Таблица 2

Результаты прогнозирования для второй серии

номер экспе-римента	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
x_{T+1}	1	0	1	0	0	1	0	0	1	1
$\hat{x}_{T+1}$	1	0	1	0	0	1	0	0	1	1
$\widehat{M}^{r}{}_{max}$	**1, 2, 10**,**11**, 14, **16**	**1, 2**, 4, 9, **11, 16**	**1, 2**, **10**,**11**, 13, **16**	**1, 2**, 3, 5, **8, 10**	**1, 2**, 6, **8, 10**,**16**	**1, 2, 8**,**10**, 11,17	**1, 2, 11**,14, **16**, 17	**1, 2**, 5, **8, 10**,**16**	**1, 2, 11**,12, 15, **16**	**1, 2**, 7, **8, 10**, **11**

Таким образом, компьютерные эксперименты показали эффективность разработанного алгоритма прогнозирования.

Литература

1. Криптология / *Ю. С. Харин [и др.]*. – Минск : БГУ, 2014. – 512 с.
2. *Харин, Ю. С.* Цепи Маркова с r-частичными связями и их статистическое оценивание / *Ю. С. Харин* // Доклады НАН Беларуси. – 2004. Т. 48, № 1. – С. 40–44.
3. *Ю. С. Харин* Оптимальность и робастность в статистическом прогнозировании: монография / Ю.С. Харин. – Минск : БГУ, 2008. – 263 с.
4. *Ю. С. Харин, А. И. Петлицкий*, “Идентификация двоичной цепи Маркова s-го порядка с r частичными связями при наличии аддитивных искажений”, Дискрет. матем., 22:4 (2010), 138–155
5. CUDA Toolkit documentation. http://docs.nvidia.com/

ОПТИМАЛЬНОЕ ПЛАНИРОВАНИЕ ВНЕДРЕНИЯ НОВЫХ ТЕХНОЛОГИЙ В МОДЕЛИ ФИРМЫ

Е. Н. Скурат

ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

В работе рассматривается обобщение задачи, предложенной в [1], где фирма внедряет одну инновацию.

На конечном промежутке времени $[0, z]$, рассмотрим фирму, которая планирует последовательно использовать N технологий, где N>2 фиксировано. Моменты перехода к новой, более производительной технологии будем обозначать через $t_1, t_2, ..., t_{N-1}$, где $0 = t_0 < t_1 < t_2 < ... < t_{N-1} <$ $< t_N = z$. Вектор $T = (t_1, t_2, ..., t_{N-1})$, состоящий из моментов внедрения новых технологий, необходимо определить оптимальным образом наряду с инвестиционной политикой фирмы.

Обозначим через $K = K(t), t \in [0, z]$, основной капитал фирмы. Будем полагать, что до внедрения первой технологии единичные инвестиции приводят к увеличению капитала на одну единицу. После принятия решения о внедрении технологии в момент времени t_i единичные инвестиции приводят к росту капитала на $q(t_i)$ единиц, где $q(t_i) > 1$. Тогда накопление капитала на промежутке $[t_i, t_{i+1}]$ описывается уравнением

$$\dot{K} = q(t_i)I - \delta K. \tag{1}$$

где $I = I(t)$ – инвестиции в момент времени t, δ – норма амортизации. Считается, что в начальный момент времени начальный капитал фирмы задан $K(0) = K_0$.

Величина $q = q(t)$ в момент времени t означает производительность передовой технологии в экономике в текущий момент времени. Будем считать, что производительность растет линейно с течением времени: $q(t) = 1 + bt$, где $b > 0$ – константа.

Затраты на капиталовложения (инвестиционные расходы) $C(I)$ состоят из издержек на приобретение нового оборудования и издержек на его внедрение. Предполагается, что цена единицы нового основного капитала нормирована, а издержки внедрения пропорциональны квадрату инвестиций:

$$C(I) = I + \frac{c}{2} I^2, \tag{2}$$

где $c > 0$ – константа.

Будем считать, что фирма максимизирует прибыль, полученную за весь промежуток планирования, при этом доход описывается линейной функцией $R(K) = aK$, где $a > \delta$, а общие издержки задаются (2).

