

**БЕЛОРУССКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ**

**УДК 339.1; 517.925; 517.926**

**Трухан  
Екатерина Владимировна**

**ДИНАМИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ РЫНКА  
КОНКУРИРУЮЩИХ ТОВАРОВ И РЫНКА  
ВЗАИМОДОПОЛНЯЕМЫХ ТОВАРОВ**

Автореферат диссертации  
на соискание ученой степени кандидата экономических наук  
по специальности 08.00.13 – математические и инструментальные  
методы экономики

Минск, 2017

Работа выполнена в Белорусском государственном университете

Научный руководитель – **Калитин Борис Сергеевич**,  
кандидат физико-математических наук, доцент,  
профессор кафедры аналитической экономики и  
эконометрики экономического факультета  
Белорусского государственного университета

Официальные оппоненты: **Аксень Эрнест Маврициевич**,  
доктор экономических наук, доцент,  
профессор кафедры математических методов  
в экономике УО «Белорусский государственный  
экономический университет»

**Алехина Алина Энодиевна**,  
кандидат экономических наук, доцент,  
доцент кафедры экономической информатики  
УО «Белорусский государственный  
университет информатики и радиоэлектроники»

Оппонирующая организация: Государственное научное учреждение  
«Научно-исследовательский экономический  
институт Министерства экономики  
Республики Беларусь»

Защита состоится 28 февраля 2017 г. в 14.00 на заседании совета по защите диссертаций Д 02.01.15 при Белорусском государственном университете по адресу: 220030, г. Минск, ул. Ленинградская, 8, (корпус юридического факультета), ауд. 407.

Телефон ученого секретаря: + 375 17 209 55 58.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке Белорусского государственного университета.

Автореферат разослан «27» января 2017 года.

Ученый секретарь  
совета по защите диссертаций,  
д.э.н., профессор

В.Ф. Байнев

## КРАТКОЕ ВВЕДЕНИЕ

В изучении различных процессов экономики большую роль играют математические модели, описывающие изучаемые экономические явления. В зависимости от цели и условий исследования применяются разнообразные способы построения моделей и математические методы анализа. Сложность исследования динамических моделей отражает потенциальные возможности получения полезной с экономической точки зрения информации, допускающей суждения об эволюции реально наблюдаемых процессов экономики. Одно из широко исследуемых явлений – это устойчивость равновесия сложившихся рыночных отношений при определенных ключевых условиях.

Первые технически сложные модели динамики рыночных отношений были изучены в трудах Ж.Р. Хикса, П.А. Самуэльсона, Х. Хоутэкера, Д. Гейла, Р. Солоу, Ф. Дреша, В.Л. Макарова, В.Л. Полтеровича, Е.В. Балацкого и др.

Математические модели первого порядка исследуются со времен основателей математической экономики Л. Вальраса и А. Маршалла и др., а впоследствии и в работе П.А. Самуэльсона. Однако, классическая схема построения моделей рыночной экономики не позволяет различать рынки по их характеристикам и не может предложить эффективные инструменты управления развитием цен.

М. Моришима в свое время ввел систему дифференциальных уравнений для описания процесса изменения цен в условиях изменения спроса и изучал достижимость и устойчивость положения равновесия на рынке с течением времени. Проблемами конкурентного равновесия также занимался известный российский ученый в области математики и экономики В.Л. Макаров. Теорией экономического роста и равновесных траекторий экономического роста занимался В.М. Полтерович. На основе его работ в данном направлении было построено и исследовано множество моделей макро- и микроэкономики.

Важным вопросом, учитываемым при построении математической модели экономики, является вопрос ценообразования. Одним из авторов работ по этой теме является Е.В. Балацкий, который рассмотрел процесс формирования цен согласно специфике рынка и предложил модель динамики производства и цен в виде дифференциальной модели.

Анализируя полученные результаты исследований различных ученых, можно отметить, что синтез двух моделей: производственной и торговой, осуществляется на основе хорошо изученных явлений производства и относительно «мало» исследованных отдельно от процессов производства моделей конкурентного рынка.

В настоящей диссертации представлены динамические модели рынка двух взаимозаменяемых и двух взаимодополняемых товаров, построенные на основе метода, предложенного в работах по математическому моделированию Б.С. Калитина. Данный метод динамического моделирования цен на рынке развивается с 1997 года и до настоящего времени. В настоящей диссертации он получил развитие для случая двухтоварных рынков товаров, связанных в потреблении: рынка взаимозаменяемых конкурирующих товаров и рынка взаимодополняемых товаров. Основная идея метода – введение понятия экономических сил как воздействий основных агентов рыночных отношений на изменение цены на рынке и моделирование динамики вектора цен товаров в зависимости от активности и условий взаимодействия рыночных агентов, что позволяет гибко описывать и изучать самоорганизующиеся процессы рынка в зависимости от социально-экономических явлений и динамики цены товара, происходящих на исследуемом рынке.

Модель построена таким образом, что позволяет осуществлять анализ происходящих на рынке событий безотносительно к процессу производства. Выбор функциональных зависимостей главных экономических сил на рынке является обоснованным с экономической и математической точки зрения и опирается на такие постулаты экономики как закон спроса, эффект ожидания, эффект насыщения, зависимость объема продаж от цен.

С целью удобства экономической интерпретации полученных результатов моделирования введены такие новые понятия как «запас прочности конкурента», «запас прочности рынка», «излишек цены продавца», «излишек цены покупателя».

Модели, построенные по данному методу, представляют собой системы нелинейных обыкновенных дифференциальных уравнений, моделирующих динамику цен на изучаемых рынках. Все функции, входящие в уравнения системы, являются функциями от цен. Это дает возможность изучения динамики цен и прочих рыночных показателей на рассматриваемых рынках средствами качественной теории дифференциальных уравнений, в частности, теории устойчивости в смысле А.М. Ляпунова.

Представленные в диссертации модели описывают взаимодействие основных субъектов рыночных отношений (покупателей, продавцов и государства) на рынках взаимозаменяемых и взаимодополняемых товаров и относятся к классу нелинейных динамических моделей микроэкономики.

Особенностью моделей данного типа является предположение о существовании экономического равновесия. Таким образом, одна из исследуемых проблем – это проблема устойчивости экономического равновесия, анализу которой уделено особое внимание в диссертации.

В представленной работе также строится и исследуется задача об оптимальной налоговой политике. Данная задача решает следующую проблему, которая соответствует интересам и может оказаться полезной директивным органам, отвечающим за процесс и политику налогообложения: пополнять бюджет за счет налогов наилучшим образом, поддерживая при этом функционирование рынка в устойчивом состоянии.

