ОБОБЩЕННАЯ МОДЕЛЬ ГОРОДСКОЙ СИСТЕМЫ (ОБОБЩЕННАЯ СИСТЕМА ЛОРЕНЦА)

С. С. Белявский, Т. А. Орлянин

belyav@mail.ru

В настоящей работе делается попытка обобщить известную модель городской системы, построенную на основе системы дифференциальных уравнений Лоренца, чтобы иметь возможность глубже исследовать основные тенденции развития города.

Введение. В настоящее время математическое моделирование является неотъемлемой частью научных исследований практически во всех отраслях знаний. Неуклонно растет интерес и к моделированию экономических процессов [1–7]. Это связано со структурными изменениями мировой экономической системы, с разрушительными финансовыми кризисами, имевшими место в последнем десятилетии. Принципиальная особенность математического моделирования в экономике, в отличие от технических наук, невозможность экспериментов и важность соответствующих задач. Чтобы прогнозировать развитие экономических процессов, надо уметь строить адекватную математическую модель. Важную роль в прогнозировании играет стохастическое моделирование и, в частности, эконометрическое, которое позволяет предвидеть развитие событий в краткосрочной перспективе, но редко дает возможность обнаружить приближение кризисов. Более того, такие модели требуют большого статистического материала и умения его обрабатывать.

Исследования последних лет показывают, что динамика экономических систем различного уровня (страны, региона, города, отрасли, производственного и торгового предприятия и других объектов экономики) адекватно описывается многозвенными операторными взаимоотношениями, охваченными обратными связями. При моделировании сценариев развития экономической системы, наряду с определением количественных показателей, важно исследовать и качественные характеристики системы в зависимости от условий, в которых она находится. Изучить, а, следовательно, предвидеть ее структурное изменение. Одними из возможных моделей, позволяющих выявлять на начальном этапе исследования точки бифуркации, разделяющие условия устойчивого развития системы от более сложного ее поведения, являются детерминированные динамические модели. И хотя понятно, что реальная экономическая система не может быть полностью описана никакой, даже самой предусмотрительной моделью, тем не менее, она может дать много информации о развитии событий. Такие модели служат скорее не для получения конкретных прогнозных показателей, а дают возможность предвидеть общую картину развития событий и избежать нежелательную динамику экономической системы.

Моделирование динамики городской системы. Следуя [1], будем рассматривать городскую систему, в отношении которой предполагается, что ее экономическая деятельность очень мала по сравнению с окружающим миром. Это значит, что любые изменения экономических условий в городской системе не влияют на окружение, которое остается структурно устойчивым в течение времени наблюдения. Очевидно, что это предположение на больших временных промежутках несправедливо.

Предполагается так же, что характеристики городского пространства описываются следующими тремя переменными:

X – объем продукции, производимый городской системой;

Y – численность коренного населения;

Z – земельная рента.

Продукция городской промышленности может идти на потребление населения или экспортироваться вовне. Предполагается, что возможна следующая динамика города:

$$\begin{cases} \dfrac{dX}{dt} = a_1(a_2Y - a_3X), \\ \dfrac{dY}{dt} = b_1(b_2X - b_3Y) - b_4XZ, \\ \dfrac{dZ}{dt} = c_1XY - c_2Z, \end{cases} \tag{1}$$

где a_i, b_i, c_i – положительные параметры.

Параметр a_2 представляет величину спроса на городскую продукцию, нормированную на душу населения, а параметр a_3 интерпретируется как уровень предложения продукции внутри города. Поскольку рассматриваются только небольшие отрезки времени, то величины a_2 и a_3 можно считать постоянными. Параметр a_1 – коэффициент, имеющий смысл скорости установления.

Предполагается, что изменение численности городского населения задается двумя членами $b_1(b_2X - b_3Y)$ и b_4XZ. Величина b_2 интерпретируется как спрос на труд со стороны фирм для производства единицы продукции. Параметр b_3 определяется как доля городских жителей, выбирающих работу в городе. Член $(b_2X - b_3Y)$ пропорционален избытку спроса на труд в городе. Он влияет на направление миграции. Член b_4XZ учитывает, что на миграцию влияет также величина земельной ренты и объем продукции, производимой городской системой.

В третьем уравнении системы (1) предполагается, что рост величины земельной ренты отрицательно влияет на ее текущий уровень. Член c_2XY означает, что на изменения земельной ренты положительно влияют объем продукции, производимый в городе и численность его населения.

Заменой переменных система уравнений (1) сводится к системе Лоренца, которая хорошо изучена [8].