Таким образом, задача фирмы с многократными внедрениями технологий имеет вид:

$$J(I,T) = \frac{aK(z)}{\delta} + \int_0^z \left(aK(t) - I(t) - \frac{c}{2} I^2(t) \right) dt \to \max_{I,T},$$

$$\dot{K} = q(t_i)I - \delta K,\ t \in [t_i, t_{i+1}],\ i = \overline{0, N-1} \tag{3}$$

$$K(0) = K_0,\ 0 < t_1 < t_2 < \ldots < t_{N-1} < z,$$

$$I(t) > 0,\ t \in [0, z].$$

В задаче (3) вектор T – вектор управляющих параметров, которые подлежат выбору наряду с управлением $I(t), t \in [0, z]$.

СХЕМА РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ

Задача (3) – многоэтапная задача оптимального управления. Теоретически, она может быть решена с применением принципа максимума для многоэтапных задач из работы [2], однако на практике такой подход позволяет решить задачу максимум с двумя моментами, что и сделано в работе [1]. Ниже предлагается оригинальный и более простой подход к решению задачи (3), для трудоемкости которого число моментов внедрения новых технологий несущественно.

Зафиксируем вектор моментов перехода $T=(t_1,t_2,...,t_{N-1})$ и введем в рассмотрение кусочно-постоянную функцию

$$g(t)=q(t_{i-1}),\ t\in\left[t_{i-1},t_i\right[,\ i=\overline{1,N}. \tag{4}$$

Задача (3) примет вид

$$\frac{aK(z)}{\delta}+\int_0^z\left(aK(t)-I(t)-\frac{c}{2}I^2(t)\right)dt\to\max_I, \tag{5}$$

$$\dot K=g(t)I-\delta K,\ t\in[0,z],\ K(0)=K_0,$$

$$I(t)>0,\ t\in[0,z].$$

Задача (5) – задача оптимизации вогнутого функционала на траекториях линейной системы с кусочно-постоянными коэффициентами. Для нее принцип максимума [3] представляет необходимое и достаточное условие оптимальности. Ниже (см. утверждение 1) на основе принципа максимума будет построено аналитическое решение (5).

Обозначим через $V^0(T)$ оптимальное значение критерия качества в задаче (5). Оптимальные моменты внедрения новой технологии $T^0=\left(t_1^0,t_2^0,...,t_{N-1}^0\right)$ будут найдены как решение задачи максимизации max $V^0(T)$ (см. утверждение 2).

ОСНОВНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ

Утверждение 1 Оптимальное управление $I^0(t),t\in[0,z]$в задаче (5) с фиксированным вектором моментов перехода T является кусочно-постоянной функцией вида

$$I^0(t)=I^0(t\,|\,T)\equiv\frac{q(t_{i-1})a-\delta}{c\delta},\ t\in\left[t_{i-1},t_i\right[,\ \ i=\overline{1,N}. \tag{6}$$

Доказательство. Составим для (4) гамильтониан [3]:

$$H(K,\lambda,I,t) = aK - I - cI^2/2 + \lambda[-\delta K + g(t)I], \quad (7)$$

где $\lambda(t),\ t \in [0,z]$ – сопряженная траектория (котраектория), удовлетворяющая сопряженному уравнению

$$\dot{\lambda}(t) = -\frac{\partial H(K(t),\lambda(t),I(t),t)}{\partial K} = \delta\lambda(t) - a \quad (8)$$

с условием трансверсальности $\lambda(z) = a/\delta$. Из (8), следует, что сопряженная траектория постоянна: $\lambda(t) \equiv a/\delta,\ t \in [0,z]$. Тогда гамильтониан (7) принимает вид

$$H(K(t),\lambda(t),I(t),t) = (ag(t)/\delta - 1)I(t) - \frac{c}{2}I^2(t),\ t \in [0,z]. \quad (9)$$

При каждом $t \in [0,z]$ функция (9) строго вогнута по I и имеет единственную точку максимума

$$I^0(t) = (ag(t) - \delta)/c\delta,\ t \in [0,z]. \quad (10)$$

Согласно принципу максимума [3], (10) – оптимальная программа инвестиций. С учетом вида (4) функции $g(t),\ t \in [0,z]$, оптимальная программа инвестиций (10) принимает вид (6). Заметим, что из условия возрастания функции q следует, что $I_1 < I_2(t_1) < \ldots < I_N(t_{N-1})$.

