

ИМПУЛЬСНО-ВОЗВРАТНАЯ МОДЕЛЬ ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ АТОМОВ СО СТРУКТУРИРОВАННЫМИ ФОТОННЫМИ РЕЗЕРВУАРАМИ

Ч. 2

It is established a correspondence between the «kick-back» correlation function and more realistic reservoir correlation function for photonic crystals. We demonstrate that «kick-back» model of reservoir response can be used for investigation of more complicated cases of interaction with the structured reservoir; the «kick-back» master equation is obtained and applied for resonance fluorescence of a two-level atom in a band-gap.

КИНЕТИЧЕСКОЕ УРАВНЕНИЕ ИМПУЛЬСНО-ВОЗВРАТНОЙ МОДЕЛИ

Импульсно-возвратная модель может не только демонстрировать возможности получения эффекта замораживания спонтанного излучения путем структурирования корреляционной функции резервуара наиболее простым образом, но и являться мощным инструментом исследования проблем, в которых затруднено использование не поддающихся упрощению корреляционных функций резервуара.

Предположим, что в представлении взаимодействия гамильтониан задачи имеет вид:

$$H_V = \bar{H}_{\text{int}}(t) + V(t), \quad (37)$$

где $V(t) = U_0^\dagger(t) V U_0(t) = \exp(iH_0 t / \hbar) V \exp(-iH_0 t / \hbar)$.

Оператор $\bar{H}_{\text{int}}(t) = U_0^\dagger(t) H_{\text{int}}(t) U_0(t)$. Здесь H_{int} описывает взаимодействие атома с системой, которая не включена в резервуар (например, с классическим или квантованным возбуждающим полем). Используя борновское приближение и стандартную процедуру возмущений для получения кинетического уравнения матрицы плотности $s(t)$, усредненной по резервуару, получим:

$$\frac{d}{dt} s(t) = \frac{i}{\hbar} [H_{\text{int}}, s(t)] - \frac{1}{\hbar^2} \int_0^t d\tau \left\langle [V(t), [V(\tau), s(\tau) \otimes |\text{vac}\rangle \langle \text{vac}|]] \right\rangle_r, \quad (38)$$

где $\langle \dots \rangle_r$ обозначает усреднение по резервуару. Если резервуар первоначально находится в состоянии вакуума и его функция корреляции является импульсно-возвратной и определяется формулой (27), уравнение (38) преобразуется к

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} s(t) = & \frac{i}{\hbar} [H_{\text{int}}, s(t)] + 2 \text{Re}(G_0) \sigma^- s(t) \sigma^+ - \\ & - G_0 \sigma^+ \sigma^- s(t) - G_0^* s(t) \sigma^+ \sigma^- + \\ & + \Theta(t - T_0) \times (2 \text{Re}(G_1) \sigma^- s(t - T_0) \sigma^+ - G_1 \sigma^+ \sigma^- s(t - T_0) - G_1^* s(t - T_0) \sigma^+ \sigma^-). \end{aligned} \quad (39)$$

Теперь покажем, что кинетическое уравнение (39) действительно можно использовать для рассмотрения задач, включающих взаимодействие со структурированным резервуаром.

Спонтанное затухание

Для подтверждения справедливости кинетического уравнения (39) рассмотрим спонтанное испускание двухуровневого атома в вакуум резервуара ($H_{\text{int}} = 0$). Начнем с уравнения движения Гейзенберга. Из гамильтониана (1) в

системе координат, вращающейся с частотой ω_0 , получим следующую систему уравнений:

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}a_j(t) &= -i\Delta_j a_j(t) - ig_j \sigma^-(t), \\ \frac{d}{dt}\sigma^-(t) &= i\sigma_z(t) \sum_j g_j a_j(t), \\ \frac{d}{dt}\sigma^+(t)\sigma^-(t) &= -\sigma^+(t) \sum_j g_j a_j(t) + \text{к. с.}\end{aligned}\quad (40)$$

Поскольку резервуар первоначально находился в состоянии вакуума, из (40) следует

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\langle\sigma^-(t)\rangle &= \int_0^t d\tau K(t-\tau) \langle\sigma_z(t)\sigma^-(\tau)\rangle, \\ \frac{d}{dt}\langle\sigma^+(t)\sigma^-(t)\rangle &= -\int_0^t d\tau K(t-\tau) \langle\sigma^+(t)\sigma^-(\tau)\rangle + \text{к. с.}\end{aligned}\quad (41)$$

Для оценки членов, интегрируемых в правой части системы (41), можно допустить, что $\sigma^\pm(\tau) \approx \sigma^\pm(t)$. Это будет соответствовать борновскому приближению по константе взаимодействия, когда в разложении сохраняются только члены до порядка g_j^2 [1,2].