## **ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ**

### **Связь работы с крупными научными программами и темами.**

Работа выполнена на кафедре методов оптимального управления Белорусского государственного университета. Тема диссертации утверждена Ученым советом факультета прикладной математики и информатики Белорусского государственного университета и соответствует приоритетному направлению «6.1. Математические модели и их применение к анализу систем и процессов в природе и обществе» перечня приоритетных направлений фундаментальных и прикладных научных исследований Республики Беларусь на 2006–2010 годы.

Исследования проводились в рамках темы «Оптимальное управление большими системами» (№ госрегистрации 20061282), выполнявшейся в 2006–2010 гг. в рамках государственной программы фундаментальных исследований РБ «Математические модели», а также в рамках научно-исследовательского проекта кафедры методов оптимального управления Белорусского государственного университета «Оптимальное управление системами с запаздыванием» (№ госрегистрации – № 20062638).

**Цель и задачи исследования.** Целью диссертационной работы является разработка методов анализа устойчивости равновесия отношений на рынках товаров, связанных в потреблении, в условиях динамики цен; определение условий стабильного развития отношений на данных рынках и методов повышения эффективности их функционирования; получение оптимальных рекомендаций по налогообложению исследуемых рынков в условиях изменения экономических параметров во времени и при условии ненарушения равновесия на каждом из рынков.

Для достижения данной цели поставлены и решены следующие задачи:

– разработать методологию анализа рынков товаров, связанных в потреблении – рынка взаимозаменяемых конкурирующих товаров и рынка взаимодополняемых товаров – в условиях динамики цены, для чего необходимо сформулировать принципы, обеспечивающие корректность моделирования процессов на данных рынках, и построить динамические модели в виде систем

уравнений, описывающих поведение каждого из рынков;

– провести исследование построенных моделей с помощью теории устойчивости, на основании исследования сформулировать условия, обеспечивающие устойчивость экономического равновесия на рассмотренных рынках, сформировать систему понятий и принципов, позволяющих корректировать экономические показатели извне без риска нарушения рыночного равновесия;

– сформулировать задачу оптимизации налоговой политики для каждого типа рынка как многопараметрическую задачу нелинейного программирования, построить решения полученных задач для различных значений исходных параметров и при условии сохранения устойчивого развития рынков, сформулировать экономически полезные рекомендации в сфере налогообложения на основе полученных решений для обоих типов рынков.

*Объектом исследования* является рынок товаров, связанных в потреблении: рынок конкурирующих товаров и рынок взаимодополняемых товаров. *Предмет исследования* – устойчивость рыночных отношений во времени в результате взаимодействия участников торговли и при воздействии на рынок извне, а также особенности оптимального налогообложения как результат внешнего воздействия на рыночные отношения.

**Научная новизна.** Разработана методология анализа рынков товаров, связанных в потреблении, на основе динамических моделей рынка взаимозаменяемых конкурирующих товаров и рынка взаимодополняемых товаров. Предложенный в работе метод моделирования рыночных процессов в условиях динамики цены учитывает активность взаимодействия основных участников рыночных отношений безотносительно к процессу производства реализуемой продукции, что является востребованным развитием существующих методов моделирования рыночных механизмов.

Предложенные модели представляют собой системы нелинейных обыкновенных дифференциальных уравнений, описывающих динамику цен на изучаемых рынках. Такой способ представления экономической реальности дает возможность изучения рыночных показателей средствами качественной теории дифференциальных уравнений, в частности, теории устойчивости в смысле А.М. Ляпунова, что позволяет более широко и результативно применять в экономике инструментарий, прежде традиционно используемый в естествознании.

В работе получены выводы об устойчивости экономических отношений на различных типах рынков относительно внешнего и внутреннего механизма воздействия на рынок, что дало возможность сформулировать систему принципов, позволяющих корректировать экономические показатели извне без

риска нарушения рыночного равновесия.

Сформулирована и решена задача об оптимальном налогообложении в условиях ненарушения равновесия на облагаемых рынках. На основе полученного решения задачи оптимизации сформулированы экономически полезные рекомендации в сфере налогообложения.

### **Положения, выносимые на защиту:**

1. Динамические модели рынков конкурирующих и взаимодополняемых товаров, представленные как методология анализа устойчивости равновесия рыночных отношений в условиях динамики цен, позволяющая определять причины нарушения устойчивости функционирования рыночного механизма и оценивать обусловленные этим потери в эффективности торговли. Данные модели развивают систему методов исследования самоорганизующихся экономических систем во времени с целью определения резервов повышения эффективности их функционирования.

2. Принципы стабильного развития рыночных отношений, выработанные на основе анализа динамических моделей рынков взаимозаменяемых и взаимодополняемых товаров, позволяющие задать математически допустимые рамки для корректировки экономических показателей извне без риска нарушения рыночного равновесия. Полученная система экономических условий определяет ясные ориентиры достижения эффективности в корректировке рыночных процессов и дает инструментарий, помогающий в принятии управленческих решений.

3. Рекомендации по обеспечению оптимального налогообложения на рынках взаимозаменяемых и взаимодополняемых товаров на основе решения многопараметрической задачи нелинейного программирования, предназначенной максимизировать налоговые поступления в бюджет при условии сохранения равновесия на каждом из рынков. Данные рекомендации позволяют формировать или оптимизировать налоговую политику, выявляя потенциальные возможности налогообложения и экономически обоснованный объем налоговых сборов.

**Личный вклад соискателя.** Все результаты, изложенные в диссертации, получены лично автором. Роль научного руководителя состояла в постановке рассматриваемых в диссертации задач и в анализе полученных результатов.

**Апробация диссертации и информация об использовании ее результатов.** Основные результаты диссертации были доложены и обсуждались на следующих конференциях:

– Международная научная конференция «Моделирование и исследование устойчивости динамических систем (DSMSI-2007)», г. Киев, май 2007 г.;

- XVI Международная научно-практическая конференция «Управление в социальных и экономических системах», г. Минск, июнь 2007 г.;
- Международная конференция «X Белорусская математическая конференция», г. Минск, ноябрь 2008 г.;
- XVII Международная научно-практическая конференция «Управление в социальных и экономических системах», г. Минск, июнь 2008 г.;
- Международная научная конференция «Современные научные достижения», г. Прага, январь 2009 г.

Имеются следующие документы о практическом использовании результатов исследования:

- Акт о практическом использовании результатов исследования в учебном процессе факультета прикладной математики и информатики Белорусского государственного университета, июнь 2012 г.;
- Акт о практическом использовании результатов исследования в учебном процессе экономического факультета Белорусского государственного университета, декабрь 2015 г.;
- Акт о практическом использовании результатов исследования в реорганизации процесса формирования цен и маркетинговой политики компании «Группа компаний ИВА» на продукт СЭД (система электронного документооборота) на рынке Республики Беларусь, май 2014 г.