Недостатком такой системы является то, что в ней не учтено влияние внешнего мира на городскую систему. На наш взгляд, такое воздействие может быть в некоторой мере описано постоянно действующими возмущениями. Таким образом, вместо системы (1) будем рассматривать возмущенную систему

$$\begin{cases} \dfrac{dX}{dt} = a_1(a_2Y - a_3X) + F_1(X, Y, Z), \\ \dfrac{dY}{dt} = b_1(b_2X - b_3Y) - b_4XZ + F_2(X, Y, Z), \\ \dfrac{dZ}{dt} = c_1XY - c_2Z + F_3(X, Y, Z). \end{cases} \tag{2}$$

Внешние возмущения в зависимости от уравнения, на которое они воздействуют, имеют свою интерпретацию. Так возмущения F_1 могут характеризовать рост (снижение) инвестиционной активности, рост (снижение) налоговой нагрузки на предприятия, выделение субсидий из госбюджета на развитие промышленного производства. Возмущения F_2 могут отражать, например, рост (снижение) социальных расходов в части организации, содержания и развития учреждений образования, здравоохранения, культуры, физической культуры и спорта, СМИ; увеличение или уменьшение расходов на организацию правоохранительной деятельности и обеспечение безопасности; расходы бюджета на строительство жилого фонда.

Функция F_3 описывает те факторы, которые непосредственно влияют на рост земельной ренты. Это могут быть изменения в городской инфраструктуре, дорожное строительство и содержание дорог, благоустройство и озеленение территорий.

Известно [8], что система Лоренца диссипативна, а, следовательно, диссипативна и система (1). Можно доказать ее диссипативность непосредственно, если, например, рассмотреть функцию Ляпунова вида

$$V = b_1 b_2 b_4 c_1 X^2 + a_1 a_2 b_4 c_1 Y^2 + a_1 a_2 (b_4 Z - 2 b_1 b_2)^2, \tag{3}$$

производная которой вдоль решений системы (1) для больших X, Y, Z отрицательная.

Функцию Ляпунова (3) можно использовать для вывода условий, при которых возмущенная система (2) диссипативна. Справедлива следующая теорема.

Теорема 1. *Система (2) диссипативна, если функции F_1, F_2, F_3 непрерывны и удовлетворяют условию*

$$b_1 b_2 c_1 X F_1 + a_1 a_2 c_1 Y F_2 + a_1 a_2 (b_4 Z - 2 b_1 b_2) F_3 <$$

$$< a_1 a_3 b_1 b_2 c_1 X^2 + a_1 a_2 b_1 b_3 c_1 Y^2 + a_1 a_2 c_2 Z (b_4 Z - 2 b_2 b_1).$$

Из теоремы следует, что существует широкий класс возмущений, при которых система (2) остается диссипативной. Хотя численные методы интегрирования показывают, что ее особые точки могут быть, как устойчивыми, так и неустойчивыми, а при некоторых значениях параметров могут возникать периодические решения и даже странные аттракторы.

Обобщение модели. Городская система, описываемая тремя уравнениями, является достаточно упрощенной, поскольку не включает другие важные характеристики, от которых зависит ее развитие. По нашему мнению, городская транспортная система — одна из существенных составляющих городского пространства, включение которой может значительно улучшить модель. Показателем ее состояния может служить средняя скорость передвижения в городе. Обозначим этот показатель через U и построим следующую обобщенную модель городской системы

$$\begin{cases} \dfrac{dX}{dt} = a_1(a_2 Y - a_3 X), \\ \dfrac{dY}{dt} = b_1(b_2 X - b_3 Y) - b_4 X Z, \\ \dfrac{dZ}{dt} = c_1 X Y - c_2 Z + c_3 U, \\ \dfrac{dU}{dt} = d_1 X - d_2 U, \end{cases} \tag{4}$$

где a_i, b_i, c_i, d_i – положительные параметры.

При построении системы уравнений (4) предполагаем, что развитие городского транспорта непосредственно влияет на величину земельной ренты (член c_3U, включенный в третье уравнение).

В четвертом уравнении задается изменение транспортной системы, которое обусловлено двумя факторами d_1X и d_2U. Параметр d_1 интерпретируется как спрос на транспорт со стороны фирм для перевозки единицы произведенной продукции. Следовательно, d_1X – это общий спрос на транспорт. Развитость городской транспортной системы не требует дальнейшего ее улучшения. Член d_2U учитывает это обстоятельство.