В борновском приближении из (27) и (41) получаем

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\langle\sigma^-(t)\rangle &= -G_0 \langle\sigma^-(t)\rangle - G_1 \Theta(t-T_0) \langle\sigma^-(t-T_0)\rangle, \\ \frac{d}{dt}\langle\sigma^+(t)\sigma^-(t)\rangle &= -2\text{Re}(G_0) \langle\sigma^+(t)\sigma^-(t)\rangle + \\ &+ 2\Theta(t-T_0) \text{Re}(G_1) \langle\sigma^+(t-T_0)\sigma^-(t-T_0)\rangle.\end{aligned}\quad (42)$$

Легко видеть, что (42) следует из кинетического уравнения (39) для $H_{\text{int}} = 0$, а также то, что уравнение для $\langle\sigma^-(t)\rangle$ совпадает с (29) для амплитуды $A(t)$. Этого следовало ожидать, так как при спонтанном излучении в вакуум резервуара $A(t) = \langle\sigma^-(t)\rangle$. Однако, если «замороженное» значение амплитуды $|U_{00}|^2$

$$\text{удовлетворяет (34), то } \langle|+\rangle\langle+|(\infty)\rangle = \frac{1}{1+2\text{Re}(G_0)T_0}, \quad (43)$$

$$\text{тогда как из (29) } \langle|+\rangle\langle+|(\infty)\rangle = \frac{1}{(1+\text{Re}(G_0)T_0)^2}. \quad (44)$$

Результаты (43) и (44) близки, когда $\text{Re}(G_0)T_0 \ll 1$, которое является условием применимости импульсно-возвратного кинетического уравнения (39). Только в этом случае справедливо борновское приближение.

В заключение следует заметить, что уравнение (39) удовлетворительно описывает третью стадию эволюции, которая задается формулой (29*) как для атомной заселенности, так и для поляризации. Это минимальное (в том же смысле, как и марковское кинетическое уравнение является минимальным для описания спонтанного излучения) кинетическое уравнение необходимо для описания возможности замораживания - результата структурирования обратного воздействия резервуара на атом.

И наконец, заметим, что импульсно-возвратное кинетическое уравнение (39) указывает на любопытную интерпретацию того, что структурированный резервуар позволяет обеспечить замораживание атомного распада аналогично эффекту замораживания при наблюдении (эффекту Зено). Марковское затухание можно рассматривать как непрерывное измерение вероятности обнаружения атома в низшем состоянии [3, 5], а динамику, обусловленную обратным воздействием резервуара и описываемую уравнением (39), - как результат последовательности внезапных изменений в состоянии аппаратуры, нарушающих непрерывную эволюцию и соответствующих перенастройке прибора по накопленным данным. Если частота этих изменений в заданный интервал времени повышается (т. е. уменьшается T_0), замороженная атомная заселенность увеличивается, приближаясь к единице в пределе $T_0 \rightarrow 0$

Резонансная флуоресценция

Другим примером возможного применения кинетического уравнения (39) является решение задачи классически возбуждаемого двухуровневого атома, который взаимодействует со структурированным резервуаром. В этом случае можно записать

$$H_{\text{int}} = \hbar \varepsilon \left(\sigma^- \exp(i\omega_p t) + \sigma^+ \exp(-i\omega_p t) \right),$$

где ω_p - частота задающего поля. Тогда в системе координат, вращающейся с частотой ω_p , уравнение (39) дает

