных операторов. Рассмотрим теперь общий случай произвольного конечного числа операторов.

Пусть $\alpha = (n_1, n_2, \dots, n_l)$.

Введем оператор сокращения переменных S_α , действие которого на произвольную функцию f , имеющей $|\alpha| = n_1 + n_2 + \dots + n_l = n$ независимых переменных, определяется формулой

$$\begin{aligned} & S_\alpha f(t_1, t_2, \dots, t_{n_1}, t_{n_1+1}, t_{n_1+2}, \dots, t_{n_1+n_2}, \dots, \\ & t_{n_1+n_2+\dots+n_{l-1}+1}, \dots, t_{n_1+n_2+\dots+n_{l-1}+n_l}) = \\ & = f(s_1, s_1, \dots, s_1, s_2, s_2, \dots, s_2, \dots, s_l, s_l, \dots, s_l). \end{aligned}$$

Сформулируем и докажем следующую теорему о тензорном произведении любого конечного числа эволюционных операторов.

Теорема 3. Пусть $A^1, A^2, \dots, A^l$ – полиномиальные эволюционные операторы степеней $m_1, m_2, \dots, m_l$ соответственно:

$$A^k x = \sum_{n_k=1}^{m_k} S_{n_k}(a_{n_k}^k * x^{\otimes n_k}) \quad (k = 1, 2, \dots, l).$$

Тогда для тензорного произведения этих операторов справедливо следующее равенство:

$$\bigotimes_{k=1}^l A^k x = \sum_{n=l}^{|m|} \sum_{\alpha \in \Xi_{n,l,m}} S_\alpha \left(\left(\bigotimes_{k=1}^l a_{n_k}^k \right) * x^{\otimes n} \right), \quad (6)$$

$\alpha = (n_1, n_2, \dots, n_l), n = |\alpha| = n_1 + n_2 + \dots + n_l, m = (m_1, m_2, \dots, m_l), |m| = m_1 + m_2 + \dots + m_l.$

Доказательство. В силу билинейности тензорного произведения имеем:

$$\bigotimes_{k=1}^l A^k x = \bigotimes_{k=1}^l \sum_{n_k=1}^{m_k} S_{n_k}(a_{n_k}^k * x^{\otimes n_k}) = \sum_{n_1, n_2, \dots, n_l=1}^{m_1, m_2, \dots, m_l} S_{n_1, n_2, \dots, n_l} \left(\bigotimes_{k=1}^l (a_{n_k}^k * x^{\otimes n_k}) \right). \quad (7)$$

Применяя к правой части равенства (7) лемму 1, получим

$$\bigotimes_{k=1}^l A^k x = \sum_{n_1, n_2, \dots, n_l=1}^{m_1, m_2, \dots, m_l} S_{n_1, n_2, \dots, n_l} \left(\left(\bigotimes_{k=1}^l a_{n_k}^k \right) * \left(\bigotimes_{k=1}^l x^{\otimes n_k} \right) \right). \quad (8)$$

Рассмотрим

$$\bigotimes_{k=1}^l x^{\otimes n_k} = x^{\otimes n_1} \otimes x^{\otimes n_2} \otimes \dots \otimes x^{\otimes n_l} = x^{\otimes (n_1 + n_2 + \dots + n_l)} = x^{\otimes n}.$$

Следовательно, равенство (8) можно записать в следующем виде:

$$\bigotimes_{k=1}^l A^k x = \sum_{n_1, n_2, \dots, n_l=1}^{m_1, m_2, \dots, m_l} S_{n_1, n_2, \dots, n_l} \left(\left(\bigotimes_{k=1}^l a_{n_k}^k \right) * x^{\otimes n} \right). \quad (9)$$

Упорядоченный набор $\alpha = (n_1, n_2, \dots, n_l)$ натуральных чисел является композицией натурального числа n и содержит ровно l частей. Кроме того, $n_k \leq m_k$ ($k = 1, 2, \dots, l$). Значит, $\alpha \in \Xi_{n, l, m}$, где $n = |\alpha| = n_1 + n_2 + \dots + n_l$ и $m = (m_1, m_2, \dots, m_l)$. В силу того, что $n_k \leq m_k$ ($k = 1, 2, \dots, l$) имеем:

$$n = n_1 + n_2 + \dots + n_l \leq m_1 + m_2 + \dots + m_l = |m|. \quad (10)$$

А в силу того, что $n_k \geq 1$ ($k = 1, 2, \dots, l$) имеем:

$$n = n_1 + n_2 + \dots + n_l \geq l. \quad (11)$$

Таким образом, исходя из соотношения (9) и неравенств (10) и (11), получаем, что имеет место соотношение (6), что и требовалось доказать.

Применяя S_l – оператор сокращения переменных кратности l к обеим частям равенства (6) и учитывая, что

$$S_l S_\alpha = S_n,$$

так как $n = n_1 + n_2 + \dots + n_l$ а также соотношение

$$S_l \left(\bigotimes_{k=1}^l A^k x \right) = \prod_{k=1}^l A^k x,$$

получим общую формулу для произведения эволюционных операторов:

$$\prod_{k=1}^l A^k x = \sum_{n=l}^{|m|} S_n \left(\left(\sum_{\alpha \in \Xi_{n, l, m}} \bigotimes_{k=1}^l a_{n_k}^k \right) * x^{\otimes n} \right).$$

В качестве следствия из теоремы 3 также получаем теорему о тензорных степенях полиномиального эволюционного оператора.

Для этого обозначим через $\Xi_{n,l,m}^*$ – множество всех композиций натурального числа n с l частями, каждое из которых не превосходит натурального числа m .

Теорема 4. Пусть A – полиномиальный эволюционный оператор степени m

$$Ax = \sum_{n=1}^m S_n(a_n * x^{\otimes n}).$$

Тогда для тензорной степени l справедлива следующая формула:

$$(Ax)^{\otimes l} = \sum_{n=l}^{lm} \sum_{\alpha \in \Xi_{n,l,m}^*} S_{\alpha}((\bigotimes_{k=1}^l a_{n_k}) * x^{\otimes n}),$$

где $\alpha = (n_1, n_2, \dots, n_l)$, $n = |\alpha| = n_1 + n_2 + \dots + n_l$.

Список литературы

- [1] Эндрюс, Г. Теория разбиений / Г. Эндрюс. М.: Наука, 1982. 256 с.
- [2] Вувуникян, Ю.М. Эволюционные операторы с обобщенными импульсными и спектральными характеристиками: монография / Ю.М. Вувуникян. Гродно: ГрГУ, 2007. 224 с.
- [3] Вувуникян, Ю.М. Нелинейные эволюционные операторы с композиционно симметричными обобщенными характеристиками / Ю.М. Вувуникян // Доклады НАН Беларуси. 2010. Т. 54, № 2. С. 5–11.