Изучим некоторые свойства системы (4). Для уменьшения числа параметров введем обозначения $A_1 = a_1a_3$, $A_2 = a_1a_2$, $B_1 = b_1b_2$, $B_2 = b_1b_3$, $B_3 = b_4$, $C_i = c_i$, $i = \overline{1,3}$, $D_j = d_j$, $j = 1, 2$. Тогда система (4) примет вид

$$\begin{cases} \dfrac{dX}{dt} = -A_1X + A_2Y, \\ \dfrac{dY}{dt} = B_1X - B_2Y - B_3XZ, \\ \dfrac{dZ}{dt} = C_1XY - C_2Z + C_3U, \\ \dfrac{dU}{dt} = D_1X - D_2U, \end{cases} \tag{5}$$

В системе (5) сделаем замену переменных. Положим

$$x = \sqrt{\frac{B_3}{C_1}}\frac{C_1}{B_2}X, \qquad y = \sqrt{\frac{B_3}{C_1}}\frac{A_2C_1}{A_1B_2}Y,$$

$$z = \frac{A_2B_3}{A_1B_3}Z, \qquad u = \sqrt{\frac{B_3}{C_1}}\frac{C_1D_2}{B_2D_1}U, \qquad T^* = \frac{t}{B_2}.$$

Введем следующие обозначения

$$\sigma = \frac{A_1}{B_2}, \qquad r = \frac{A_2B_1}{A_1B_2}, \qquad b = \frac{C_2}{B_2},$$

$$k = \sqrt{\frac{B_3}{C_1}}\frac{A_2C_3D_1}{A_1B_2D_2}, \qquad n = \frac{1}{B_2D_2}.$$

В результате придем к системе дифференциальных уравнений

$$\begin{cases} x' = \sigma(y - x), \\ y' = rx - y - xz, \\ z' = xy - bz + ku, \\ u' = n(x - u). \end{cases} \tag{6}$$

Свойства системы (6). Приведем некоторые легко проверяемые свойства.

1. Ось z является инвариантом. Все траектории, начинающиеся на оси z, остаются на ней и притягиваются к началу координат.

2. В зависимость от знака выражения $Q = k^2 - 4b(r-1)$ система (6) может иметь одну, две или три особые точки. Если $Q < 0$, то система имеет одну особую точку $x = 0, \quad y = 0, \quad \mathrm{z} = 0, \mathrm{u} = 0$. Если $Q = 0$, то система имеет две особые точки. Кроме начала координат имеется еще точка $x = y = u = -k/2$, $z = r - 1$. Если $Q > 0$, то система имеет три особые точки – начало координат и точки $x = y = u = \dfrac{-k \pm \sqrt{Q}}{2}$, $z = r - 1$.

Исследуем поведение траекторий системы (6) в окрестности особых точек. Матрицы A линейной части системы имеет собственные значения $\lambda_1 = -n$, $\lambda_2 = -b$, $\lambda_{3,4} = -\dfrac{1 + \sigma \pm \sqrt{(\sigma - 1)^2 + 4r\sigma}}{2}$. При $r < 1$ все собственные значения отрицательны и начало координат – асимптотически устойчивая особая точка. При $r > 1$ имеется одно положительное собственное значение и начало координат – неустойчивая особая точка. При $r = 1$ имеется одно собственное значение равное нулю и начало координат может быть как устойчивым, так и не устойчивым в зависимости от других параметров системы.

Линеаризуя систему в окрестности других особых точек и используя средства компьютерной математики, можно также вычислить собственные значения ее матрицы. В общем виде выражения для собственных значений достаточно громоздкие и труднообозримые. Из таких вычислений можно сделать вывод, что в случае двух особых точек, когда $Q = 0$, в окрестности точки $(-k/2, -k/2, z - 1, -k/2)$ матрица линейной части системы имеет одно нулевое собственное значение.

Более подробное исследование поведения траекторий в окрестности особых точек может быть проведено следующим способом. Фиксируя значения параметров $\sigma,\ b,\ k,\ n$, изменяем значения r. В качестве примера рассмотрим случай $\sigma = 10$, $b = 8/3$, $k = 5$, $n = 2,5$. В особой точке с координатами $x = y = u = -5/2 + 1/6\sqrt{321 + 96r}$, $z = r - 1$

собственные значения при различных значениях r приведены в следующей таблице.

Таблица 1

Пределы изменения r	Собственные значения
$r < -20.5$	$\lambda_1, \lambda_2 < 0.$ $\lambda_{3,4} = \alpha \pm i\beta,\ \alpha > 0$
$-20.5 \leqslant r < 0.7$	$\lambda_1, \lambda_2 < 0.$ $\lambda_{3,4} = \alpha \pm i\beta,\ \alpha > 0$
$0.7 \leqslant r < 1$	$\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4 < 0$
$r = 1$	$\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 < 0,\ \lambda_4 = 0$
$1 < r < k^2/4b + 1 \approx 3.34$	$\lambda_1, \lambda_2 < 0.$ $\lambda_{3,4} = \alpha \pm i\beta,\ \alpha > 0$

В особой точке с координатами $x = y = u = -5/2 - 1/6\sqrt{321 + 96r}$, $z = r - 1$ два отрицательные собственные значения и два комплексно-сопряженные, действительная часть которых при $r < -13.8$ положительна, а при $-13.8 < r < -3.34$ – отрицательна.