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} s(t) = & i \left[\Delta_p \sigma^+ \sigma^- + \varepsilon (\sigma^- + \sigma^+) \right] s(t) + 2 \text{Re}(G_0) \sigma^- s(t) \sigma^+ + \\ & + G_0 \sigma^+ \sigma^- s(t) - G_0^* s(t) \sigma^+ \sigma^- + \Theta(t - T_0) (2 \text{Re}(\bar{G}_1) \sigma^- s(t - T_0) \sigma^+ + \\ & + \bar{G}_1 \sigma^+ \sigma^- s(t - T_0) + \bar{G}_1^* s(t - T_0) \sigma^+ \sigma^-), \end{aligned}$$

где $\Delta_p = \omega_0 - \omega_p$ и $\bar{G}_1 = G_1 \exp(-i\Delta_p T_0)$. «Одев» матрицу плотности $\bar{s}(t) = \bar{U}(t) s(t) \bar{U}^+(t)$ с помощью преобразований $\bar{U}(t) = \exp(-i((\Delta_p + \text{Im}(G_0)) \sigma^+ \sigma^- + \varepsilon (\sigma^- + \sigma^+)) t)$, получим

$$\begin{aligned} \frac{d\bar{s}(t)}{dt} = & 2 \text{Re}(G_0) \sigma^- (t) \bar{s}(t) \sigma^+ (t) - G_0 \sigma^+ (t) \sigma^- (t) \bar{s}(t) - \\ & - G_0^* \bar{s}(t) \sigma^+ (t) \sigma^- (t) + \Theta(t - T_0) \bar{U}^+(T_0) (2 \text{Re}(\bar{G}_1) R^- \bar{s}(t - T_0) R^+ - \\ & - \bar{G}_1 \bar{s}(t - T_0) \sigma^+ (t - T_0) \sigma^- (t - T_0) - \\ & - \bar{G}_1^* \bar{s}(t - T_0) \sigma^+ (t - T_0) \sigma^- (t - T_0)) \bar{U}(T_0). \end{aligned}$$

Здесь

$$\sigma^\pm(t) = \bar{U}^+(t) \sigma^\pm(0) \bar{U}^-(t) = -csR_z + c^2 R^\pm \exp(\pm i2\Omega t) - s^2 R^\mp \exp(\mp i2\Omega t), \quad (45)$$

а «одетые» операторы $R^\pm$ связаны с «неодетыми» атомными операторами следующим образом:

$$\begin{aligned} R^\pm = & -cs(2\sigma^+ \sigma^- - 1) + c^2 \sigma^\pm - s^2 \sigma^\mp, \\ R_z = & (c^2 - s^2)(2\sigma^+ \sigma^- - 1) + 2sc(\sigma^+ + \sigma^-), \end{aligned}$$

где $\Omega = \sqrt{4\varepsilon^2 + \Delta_p^2}$ - частота Раби, $c = \sqrt{1 - s^2}$, $s = \sqrt{0,5(1 - \Delta_p/\Omega)}$.

Теперь предположим, что частота Раби достаточно велика (по сравнению с $\text{Re}(G_0)$), чтобы была возможна секулярная аппроксимация с пренебрежением быстро вращающимися членами в (45). При этом допущении, приняв во вни-

мание условие замораживания (34), из (45) можно получить следующую систему уравнений:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \langle R^-(t) \rangle &= -\text{Re}(G_0) (1 + 2s^2 c^2) \langle R^-(t) \rangle + \\ &+ \text{Re}(G_0) (4s^2 c^2 + c^4 \exp(-i\bar{\Omega}T_0) + s^4 \exp(i\bar{\Omega}T_0)) \times \Theta(t - T_0) \langle R^-(t - T_0) \rangle, \\ \frac{d}{dt} \langle R^+(t) R^-(t) \rangle &= +2\text{Re}(G_0) (c^4 + s^4) \langle R^+(t) R^-(t) \rangle - \\ &- 2(c^4 + s^4) \Theta(t - T_0) \text{Re}(G_0) \langle R^+(t - T_0) R^-(t - T_0) \rangle + \\ &+ 2s^4 \text{Re}(G_0) (1 - \Theta(t - T_0) \cos(\bar{\Omega}T_0)). \end{aligned} \quad (46)$$