Результаты работы докладывались и обсуждались на научных семинарах кафедры методов оптимального управления Белорусского государственного университета, г. Минск; на семинаре кафедры математического и информационного обеспечения экономических систем Гродненского государственного университета, г. Гродно (май 2012 г.); на семинаре "Многомерный статистический анализ и вероятностное моделирование реальных процессов" под рук. С.А. Айвазяна ЦЭМИ РАН, г. Москва (февраль 2013 г.).

**Опубликование результатов диссертации.** Основные результаты диссертации опубликованы в 10 научных работах, из них 5 – в рецензируемых журналах в соответствии с требованиями пункта 18 Положения о присуждении ученых степеней и присвоении ученых званий в Республике Беларусь общим объемом 2,7 авторских листа и 5 – в материалах и тезисах докладов международных научных конференций.

**Структура и объем диссертации.** Диссертация состоит из введения, общей характеристики работы, основной части из трех глав, заключения, библиографического списка (включающего 149 наименований, в том числе 10 публикаций соискателя) и восьми приложений. Общий объем диссертационной работы составляет 264 страницы, в том числе 21 рисунок и 9 таблиц на 15

страницах, список использованных источников на 11 страницах, включая собственные публикации автора, восемь приложений к работе на 149 страницах.

## ОСНОВНОЕ СОДЕРЖАНИЕ РАБОТЫ

Во **введении** дается краткая характеристика направления исследований, к которому относится диссертация, обосновывается ее актуальность, дается краткое описание концепции построения модели и ее особенностей, перечисляются новые понятия и определения, введенные в работе, описываются истоки исследования.

В **первой главе** приводится аналитический обзор литературы по теме диссертации, рассматриваются основные направления и методы в области математического моделирования, актуальные в настоящее время в экономике и оказавшие влияние на выбор и развитие методов исследования, представленных в настоящей работе. Прослеживается исторический путь развития использованного в диссертации метода моделирования экономических процессов, описываются его область применения и преимущества.

**Вторая глава** посвящена анализу и моделированию процессов на рынках товаров, связанных в потреблении: на рынке конкурирующих товаров и на рынке взаимодополняемых товаров. В главе описываются основные принципы построения модели, вводятся условные обозначения, определяются функции, описывающие экономические силы, вводится понятие функции объема продаж на основании эластичности спроса по цене, осуществляется построение модели и анализ устойчивости положения равновесия описанной рыночной ситуации, дается экономическая интерпретация полученных результатов. Модели указанных типов рынка представлены на базе моделей рынков двух товаров.

Модель рынка конкурирующих товаров описывается системой обыкновенных нелинейных дифференциальных уравнений (1):

$$\begin{cases} \frac{d_1 p_1}{dt} = -\frac{v_1 p_1'(p_1 - p_1^0)}{p_1 - p_1^*} - \frac{d_1 p_1''(p_1 - p_1^0)}{p_1^{**} - p_1} - c_1(p_1 - p_1^0 - p_2 + p_2^0) + \frac{r_1}{q_1^0}(p_1 q_1(p) - p_1^0 q_1^0), \\ \frac{d_2 p_2}{dt} = -\frac{v_2 p_2'(p_2 - p_2^0)}{p_2 - p_2^*} - \frac{d_2 p_2''(p_2 - p_2^0)}{p_2^{**} - p_2} - c_2(p_2 - p_2^0 - p_1 + p_1^0) + \frac{r_2}{q_2^0}(p_2 q_2(p) - p_2^0 q_2^0), \end{cases} \quad (1)$$

где  $p_j(t)$  – цена  $j$ -го товара в момент времени  $t$ ;

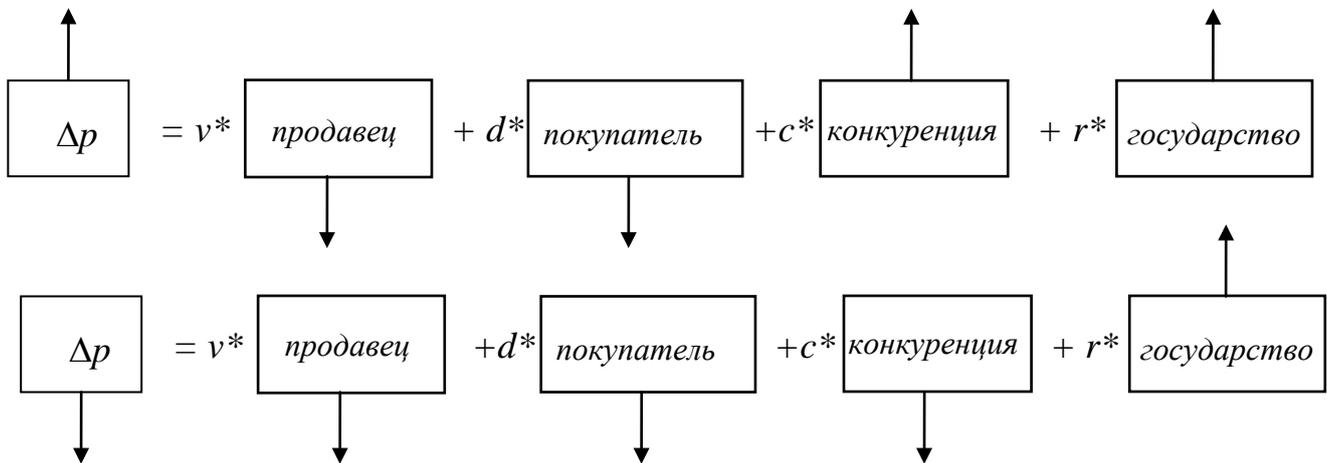
$p_j^0$  – равновесная цена  $j$ -го товара;

$q_j(p)$  – объем продаж  $j$ -го товара, где  $p = (p_1, p_2)$ ;

$q_j^0$  – равновесный объем продаж  $j$ -го товара;  
 $p_j^*$  – нижнее пороговое значение цены  $j$ -го товара;  
 $p_j^{**}$  – верхнее пороговое значение цены  $j$ -го товара;  
 $p_j' = p_j^0 - p_j^*$  – излишек цены продавца;  
 $p_j'' = p_j^{**} - p_j^0$  – излишек цены потребителей;  
 $r_j$  – коэффициент налогообложения;  
 $c_j$  – коэффициент конкуренции;  
 $v_j$  – коэффициент интенсивности продавцов;  
 $d_j$  – коэффициент интенсивности покупателей,

цена и объем продаж подчинены условиям  $p \in ]p^*, p^{**}[$ ,  $q \in [q^*, q^{**}]$ .

Для наглядности уравнения модели можно изобразить схематически (рисунок 1).



**Рисунок 1. – Схематическое представление способа построения динамической модели рынка конкурирующих товаров**

**Экономические силы**, участвующие в построении модели рынка конкурирующих товаров, описываются следующим образом ( $j=1,2$ ).