3. При определенных параметрах система (6) может иметь как периодические решения, так и странные аттракторы. Так, например, при $\sigma = 10$, $b = 8/3$, $k = 5$, $n = 2,5$, $r = 19,5$ существуют периодические решения системы (6), а при $\sigma = 10$, $b = 8/3$, $k = 5$, $n = 2,5$, $r = 100$ имеется странный аттрактор. Эти результаты получены численно. Вычисления проводились в системе MatLAB/Simulink.

Экономическая интерпретация модели. Дать полную и всестороннюю интерпретацию динамики города в настоящей статье не представляется возможным. Исследуем только отдельные случаи, при которых возникает качественная трансформация экономической динамики города. Покажем, что даже при изменении одного параметра системы (4) принципиально по иному происходит его развитие.

Построим модель небольшого города, в котором преобладает сфера обслуживания. Выберем следующие параметры. Коэффициент установления a_1 положим равным единице. Спрос на продукцию, произведенную в городе, и ее предложение установим равными $a_2 = a_3 = 10$. Параметры b_1, b_2, b_3 выберем так, чтобы с учетом начальных условий величина $b_1(b_2X - b_3Y)$, влияющая на изменение численности населения, была отрицательной.

Пусть $b_1 = 1$, $b_2 = 5$, $b_3 = 1$, $b_4 = 1$. Это значит, что имеется высокий спрос на труд на единицу произведенной продукции, и все трудоспособное население находит работу в городе. Поскольку городской бюджет формируется за счет земельной ренты, то она должна быть достаточно большой. Положим $c_1 = 10$, $c_2 = 3$, $c_3 = 5$. Будем считать, что транспортная система не достаточно развита и имеет потребность в совершенствовании. Она должна достаточно интенсивно развиваться за счет увеличения населения. Поэтому коэффициент d_1 больше, например, $d_1 = 1.6$, а d_2 меньше единицы ($d_2 = 0.4$). При таких параметрах решение системы стремится к точке равновесия, координаты которой приблизительно равны $(0.4838,\ 0.4832,\ 4.0,\ 1.9328)$.

Проведем расчеты, изменив только спрос на труд с $b_2 = 5$ на $b_2 = 10$, и в результате получим устойчивую точку равновесия (0.9212, 0.9237, 9.0, 3.6973). Отсюда видим, что численность населения города и объем произведенной продукции, а так же уровень развитости транспортной системы увеличились менее чем в два раза, земельная рента возросла более чем в два раза. Это можно объяснить тем, что увеличение спроса на труд в два раза делает город привлекательным для проживания, но высокая земельная рента сдерживает рост населения, а, следовательно, и объем производимой продукции. Если параметр b_2 принимает значение большее чем 10.8, то сначала координаты точки равновесия возрастают, но она становится неустойчивой. При дальнейшем его увеличении возникает странный аттрактор, например, при $b_2 = 20$. Высокий спрос на труд требует притока рабочей силы, а это в свою очередь влияет на скорость роста земельной ренты, и сильное ее увеличение сдерживает приток рабочей силы. В рамках данной модели при некоторых значениях параметра b_2 развитие городской система не стремится к равновесию, а возникает детерминированный хаос.

Подобные результаты можно получить, изменяя другие параметры системы. Например, при увеличении параметров c_1 или c_3 также возникает странный аттрактор. Из этого можно сделать вывод, что быстрый рост земельной ренты не способствует стабильному развитию городской системы.

Список литературы

[1] Занг В.Б. *Синергетическая экономика. Время и перемены в нелинейной теории.* М.: Мир, 1999.

[2] Самарский А.А., Михайлов А.П. *Математическое моделирование. Методы. Идеи. Примеры.* М: Физматлит, 2001.

[3] Царьков В.А. *Моделирование экономической динамики банка* // Банковское дело. 2000. №6. С. 25–30.

[4] Дыхта В.А. *Динамические системы в экономике. Введение в анализ одномерных моделей.* Иркутск: БГУЭП, 2003.

[5] Агапова Т.М., Бехренс Д., Курран Д. *Динамические системы в экономике.* Донецк: ДонГУ, 2000.

[6] Волгина 0.А., Голодная Н.Ю., Одилко Н.Н., Шуман Г.И. *Математическое моделирование экономических процессов и систем.* М., 2011.

[7] Сотсков А.И., Колесник Г.В., *Управление динамическими системами в задачах экономики.* Тверь, 2005.

[8] Sparrow C. *The Lorenz Equations: Bifurcations, Chaos, and Strange Attractors.* Springer, Berlin, Heidelberg, 1982.