Здесь $\bar{\Omega} = 2\Omega - |\Delta_p + \text{Im}(G_0)|$. Решение (46) аналогичное решению (29):

$$\begin{aligned} \langle R^-(t) \rangle &= \langle R^-(0) \rangle \sum_{n=0}^{\infty} \exp(-\gamma(t - nT_0)) \frac{(\dot{\gamma}(t - nT_0))^n}{n!} \Theta(t - nT_0), \\ \langle R^+(t) R^-(t) \rangle &= \\ &= \langle R^+(0) R^-(0) \rangle \sum_{n=0}^{\infty} \exp(-\Gamma(t - nT_0)) \frac{(\Gamma \cos(\bar{\Omega}T_0)(t - nT_0))^n}{n!} \Theta(t - nT_0) + \\ &+ \frac{s^4}{s^4 + c^4} (1 - \exp(-\Gamma t)) + \\ &+ \frac{s^4}{s^4 + c^4} (1 - \cos(\bar{\Omega}T_0)) \sum_{n=1}^{\infty} \left((-\cos(\bar{\Omega}T_0))^n (1 - \exp(-\Gamma(t - nT_0))) \right) - \\ &- (\Gamma \cos(\bar{\Omega}T_0))^n \exp(-\Gamma(t - nT_0)) \sum_{j=1}^n \frac{(t - nT_0)^{n-j}}{\Gamma^j (n-j)!}, \end{aligned} \quad (47)$$

где

$$\begin{aligned} \gamma &= \text{Re}(G_0) (1 + 2s^2 c^2), \\ \dot{\gamma} &= \text{Re}(G_0) (4c^2 s^2 + c^4 \exp(-i\bar{\Omega}T_0) + s^4 \exp(i\bar{\Omega}T_0)), \\ \Gamma &= 2\text{Re}(G_0) (c^4 + s^4). \end{aligned}$$

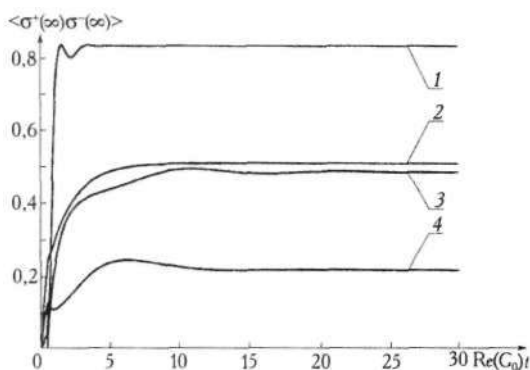


Рис. 1. Временная зависимость атомной заселенности при различных амплитудах классического вынуждающего поля. ϵ : 1 – 5 $\text{Re}(G_0)$, 2 – 95, 3 – 2,5, 4 – 10 $\text{Re}(G_0)$

На рис. 1 приводятся примеры динамики атомной заселенности верхнего уровня (47) для различных значений амплитуд возбуждающего поля. В отличие от резонансной флуоресценции в вакууме в структурированных резервуарах классическое возбуждающее поле может обеспечивать инверсию атомной заселенности. Эта особенность впервые была отмечена в [1], где трактовалась согласно традиционной картине расщепления атомных энергетических уровней под влиянием возбуждающего поля: заселенность замораживается в одном из «одетых» состояний в соответ-

вующей триплетной компоненте, которая смещена далеко от границы энергетической зоны. Как уже упоминалось, более приемлемым будет рассмотрение влияния коллективного состояния системы *возбуждающее поле - атом-поле*, а не поля атома и резервуара в отдельности. Такая точка зрения подкрепляется сильной зависимостью стационарной атомной заселенности верхнего уровня и характера ее эволюции от соотношения между частотой Раби и собственной частотой λ_0 коллективного состояния *атом-поле* (рис. 2). Если частота Раби далека от резонанса с λ_0 (или соответственно $\bar{\Omega}T_0 \neq 2\pi n$ для целых n), тогда условия затухания (34) не выполняются, $\langle R^+(\infty) \rangle = 0$, а решение уравнения (47) для стационарной заселенности дает

$$\langle |+\rangle \langle + | (\infty) \rangle \approx \frac{1}{2} + (c^2 + s^2) \left(\frac{s^4 (1 - \cos(\bar{\Omega}T_0))}{s^4 + c^4} - \frac{1}{2} \right). \quad (48)$$