а) Сила продавца  $j$ -го товара, желающего реализовать его по максимально возможной цене, которая не ниже себестоимости:

$$V_j(p_j^0, p_j^*, p_j^0) = 0, \quad \lim_{p_j \rightarrow p_j^{*+0}} V_j(p_j, p_j^*, p_j^0) = +\infty, \quad \frac{\partial V_j(p_j, p_j^*, p_j^0)}{\partial p_j} < 0.$$

Для построения модели была выбрана следующая функция, которая

удовлетворяет всем поставленным условиям:

$$V_j(p_j, p_j^*, p_j^0) = -\frac{v_j p_j'(p_j - p_j^0)}{p_j - p_j^*}.$$

б) Сила покупателей, воздействующая на цену согласно законам спроса и действующая в сторону минимизации цены приобретаемого товара:

$$D_j(p_j, p_j^{**}, p_j^0) = 0, \quad \lim_{p_j \rightarrow p_j^{**}-0} D_j(p_j, p_j^{**}, p_j^0) = -\infty, \quad \frac{\partial D_j(p_j, p_j^{**}, p_j^0)}{\partial p_j} < 0.$$

$$D_j(p_j, p_j^{**}, p_j^0) = -\frac{d_j p_j''(p_j - p_j^0)}{p_j^{**} - p_j}.$$

в) Сила, отражающая влияние внешних структур на формирование цены  $j$ -го товара (государство через налоги и нормативные документы):

$$G_j(Q_j^0, Q_j^0) = 0, \quad \frac{\partial G_j(Q_j, Q_j^0)}{\partial(Q_j)} \geq 0,$$

$$G_j(Q_j, Q_j^0) = \frac{r_j}{q_j^0}(Q_j - Q_j^0),$$

где

$$Q_j = p_j q_j, \quad Q_j^0 = p_j^0 q_j^0, \quad j = 1, 2.$$

г) Сила, отражающая влияние  $i$ -го конкурента на цену  $j$ -го товара:

$$C_j(p^0, p) = C_{ji}(p_j, p_j^0, p_i, p_i^0), \quad j, i = 1, 2, \quad j \neq i,$$

$$\Delta p_i C_{ji}(p_j, p_j^0, p_i + \Delta p_i, p_i^0) \geq 0, \quad j, i = 1, 2, \quad j \neq i,$$

$$\Delta p_j C_{ji}(p_j + \Delta p_j, p_j^0, p_i, p_i^0) \leq 0, \quad j, i = 1, 2, \quad j \neq i,$$

согласно равноправию влияния экономических сил выполняется:

$$C_{ji}(p_j, p_j^0, p_i, p_i^0) = -C_{ij}(p_i, p_i^0, p_j, p_j^0), \quad j, i = 1, 2, \quad j \neq i;$$

$$C_{ji}(p_j^0, p_j^0, p_i^0, p_i^0) = 0, \quad j, i = 1, 2, \quad j \neq i.$$

Функция, описывающая влияние силы конкуренции на цену с учетом всех требований, выбрана следующим образом:

$$C_j(p_j, p_j^0, p_i, p_i^0) = -c_j((p_j - p_j^0) - (p_i - p_i^0)), i, j = 1, 2, i \neq j.$$

Каждая экономическая сила измеряется в тех же единицах, что и цена на товар на исследуемом рынке.

Для функции объемов продаж  $q_j(p)$ ,  $j = 1, 2$ , выполняются следующие условия:

$$q_j(p^0) = q_j^0, q_j(p_j^{**}) = 0, \lim_{p_j \rightarrow p_j^*} q_j(p_j) = +\infty, \frac{\partial q_j(q^0, p^0, p^0)}{\partial p_i} < 0.$$

Для товаров-субститутов изменение объема продаж одного из товаров в зависимости от изменения цены другого из них происходит в одном направлении, что определяет положительную величину перекрестной эластичности. Эластичность же спроса по цене для каждого товара отрицательна. В связи с этим величины эластичностей спроса по цене  $e_j$  и величины перекрестных эластичностей  $e_{ji}$  спроса на  $j$ -й товар по цене  $i$ -го товара в точке  $p = p^0$ , как положительные параметры, определяются по следующим формулам:

$$e_j = -\frac{p_j^0}{q_j^0} \frac{\partial q_j(p^0)}{\partial p_j}, e_{jk} = \frac{p_k^0}{q_j^0} \frac{\partial q_j(p^0)}{\partial p_k}, j, k = 1, 2, j \neq k.$$

На основе представленного определения эластичностей локальное представление функции объемов продаж вблизи равновесия  $p^0$  имеет вид:

$$q_j(p) = q_j^0 - e_j \frac{q_j^0}{p_j^0} (p_j - p_j^0) + e_{ji} \frac{q_j^0}{p_i^0} (p_i - p_i^0) + o_j(\|p - p^0\|), i, j = 1, 2, i \neq j.$$

Введены следующие обозначения:  $S_j = v_j + d_j + c_j - r_j(1 - e_j)$ ,  $R_j = c_j + r_j p_{ji}^0 e_{ji}$ ,  $p_{ji}^0 = p_j^0 / p_i^0$ ,  $j, i = 1, 2$ , где  $S_j$  – **запас прочности** рынка  $j$ -го товара.

Исследована устойчивость экономического равновесия рынка конкурирующих товаров, описанного предложенной динамической моделью взаимозаменяемых товаров. Получены условия асимптотической устойчивости экономического равновесия описанного рынка относительно такого понятия как запас прочности рынка определенного товара: 1)  $S_1 > 0, S_2 > 0$ ; 2)  $S_1 S_2 - R_1 R_2 > 0$ .

*Основные условия устойчивого развития экономических отношений на рынке конкурирующих товаров:*

**1.** Запас прочности рынка каждого из товаров-конкурентов должен быть строго положительным, что параметрически выглядит следующим образом:

$$v_j + d_j + c_j - r_j(1 - e_j) > 0, \quad j = 1, 2.$$

Данное неравенство означает, что интенсивность участия в экономических отношениях государства не должна превышать интенсивности взаимодействия продавцов и покупателей. В противном случае дальнейшее развитие данных рыночных отношений невозможно.

Также, из данного математического соотношения видно, что интенсивность сил конкуренции играет стабилизирующую роль в устойчивом развитии рынка. Такую же положительную роль играет и свойство ценовой эластичности товаров-конкурентов ( $e_1 \geq 1, e_2 \geq 1$ ).

**2.** Производство запасов прочности обоих товаров должно быть строго отделено от нуля на величину, не меньшую произведения величины интенсивностей сил конкуренции, поскольку  $R_1 R_2 > c_1 c_2$ .

Если первое условие показывает влияние на устойчивость развития рыночных отношений для рынка каждого товара по-отдельности, то второе условие является общей параметрической характеристикой для рынка двух товаров и показывает возможность существования данного рынка в будущем.

