

$x \in X$). Рассмотрим топологию на множестве вероятностных мер $M_1(X)$, порожденную окрестностями вида

$$O_\varepsilon(\nu) = \left\{ \delta \in M_1(X) : \sum_{x \in X} |\delta(x) - \nu(x)| < \varepsilon \right\}, \quad \nu \in M_1(X), \quad \varepsilon > 0 \quad (5)$$

(другими словами, топологию пространства $L^1(X, \mu)$). Тогда для любой окрестности (5) и любого числа $C > 0$ существует такое конечное подмножество $X_0 \subset X$, что при всех достаточно больших n

$$\mu^n \left\{ x = (x_1, \dots, x_n) \in X_0^n \mid \delta_{x,n} \in O(\nu) \right\} > e^{Cn}. \quad (6)$$

Рассматриваемая топология $M_1(X)$ содержит слабую топологию, порожденную ограниченными функциями. Отсюда следует, что при $C > -\rho(\nu, \mu)$ оценка (3) вступает в противоречие с (6) и потому не может иметь места.

Литература

1. Бахтин, В.И. Спектральный потенциал, действие Кульбака и большие отклонения эмпирических мер на измеримых пространствах // Теория вероятностей и ее приложения. 2014. Т. 59, № 4. С. 625–638.

РАСПОЗНАВАНИЕ A_4 -СТРУКТУРЫ $(1, \infty)$ -ПРОСТЫХ ГРАФОВ

В. А. Тимофеева

ВВЕДЕНИЕ

В работе рассматриваются конечные неориентированные графы без петель и кратных ребер. Множества вершин и ребер (гипер)графа G обозначаются через $V(G)$ и $E(G)$ соответственно; если $X \subseteq V(G)$, то $G[X]$ – подграф графа G , порожденный множеством X .

Подмножество S вершин графа G называется *независимым*, если никакие две его вершины не смежны в G . Если для множества $S \subseteq V(G)$ каждая вершина из S смежна со всеми вершинами из $V(G) \setminus S$, то S называется *сильно доминирующим* множеством графа G .

A_4 -структурой произвольного графа G называется гиперграф H , определяемый условиями: $V(H) = V(G)$, и подмножество $U \subseteq V(G)$ является ребром в H , если и только если порожденный подграф $G[U]$ изоморфен какому-либо из графов $2K_2$, C_4 , P_4 . A_4 -структура графа G обозначается через $A(G)$.

Понятие A_4 -структуры ввели М. Баррус и Д. Вест [1]. Интерес к ее исследованию обусловлен следующими соображениями.

Известно, что для ряда трудно вычислимых в общем случае параметров графа в классе совершенных графов существуют полиномиальные алгоритмы их нахождения. В [1] доказано, что два графа с одинаковыми A_4 -структурами либо оба совершенны, либо оба не совершенны. Тем самым, в любом классе графов, A_4 -изоморфных графам из некоторого подкласса P совершенных графов, упомянутые выше параметры вычисляются за полиномиальное время. Здесь стоит отметить, что класс графов, A_4 -изоморфных графам из P , является расширением класса P .

Во-вторых, каждое ребро A_4 -структуры графа порождает в этом графе подграф, допускающий операцию переключения. В результате применения этой операции степенная последовательность графа не меняется, хотя результат операции, вообще говоря, уже не изоморфен исходному графу. Один из центральных результатов теории степенных последовательностей утверждает, что графы с одинаковыми степенными последовательностями могут быть получены один из другого с помощью некоторой цепочки переключений. Таким образом, при исследовании A_4 -структур могут быть установлены новые связи между A_4 -структурой и степенной последовательностью графа.

Граф называется *пороговым*, если он не содержит порожденного подграфа, изоморфного какому-либо из графов $2K_2$, C_4 или P_4 .

Таким образом, поскольку A_4 -структура порогового графа не содержит ребер, представляется интересным изучение A_4 -структуры ближайших расширений пороговых графов. Так, в [1] исследовалась A_4 -структура расщепляемых графов. В данной работе в качестве расширения пороговых графов рассмотрен класс $(1, \infty)$ -простых графов.

Граф, который можно получить из одновершинного графа с помощью последовательных операций соединения или дизъюнктного объединения с полным графом, назовем $(1, \infty)$ -*простым графом*.