Утверждение 2 Оптимальные моменты $T^0 = (t_1^0, t_2^0, ..., t_{N-1}^0)$ внедрения новых технологий являются решением системы уравнений:

$$p_i(t_i) = 3abt_i^2 + 2(2(a-\delta) - abt_{i+1})t_i - 2(a-\delta)(t_{i+1} + t_{i-1}) = 0, \quad (11)$$

$$i = \overline{1, N-1}.$$

При этом выполняются неравенства

$$0 < z - t_{N-1} < \ldots < t_2 - t_1 < t_1,\ z/N < t_1. \quad (12)$$

Доказательство. Используя равенство $\int_0^z \dot{K}(t) + \delta K(t)dt = \int_0^z g(t)I^0(t)dt,$ нетрудно подсчитать, что $V^0(T) = \frac{a}{\delta}K_0 + \frac{c}{2}\int_0^z (I^0(t))^2 dt,$ откуда с учетом (6) найдем:

$$\partial V^0(T)/\partial t_i = \left((g(t_{i-1})a - \delta)^2 + 2ab(g(t_i)a - \delta)(t_{i+1} - t_i) - (g(t_i)a - \delta)^2\right)/2c\delta^2.$$

В результате преобразований получим $\partial V^0(T)/\partial t_i = -abp_i(t_i)/2c\delta^2$, и, следовательно, система (11) определяет стационарные точки функции

$V^0(T)$. Нетрудно показать, что в единственной точке T^0, удовлетворяющей условиям (3) действительно достигается максимум.

Докажем неравенства (12). Для этого найдем значения функции $p_i(t)$ в точке t_{i+1} и в середине отрезка $[t_{i-1}, t_{i+1}]$:

$$p(t_{i+1}) = abt_{i+1}^2 + 2(a-\delta)(t_{i+1} - t_{i-1}) > 0,$$

$$p((t_{i-1} + t_{i+1})/2) = -ab(t_{i+1}^2 - t_{i-1}^2)/4 < 0.$$

Отсюда следует, что точка t_i (нуль функции $p_i(t)$), лежит в интервале $](t_{i-1} + t_{i+1})/2, t_{i+1}[$, то есть $t_{i+1} - t_i < t_i - t_{i-1}$, $i = \overline{1, N-1}$.

Из условий (12) следует, что оптимальные моменты внедрения инноваций распределены по промежутку планирования неравномерно. Дольше всего фирма выжидает наступления первого момента, а затем все быстрее использует каждую последующую технологию.

Литература

1. *D. Grass, R.F. Hartl, P.M. Kort* Capital accumulation and embodied technological progress //Journal of Optimization Theory and Applications. – 2012. – Vol. 154, no. 2. – P. 588-614.
2. *C. Saglam* Optimal pattern of technology adoptions under embodiment: A multi-stage optimal control approach // Optimal Control Applications and Methods. – 2011. – Vol. 32, no. 5. – P. 574-586.
3. *Л.С. Понтрягин, В.Г. Болтянский, Р.В. Гамкрелидзе, Е.Ф. Мищенко* Математическая теория оптимальных процессов – М.: Наука, 1983. – 392 с.

СИСТЕМА МОНИТОРИНГА МОБИЛЬНЫХ ОБЪЕКТОВ (НА ПРИМЕРЕ СЛУЖБЫ СКОРОЙ ПОМОЩИ)

В. П. Стасеня

ВВЕДЕНИЕ

В процессе информатизации жизни общества изменяются условия и методы решения многих традиционных задач. Многие материальные процессы заменяются информационными, в результате чего происходит автоматизация систем, включающих в себя данные процессы [1].

В наше время, достаточно важной становится задача мониторинга положения и состояния некоторых мобильных объектов с использованием доступных средств связи, например, таких как GSM и GPRS [2]. Зачастую, данные о местоположении мобильного объекта используются для последующего принятия некоторого решения. При этом одним из клю-