Исследована пограничная ситуация устойчивости равновесия рынка конкурирующих товаров в экономических условиях, при которых может произойти дестабилизация рыночных отношений. Получены пограничные условия, выполнение которых позволит рынку функционировать без изменений, а также условия, при которых рыночные отношения прекратят существование в первоначальном виде.

Результаты данного исследования полезны в случае, когда нарушаются основные условия устойчивости рынка (см. выше) и необходимо выяснить, существует ли при этом возможность дальнейшего развития рынка:

**Утверждение 1.** *Экономическое равновесие  $p_1 = p_1^0, p_2 = p_2^0$  рынка двух взаимозаменяемых товаров асимптотически устойчиво, если запас прочности каждого из товаров-конкурентов строго положителен, т. е.*

$$v_1 + d_1 + c_1 - r_1(1 - e_1) > 0, \quad v_2 + d_2 + c_2 - r_2(1 - e_2) > 0,$$

*и выполняется одно из следующих двух условий:*

$$1) (v_1 + d_1 + c_1 - r_1(1 - e_1))(v_2 + d_2 + c_2 - r_2(1 - e_2)) > \left( c_1 + r_1 \frac{p_1^0}{p_2^0} e_{12} \right) \left( c_2 + r_2 \frac{p_2^0}{p_1^0} e_{21} \right)$$

*либо*

$$2) (v_1 + d_1 + c_1 - r_1(1 - e_1))(v_2 + d_2 + c_2 - r_2(1 - e_2)) = \left( c_1 + r_1 \frac{p_1^0}{p_2^0} e_{12} \right) \left( c_2 + r_2 \frac{p_2^0}{p_1^0} e_{21} \right),$$

$$F = 0, \quad G < 0.$$

Во всех остальных случаях, кроме ситуации  $F = 0$ ,  $G = 0$ , равновесие неустойчиво.

В случае  $F = 0$ ,  $G = 0$  необходимы дальнейшие исследования.

Величины  $F$  и  $G$  определяются следующими формулами:

$$F = M_{11}S_2^2 + M_{12}S_1R_2 + \left( \frac{S_1}{R_2} \frac{r_2e_{21}}{p_1^0} + \frac{r_1e_{12}}{p_2^0} \right) S_2R_2;$$

$$G = (R_1^2M_{11} + R_1S_1 \frac{r_1e_{12}}{p_2^0}) \left( 2M_{11}S_2 - 2M_{12}R_2 + \left( \frac{R_2}{S_1} \frac{r_1e_{12}}{p_2^0} + \frac{r_2e_{21}}{p_1^0} \right) (S_1 - S_2) \right) + (S_1 + S_2)(-H_{22}S_1^3 - S_2R_1^2H_{21}),$$

где

$$H_{1j} = \frac{v_j}{p'_j} - \frac{d_j}{p''_j}, \quad M_{1j} = H_{1j} - \frac{r_j e_j}{p_j^0}, \quad H_{2j} = \frac{v_j}{p_j'^2} + \frac{d_j}{p_j''^2}.$$

Видно, что условия устойчивости или неустойчивости представляют собой громоздкие выражения, включающие в себя все параметры математической модели. Для пояснения условий, опирающихся на выражения  $F$  и  $G$ , был рассмотрен более простой и наглядный случай, когда обоим товарам-конкурентам соответствуют полностью совпадающие значения параметров модели:

$$v = v_j, \quad d = d_j, \quad c = c_j, \quad r = r_j, \quad p = p_j^0, \quad p'_j = p', \quad p''_j = p'', \quad j = 1, 2,$$

$$e = e_1 = e_2, \quad e_{12} = e_{21}.$$

Тогда условие  $F = 0$  или  $F \neq 0$  соответственно равносильно соотношениям:

$$\frac{v}{p'} - \frac{d}{p''} = \frac{r(e - e_{12})}{p^0}$$

или

$$\frac{v}{p'} - \frac{d}{p''} \neq \frac{r(e - e_{12})}{p^0}.$$

С экономической точки зрения первое из этих равенств означает определенный паритет между продавцами, потребителями и государством с учетом свойств эластичности спроса по цене и перекрестной ценовой эластичности.

Из утверждения 1 следует, что в случае нарушения основных условий асимптотической устойчивости (см. стр. 10-11) ситуация на рынке станет неустойчивой, и в ближайшем будущем данный рынок ожидает трансформация либо разрушение.

Параметрические условия, полученные в виде утверждения 1, можно использовать при исследовании реальной рыночной ситуации, когда все параметрические значения известны. Таким образом, основные условия устойчивости 1, 2 (см. стр. 10-11) и дополнительные условия устойчивости (см. утверждение 1) позволяют получить характеристику ситуации на рынке в каждый момент времени.

Проведены исследования и получены результаты в виде утверждений для глобальной и локальной устойчивости экономического равновесия на рынке конкурирующих товаров. В полученных результатах представлены ограничения на коэффициент налогообложения в пользу коэффициента конкуренции, показывающие, что активность государства на стабильно развивающемся рынке не может быть выше активности основных участников торговли.

Предложена методика применения полученной динамической модели и теоретических результатов исследования данной модели для анализа реального рынка конкурирующих товаров, с учетом специфики функционирования и целей изучения поведения рынка, на примере рынка элитных товаров, рынка товаров повседневного спроса и белорусского рынка информационных технологий.

В данной главе также была построена и исследована модель рынка двух взаимодополняемых товаров (2).

$$\begin{cases} \frac{d_1 p_1}{dt} = \frac{v_1 p_1' (p_1 - p_1^0)}{p_1 - p_1^*} - \frac{d_1 p_1'' (p_1 - p_1^0)}{p_1^{**} - p_1} + \frac{r_1}{q_1^0} (p_1 q_1(p) - p_1^0 q_1^0), \\ \frac{d_2 p_2}{dt} = \frac{v_2 p_2' (p_2 - p_2^0)}{p_2 - p_2^*} - \frac{d_2 p_2'' (p_2 - p_2^0)}{p_2^{**} - p_2} + \frac{r_2}{q_2^0} (p_2 q_2(p) - p_2^0 q_2^0). \end{cases} \quad (2)$$

В данной модели отсутствует компонента, описывающая воздействие конкуренции.

Локальное представление функции объемов продаж вблизи точки покоя  $p_j = p_j^0$ ,  $j = 1, 2$ , для данной модели имеет следующий вид:

$$q_j(p) = q_j^0 - e_j \frac{q_j^0}{p_j^0} (p_j - p_j^0) - e_{ji} \frac{q_j^0}{p_i^0} (p_i - p_i^0) + o_j(\|p - p^0\|),$$

где ценовая эластичность и перекрёстная ценовая эластичность представлены следующими выражениями:

$$e_j = -\frac{p_j^0}{q_j^0} \frac{\partial q_j(p^0)}{\partial p_j}, \quad e_{jk} = -\frac{p_k^0}{q_j^0} \frac{\partial q_j(p^0)}{\partial p_k}, \quad j, k = 1, 2, \quad j \neq k.$$

Введены следующие обозначения:

$$S_j = v_j + d_j - r_j(1 - e_j), \quad R_j = -r_j p_{ji}^0 e_{ji}, \quad p_{ij}^0 = p_i^0 / p_j^0, \quad j, i = 1, 2,$$

где  $S_j$  – *запас прочности* рынка  $j$ -го товара.