Обозначим через $A \circ G$ и $B \circ G$ графы, полученные из графа G и некоторого полного графа в результате операции соединения и дизъюнктного объединения, соответственно.

При $k \geq 1$ положим $G_k \circ G_{k-1} \circ \dots \circ G_1 \circ G_0 = G_k \circ (G_{k-1} \circ (\dots \circ (G_1 \circ G_0) \dots))$, где $G_i = A$ или $G_i = B$ при $i = 1, 2, \dots, k$. По определению, всякий $(1, \infty)$ -простой граф G может быть представлен в виде

$$G = G_k \circ \dots \circ G_1 \circ G_0, \quad (1)$$

где $G_0 = K_1$, $G_i = A$ или $G_i = B$ при $i = 1, 2, \dots, k$. Компоненту G_i в представлении (1) назовем *A-компонентой* (*B-компонентой*), если $G_i = A$ (со-

ответственно $G_i = B$). Можно считать, не ограничивая общности, что не существует двух соседних компонент G_i и G_{i+1} таких, что $G_i = G_{i+1} = A$, $i = 1, 2, \dots, k-1$.

A4-СТРУКТУРА $(1, \infty)$ -ПРОСТОГО ГРАФА

Пусть задан $(1, \infty)$ -простой граф G и его представление (1). Для произвольной вершины $u \in V(G)$ обозначим через $t(u)$ номер той компоненты в представлении (1), которая содержит u .

Утверждение 1. Пусть G – $(1, \infty)$ -простой граф, $E \in E(A(G))$. Тогда $G[E] \cong 2K_2$.

Пусть G – $(1, \infty)$ -простой граф с представлением (1). Наряду с заданием ребра $E = \{u, v, w, z\}$ из A_4 -структуры $A(G)$ будем также использовать запись в виде упорядоченной последовательности $E = (u, v, w, z)$, если выполняется условие $t(u) \geq t(v) \geq t(w) \geq t(z)$.

Следствие 1. Ребрами A_4 -структуры $(1, \infty)$ -простого графа G с представлением (1) являются в точности все последовательности вершин двух следующих типов:

$$E = (u, v, w, z), \text{ где } t(u) = t(v) > t(w) \geq t(z), G_{t(u)} = B, G_{t(w)} = A;$$

$$E = (u, v, w, z), \text{ где } t(u) = t(v) > t(w) = t(z), G_{t(u)} = B, G_{t(w)} = B.$$

Пусть H – 4-униформный гиперграф, а x, y – две его смежные вершины. Определим граф $D_H(x, y)$ гиперграфа H в соответствии с условиями:

$$\{x, y\} \in V(D_H(x, y)).$$

Если $\{u, v\} \in V(D_H(x, y))$ для некоторых $u, v \in V(H)$, причем $\{u, v\}$ содержится в ребре $E \in E(H)$, то $E \setminus \{u, v\} \in V(D_H(x, y))$ и вершины $\{u, v\}$ и $E \setminus \{u, v\}$ смежны в $D_H(x, y)$.

Граф $D_H(x, y)$ назовем *графом пар* гиперграфа H , если он дополнительно удовлетворяет условию:

Для любого ребра $E \in E(H)$ существуют в точности две пары вершин $\{u, v\}, \{w, z\} \in V(D_H(x, y))$ таких, что $\{u, v\}, \{w, z\} \subseteq E$ (т.е. таких, что $E = \{u, v, w, z\}$).

Утверждение 2. Пусть G – $(1, \infty)$ -простой граф с представлением (1), $A = A(G)$. Тогда для любого ребра $E \in E(A)$ найдутся вершины $u, v \in E$ такие, что существует граф пар $D_A(u, v)$. В частности, в качестве таких вершин можно выбрать первую или вторую пару ребра E .

Утверждение 3. Пусть G – $(1, \infty)$ -простой граф, удовлетворяющий условию $|E(G)| \geq 1$, M – некоторый полный граф, $G' = M \circ G$, где $M = B$. Тогда

- 1) если $|M| = 1$, то вершина из M изолирована в $A(G')$,
- 2) если $|M| > 1$, то все пары вершин из $V(M)$ образуют независимое сильно доминирующее множество вершин в некотором графе пар A_4 -структуры $A(G')$.