Условия асимптотической устойчивости равновесия системы (2):

$$1) S_1 > 0, S_2 > 0; \quad 2) S_1 S_2 - R_1 R_2 > 0,$$

где  $S_j = v_j + d_j - r_j(1 - e_j) > 0, j = 1, 2,$  – *запас прочности рынка* для каждого из взаимодопляемых товаров,  $R_j = -r_j p_{ji}^0 e_{ji}, p_{ij}^0 = p_i^0 / p_j^0, j, i = 1, 2.$

*Основные условия асимптотической устойчивости равновесия на рынке взаимодопляемых товаров:*

**1.** Запас прочности рынка каждого из взаимодопляемых товаров должен быть строго положительным, т. е.

$$v_j + d_j - r_j(1 - e_j) > 0, \quad j = 1, 2.$$

Свойство ценовой эластичности товаров-комплементов ( $e_1 \geq 1, e_2 \geq 1$ ) играет стабилизирующую роль в устойчивом развитии рынка.

**2.** Производство запасов прочности обоих товаров должно быть строго отделено от нуля на величину, не меньшую произведения  $R_1 R_2$ .

Исследование данного рынка на предмет сохранения асимптотической устойчивости экономического равновесия в условиях нарушения основных условий устойчивости на рынке взаимодопляемых товаров дает более сложные параметрически результаты, чем для случая рынка конкурирующих товаров. Условия сохранения устойчивости на рынке взаимодопляемых товаров в данной ситуации более разнообразны и многозначны. Результаты исследования пограничных ситуаций сохранения устойчивости равновесия на рынке при нарушении основных условий устойчивости экономического равновесия получены в виде соответствующих утверждений и приведены в работе для общего параметрического случая, для случая постоянного объема продаж и для случая симметричных параметров для присутствующих товаров. Исследованы также условия глобальной и локальной устойчивости экономического равновесия на рынке взаимодопляемых товаров.

**Третья глава** посвящена задаче об оптимальной налоговой политике, построенной на основе моделей рынков взаимозаменяемых и

взаимодополняемых товаров, рассмотренных в главе 2.

Построение оптимизационной задачи производилось исходя из двух положений: сохранение устойчивости сложившихся рыночных отношений и пополнение государственного бюджета наилучшим образом за счет налогов. В результате, для случая взаимозаменяемых товаров, была получена следующая задача нелинейного программирования (3):

$$\begin{aligned}
 & r_1 p_1^0 q_1^0 + r_2 p_2^0 q_2^0 \rightarrow \max; \\
 & (H_1 + c_1 - r_1(1 - e_1))(H_2 + c_2 - r_2(1 - e_2)) - (c_1 + r_1 e_{12} p_{12}^0)(c_2 + r_2 e_{21} p_{21}^0) > 0; \\
 & r_j > 0, \quad r_j(1 - e_j) < H_j + c_j, \quad j = 1, 2,
 \end{aligned} \tag{3}$$

где в качестве критерия оптимальности берется выражение, пропорциональное суммарному государственному налогу с обоих продавцов;  $r_j$ ,  $j = 1, 2$ , являются искомыми переменными, а  $H_j = v_j + d_j$ ,  $j = 1, 2$ .

Сформулированная задача оптимизации (3) является нелинейной и многопараметрической. Произведена специальная классификация параметров задачи, с целью нахождения всех возможных экономически значимых решений задачи без пересечений и потери решений. Получены решения задачи об оптимальной налоговой политике на рынке взаимозаменяемых товаров для всех значений параметров, предусмотренных классификацией. Задача решена геометрическим методом на плоскости переменных  $(r_1, r_2)$ .

Задача об оптимальной налоговой политике для рынка взаимодополняемых товаров формулируется исходя из тех же предположений, что и для рынка взаимозаменяемых товаров, и сводится к следующей задаче нелинейного программирования (4):

$$\begin{aligned}
 & r_1 p_1^0 q_1^0 + r_2 p_2^0 q_2^0 \rightarrow \max; \\
 & (H_1 - r_1(1 - e_1))(H_2 - r_2(1 - e_2)) - r_1 r_2 e_{12} e_{21} > 0; \\
 & r_j > 0, \quad r_j(1 - e_j) < H_j, \quad j = 1, 2.
 \end{aligned} \tag{4}$$

Задача нелинейного программирования (4) является нелинейной и многопараметрической. Для этой задачи также была произведена классификация параметров и найдены решения геометрическим методом на плоскости переменных  $(r_1, r_2)$ . Даны экономически полезные рекомендации по применению результатов решения.

Найденные решения представленных задач помогают определить пути оптимизации налоговой политики, выявляя потенциальные возможности налогообложения для рассмотренных типов рынков.

## ЗАКЛЮЧЕНИЕ

### Основные научные результаты диссертации

Решены следующие задачи:

1. Для организации анализа процессов на рынках товаров, связанных в потреблении, предложены динамические модели рынков взаимодополняемых и взаимозаменяемых товаров, построенные с учетом величин эластичностей спроса по цене и перекрестных ценовых эластичностей, понятия запаса прочности рынка, пороговых и равновесных значений цен, равновесных значений объемов продаж, описывающие процесс сбыта товаров безотносительно к процессу производства [2, 3, 5, 6, 7, 9].

2. На основе анализа предложенных моделей получены условия устойчивости экономического равновесия для рынков взаимозаменяемых и взаимодополняемых товаров и представлены математически допустимые рамки регулирования рыночных показателей в условиях ненарушения равновесия на рынках [2, 3, 5].

3. Сформулирована и решена многопараметрическая задача нелинейного программирования для оптимизации налоговой политики на двухтоварных рынках для случаев взаимозаменяемых и взаимодополняемых товаров. Даны анализ и сравнение полученных результатов, приведены рекомендации для выработки оптимальной налоговой политики для двух типов рынков [1, 4, 8, 10].

Для каждой из моделей дана экономическая интерпретация результатов исследований устойчивости экономического равновесия и задачи оптимальной налоговой политики. Указаны тенденции зависимостей основных параметров функционирования рынка двух товаров, сохраняющие его устойчивое развитие, и отмечены потенциальные возможности налоговой политики.

Предложена методика применения полученных теоретических результатов для анализа реального рынка конкурирующих товаров. Рассмотрена специфика и приведены методы исследования различных рынков конкурирующих товаров на примере рынка элитных товаров, рынка товаров повседневного спроса и белорусского рынка информационных технологий. Полученные практическим путем результаты не противоречат теоретическим выводам.

Основными достоинствами построенных моделей является возможность учета таких характеристик рынка, как экономические силы продавцов, покупателей, государства, а также воздействие конкуренции. Модели дают возможность учесть влияние дополнительных экономических сил или игнорировать используемые силы вне зависимости от процессов производства

реализуемых товаров и тем самым сделать вклад в изучение комбинированных производственно-торговых отношений экономики.

### **Рекомендации по практическому использованию результатов**

Сегодня довольно остро стоит проблема исследования товарного рынка безотносительно к процессам производства, поскольку современная экономика характеризуется широким спектром рынков, которые ввиду своей многочисленности и разнообразия функционируют как независимая от производственного процесса система. Полученные методы исследования позволяют изучать рынок и прогнозировать тенденции его развития, опираясь на социально-экономические процессы без связи с производственными процессами.

Предложенные в работе модели могут быть полезны экономистам-теоретикам, исследующим процессы конкурентного рынка, поскольку они легко трансформируемы для рынков многих типов, позволяют получать разнообразные многопараметрические зависимости, насыщенные нетривиальным экономическим смыслом.

Также они являются полезными для использования экономистами-практиками, которые с помощью данных моделей смогут организовать и систематизировать сбор и хранение полезной экономической информации, построить математический образ рынка, использовать уже полученные теоретическим путем результаты исследования модели в целях анализа конкретной рыночной ситуации, получить рекомендации и прогнозы поведения рынка в каждый момент времени.

В результате проведенных исследований были получены зависимости экономических параметров и выявлены экономически значимые тенденции и взаимосвязи, которые могут быть использованы для принятия решений как на научно-исследовательском уровне, так и на социально-экономическом и государственном уровнях при выработке экономической политики регулирования торговых рынков и стратегии налогообложения.

Полученные в диссертации результаты могут служить основой для анализа более сложных рыночных отношений, таких, например, как построение и исследование модели рынка трех и более конкурентов, для описания отношений на рынках, имеющих определенную специфику (например, финансовых, валютных), решения ряда маркетинговых задач, построения антикризисных и стабилизирующих программ развития определенных рынков и др.

На основе полученных в данной диссертации результатов ведется работа по построению дискретной модели экономических рынков первого порядка и

модификации условий экономического равновесия для случая дискретной модели.

Результаты диссертации внедрены в работу маркетингового отдела по продаже продукта СЭД на белорусском рынке компании «Группа компаний ИВА». Анализ рынка на основе полученных в работе методов наглядно продемонстрировал позицию компании на рынке данного продукта и возможности оптимизации ценовой и маркетинговой политики компании, с учетом всех преимуществ, предоставляемых рынком. На основе проведенного анализа было принято решение на уровне маркетингового отдела по реорганизации продуктовой линейки исследованного продукта СЭД и реформированию правил формирования цены на данный продукт.

Результаты диссертации вошли в учебное издание «Математические модели первого порядка конкурентного рынка» (Минск, БГУ, 2011), в курс лекций «Математические модели экономики» кафедры методов оптимального управления Белорусского государственного университета для студентов специальности «Экономическая кибернетика» факультета прикладной математики и информатики БГУ, а также в курсы лекций «Математические модели экономики» и «Теория рынка» кафедры аналитической экономики и эконометрики БГУ для студентов экономического факультета БГУ.

## **СПИСОК ПУБЛИКАЦИЙ СОИСКАТЕЛЯ ПО ТЕМЕ ДИССЕРТАЦИИ**

*Статьи в рецензируемых научных журналах,  
соответствующих требованиям ВАК Беларуси*

1. Трухан, Е.В. Задача об оптимальной налоговой политике в модели первого порядка рынка двух взаимодополняющих товаров / Е.В. Трухан // Труды Минского института управления. – 2009. – № 1(9). – С. 102–107.
2. Калитин, Б.С. Устойчивость рынка двух взаимодополняющих товаров / Б.С. Калитин, Е.В. Трухан // Сб. науч. тр. / Экономика, моделирование, прогнозирование. – 2011. – Вып. 5. – С. 213–225.
3. Калитин, Б.С. Динамическая модель рынка двух товаров с нулевым запасом прочности / Б.С. Калитин, Е.В. Трухан // Управление экономическими системами: электронный научный журнал [Электронный ресурс]. – Дата публикации: 30.11.11. – № гос. рег. статьи: 0421100034. – Режим доступа: <http://uecs.ru/instrumentalnii-metody-ekonomiki/item/819-2011-11-30-08-46-51>. – Дата доступа: 04.01.2012.

### *Статьи в научных рецензируемых журналах*

4. Калитин, Б.С. Об оптимальной налоговой политике на рынке двух взаимозаменяемых товаров / Б.С. Калитин, Е.В. Трухан // Вестник БГУ. Сер.1, Физика. Математика. Информатика. – 2008. – № 3. – С. 80–85.

5. Калитин, Б.С. Устойчивость рынка двух взаимозаменяемых товаров / Б.С. Калитин, Е.В. Трухан // Вестник БГУ. Сер.1, Физика. Математика. Информатика. – 2011. – № 2. – С. 91–95.

### *Материалы и тезисы докладов конференций*

6. Трухан, Е.В. Рынок взаимодополняемых товаров / Е.В. Трухан // Dynamical systems modeling and stability investigation: тезисы докладов Междунар. науч. конф., Киев, 22–25 мая 2007 г. // Киевский нац. ун-т им. Тараса Шевченки; науч. ред. Д.Я. Хусаинов. – Киев, 2007. – С. 240.

7. Трухан, Е.В. Модель рынка двух взаимодополняющих товаров / Е.В. Трухан, Б.С. Калитин // Управление в социальных и экономических системах: материалы Междунар. науч.-практ. конф., Минск, 16–17 июня 2007 г. // Минский ин-т управления; редкол.: Н.В. Суша (пред.) [и др.]. – Минск : Изд-во МИУ, 2007. – С. 368–370.

8. Трухан, Е.В. Задача об оптимальной налоговой политике в модели рынка двух взаимодополняющих товаров / Е.В. Трухан // Управление в социальных и экономических системах: материалы Междунар. науч.-практ. конф., Минск, 2–6 июня 2008 г. // Минский ин-т управления; редкол.: Н.В. Суша (пред.) [и др.]. – Минск : Изд-во МИУ, 2008. – С. 280–282.

9. Трухан, Е.В. Рынок двух взаимодополняющих товаров с постоянным объемом продаж / Е.В. Трухан // X Белорусская математическая конференция: тезисы докладов Междунар. науч. конф., Минск, 3–7 ноября 2008 г. // Институт математики НАН Беларуси ; ред. С.Г. Красовский, А.А. Лепин. – Минск, 2008. – Ч. 2. – С. 69–70.