АЛГОРИТМ

Из утверждений предыдущего раздела вытекает алгоритм распознавания A_4 -структуры $(1, \infty)$ -простого графа.

Алгоритм:

Вход: 4-униформный гиперграф H , заданный списком своих ребер.

Выход: ответ “да” и построение одного из подходящих графов G , если гиперграф H является A_4 -структурой некоторого $(1, \infty)$ -простого графа G , и ответ “нет” в противном случае.

1. Инициализируем стек графов: $INITSTACK = \emptyset$.
2. Пока в гиперграфе H есть изолированные вершины выполняем следующее:
 - 2.1. Записываем в $INITSTACK$ полный граф с множеством вершин $\{v\}$ в качестве B -компоненты, $v \in V(H)$ – любая изолированная вершина;
 - 2.2. Полагаем $H = H - v$.
3. Если $V(H) = \emptyset$, то инициализируем стек графов: $STACK = INITSTACK$ и переходим к шагу 12.
4. Для произвольного ребра $E = \{a, b, c, d\}$ гиперграфа H строим множество графов $S = \{D_H(a, b), D_H(a, c), D_H(a, d)\}$.
5. Если $S = \emptyset$, то переходим к шагу 14.
6. Берем произвольный граф $D_0 \in S$. Если D_0 не является графом пар гиперграфа H , то полагаем $S = S \setminus \{D_0\}$ и переходим к шагу 5.
7. Инициализируем стек графов: $STACK = INITSTACK$ и полагаем $D = D_0$.
8. Пока в графе D существует независимое сильно доминирующее множество P , записываем в $STACK$ полный граф с множеством вершин $\bigcup_{\{u, v\} \in P} \{u, v\}$ в качестве B -компоненты. Полагаем $D = D - P$.
9. Если $V(D) = \emptyset$, то переходим к шагу 12.
10. Строим вспомогательный граф F следующим образом:

$$V(F) = \bigcup_{\{u, v\} \in V(D)} \{u, v\}, E(F) = V(D).$$
11. Пока $V(F) \neq \emptyset$ выполняем следующее:

- 11.1. Находим в графе F множество доминирующих вершин L . Если $L = \emptyset$, то полагаем $S = S \setminus \{D_0\}$ и переходим к шагу 5. Иначе записываем в STACK полный граф с множеством вершин L в качестве A -компоненты.
- 11.2. Находим в графе $F - L$ множество изолированных вершин M . Если $M = \emptyset$, то полагаем $S = S \setminus \{D_0\}$ и переходим к шагу 5. Иначе строим вспомогательный граф R следующим образом: $V(R) = M$, причем для любых вершин $u, v \in V(R)$ полагаем $uv \in E(R)$, если и только если $\{u, v\} \in V(D)$.
- 11.3. Находим в графе R связные компоненты R_i , $i = 1, 2, \dots, t$, являющиеся полными графами, и записываем их в STACK в любом порядке в качестве B -компонент. Если таких связных компонент нет, полагаем $S = S \setminus \{D_0\}$ и переходим к шагу 5.
- 11.4. Полагаем $F = F - (L \cup V(R_1 \cup R_2 \dots \cup R_t))$.
12. Строим граф G : вначале $G = K_1$; пока STACK не пуст, извлекаем из него граф Z , полагаем $G = Z \circ G$, учитывая при этом тип компоненты Z .
13. Ответ “да”, при этом $G - (1, \infty)$ -простой граф, A_4 -структура которого изоморфна гиперграфу H . Переходим к шагу 15.
14. Ответ “нет”.
15. Конец алгоритма.

Можно показать, что временная сложность алгоритма в худшем случае есть $O((n+m)t)$, где $|H| = n$, $|E(H)| = t$.

Литература

1. Barrus M.D., West D.B. The A_4 -structure of a graph // J. Graph Theory. – 2012. – V. 71. – No. 2. – P. 159–175.
2. Тышкевич Р.И., Суздаль С.В., Максимович О.В., Петрович Р.А. Алгебраическая теория декомпозиции графов: из истории, последние достижения, перспективы // Вестник БГУ. Сер. 1. Физика. Математика. Информатика. – 2011. – № 3. – С. 126–138.