10. Трухан, Е.В. The comparison of the two interchangeable goods market model and the two complementary goods market model / Е.В. Трухан // Современные научные достижения: материалы Междунар. науч. конф., Прага, 27 января – 5 февраля 2009 г. // гл. ред. Zdenek Cernak. – Прага: Education and science, 2009. – С. 8–14.

# РЭЗІЮМЭ

Трухан Кацярына Уладзіміраўна

## Дынамічная мадэль рынку канкуруючых тавараў і рынку ўзаемадапаўняльных тавараў

**Ключавыя словы:** нелінейная дынамічная мадэль рынку, узаемазамыняльныя і ўзаемадапаўняльныя тавары, устойлівасць эканамічнай раўнавагі, аптымізацыя падатковай палітыкі.

**Мэта даследвання:** пабудова дынамічных мадэляў рынкаў тавараў, звязаных у спажыванні. Атрыманне ўмоў іх эфектыўнага функцыянавання на аснове аналізу пабудаваных мадэляў з дапамогай тэорыі ўстойлівасці. Атрыманне аптымальных рэкамендацый па падаткаабкладанню даследаваных рынкаў ва ўмовах змянення эканамічных параметраў у часе пры ўмове непарушэння раўнавагі на кожным з рынкаў.

**Метады даследавання:** тэорыя нелінейных звычайных дыферэнцыяльных ураўненняў і сістэм, якасная тэорыя дыферэнцыяльных ураўненняў, тэорыя ўстойлівасці становішча раўнавагі ў дыферэнцыяльных сістэмах у сэнсе Ляпунова, метады аптымізацыі, нелінейнае праграмаванне, метады эканамічнага аналізу рынку канкуруючых тавараў і рынку ўзаемадапаўняльных тавараў.

**Атрыманыя вынікі і іх навізна:** пабудаваны дынамічныя мадэлі рынкаў узаемазамыняльных і ўзаемадапаўняльных тавараў, атрыманы высновы аб устойлівасці эканамічных адносін на розных тыпах рынкаў адносна знешняга і ўнутранага механізму ўздзеяння на рынак, сфармулявана і вырашана шматпараметрычная задача нелінейнага праграмавання для аптымізацыі падатковай палітыкі на даследваных рынках.

**Рэкамендацыі па выкарыстанню:** карэкціроўка цэнавой і маркетынгавай палітыкі пры рэалізацыі тавару, распрацоўка стратэгіі рэгулявання рынкавых працэсаў звонку. Аптымізацыя падатковай палітыкі. Пабудовы больш складаных мадэляў на аснове існуючых, дыскрэтызацыя ўжо існуючых мадэляў. Вынікі дысертацыі ўкаранёны на беларускім рынку ІТ (прадукт СЭД), выкарыстоўваюцца ў навучальных дапаможніках і ў курсах лекцый для студэнтаў БДУ.

**Галіна выкарыстання:** даследаванне рынкаў тавараў, звязаных ў спажыванні, аптымізацыя дзейнасці гандлёвых кампаній сіламі саміх кампаній і пры дапамозе знешніх наглядных арганізацый, падаткаабкладанне, навучальны працэс.

# РЕЗЮМЕ

Трухан Екатерина Владимировна

## Динамическая модель рынка конкурирующих товаров и рынка взаимодополняемых товаров

**Ключевые слова:** нелинейная динамическая модель рынка, взаимозаменяемые и взаимодополняемые товары, устойчивость экономического равновесия, оптимизация налоговой политики.

**Цель работы:** построение динамических моделей рынков товаров, связанных в потреблении. Получение условий их эффективного функционирования на основе анализа построенных моделей с помощью теории устойчивости. Получение оптимальных рекомендаций по налогообложению исследуемых рынков в условиях изменения экономических параметров во времени при условии ненарушения равновесия на каждом из рынков.

**Методы исследования:** теория обыкновенных нелинейных дифференциальных уравнений и систем, качественная теория дифференциальных уравнений, теория устойчивости положения равновесия в дифференциальных системах в смысле Ляпунова, методы оптимизации, нелинейное программирование, методы экономического анализа рынка конкурирующих товаров и рынка взаимодополняемых товаров.

**Полученные результаты и их новизна:** построены динамические модели рынков взаимозаменяемых и взаимодополняемых товаров, получены выводы об устойчивости экономических отношений на различных типах рынков относительно внешнего и внутреннего механизма воздействия на рынок, сформулирована и решена многопараметрическая задача нелинейного программирования для оптимизации налоговой политики на рынках.

**Рекомендации по использованию:** корректировка ценовой и маркетинговой политики при реализации товара, разработка стратегий регулирования рыночных процессов извне. Оптимизация налоговой политики. Построение более сложных моделей на основе существующих, дискретизация уже существующих моделей. Результаты диссертации внедрены на белорусском рынке ИТ (продукт СЭД), используются в учебных пособиях и в курсах лекций для студентов БГУ.

**Область применения:** исследование рынков товаров, связанных в потреблении, оптимизация деятельности торговых компаний силами самих компаний и при помощи внешних надзорных организаций, налогообложение, учебный процесс.

# SUMMARY

Trukhan Katsiaryna Yladimirayna

## **The dynamical model of competitive goods market and market of complementary goods**

**Key words:** non-linear dynamical model of market, interchangeable and complementary goods, economic equilibrium stability, taxation politics optimization.

**Purpose of research:** development of dynamical models of commodities bound in consumption markets. Obtainig conditions of their effective operation using the stability theory for the models analyzing. Receiving optimal recommendations of investigated markets taxation in the context of changing economic parameters dynamic with a condition of each market equilibrium stability.

**Methods of research:** theory of ordinary non-linear differential equations and systems, qualitative theory of differential equations, Lyapunov stability theory for differential systems, optimization methods, non-linear programming, economic methods of competitive goods market and complimentary goods market analysis.

**Findings and their novelty:** the dynamical models of interchangeable and complementary goods markets have been developed, conclusions of different markets types economic relations stability depending on external and internal mechanism of market affecting have been obtained, the multivariable task of two interchangeable and complementary goods markets taxation policy optimization has been worked-out and resolved.

**Implementation recommendations:** the prices and marketing politics adjustment during the goods realization process, the market processes adjustment and taxation policy optimization strategy working-out. The results of the research can be a basis of more complex models constructing and the existent models discretization.

The results of dissertation are inculcated in work process of Buelorussian IT market on the sale of SED product (The System of Electronical Documentation).

The obtained theoretical results are included in study guides and special lectures courses for the students of Buelorussian State University.

**Sphere of application:** scientific activities on commodities bound in a consumption markets research, the trade activity optimization of company by means of the company or through external supervisory firms, taxation policy, and educational process.