В этом случае атомная заселенность не зависит от исходного состояния атома и быстро приходит к стационарному уровню (заметим, что нерезонансное возбуждение может разрушить замораживание и уменьшить стационарную заселенность практически до нуля). Достаточно сильное возбуждение смещает триплетные компоненты далеко от границы зоны и приводит к одинаковой заселенности. При $\Omega \rightarrow \infty$ имеем $\langle |+\rangle \langle + | (\infty) \rangle = 1/2$. Подобные асимптотические свойства проявляются при возбуждающем поле, «настроенном» на собственную частоту коллективной моды C_0 , т. е. при $\Delta_p = -\lambda_0$. В этом случае $s^2 = 1/2$.

Ситуация меняется, когда частота $\bar{\Omega}$ приближается к резонансным значениям $n\lambda_0$. Тогда условия (34) удовлетворяются, а стационарная заселенность верхнего уровня определяется выражением

$$\langle |+\rangle \langle + | (t \rightarrow \infty) \rangle \rightarrow \frac{1}{2} + (c^2 - s^2) \left(\frac{\langle R^+(0)R^-(0) \rangle}{1 + 2\text{Re}(G_0)T_0(c^4 + s^4)} - \frac{1}{2} \right) - \frac{2sc\text{Re}(\langle R^+(0) \rangle)}{1 + \text{Re}(G_0)T_0(1 + 2s^2c^2)}. \quad (49)$$

Тем не менее при приближении к резонансному значению интервал, необходимый для достижения стационарного значения, расширяется до бесконечности. Заселенность остается колеблющейся аналогично случаю возбужденного атома в резонаторе без потерь. Как видно на рис. 2, при небольших значениях ϵ это вызывает быстрые колебания заселенности в зависимости от ϵ , при сильном возбуждении - снижение заселенности гораздо ниже ее стационарного уровня вне резонанса (кривая 1 на рис. 2 а).

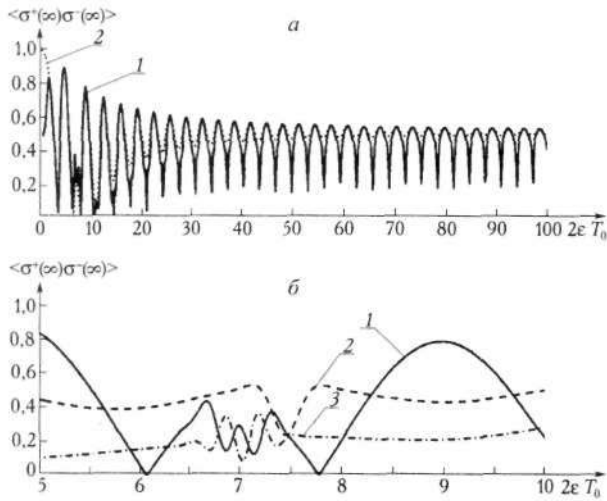


Рис. 2. Временные свойства ($\text{Re}(G_0)t=60$) атомной заселенности верхнего уровня в зависимости от амплитуды возбуждающего поля ϵ . а: $\Delta_p = -25 \text{Re}(G_0)$ – кривая 1; кривая 2 соответствует асимптотической заселенности, определяемой (48); б: $\Delta_p = -25 \text{Re}(G_0)$ соответствует кривая 1, $\Delta_p = -10 \text{Re}(G_0) - 2$, $\Delta_p = 0 - 3$

Следует понимать, что данная динамика для частоты Раби, резонансной ω_c , в действительности является артефактом модели. Свойства, описываемые (49), являются следствием простоты формы импульсно-возвратной функции. Если принять модель корреляционной функции более сложной формы (например, $G_0\delta(t) + G_1\delta(t - T_0) + G_2\delta(t - T_1)$ для $T_1 > T_0$), такой резонансной динамики не будет, однако типичные характеристики атомной эволюции останутся прежними [4].

* * *

В данной работе рассматривалось приложение импульсно-возвратного кинетического уравнения к задаче спонтанного излучения (что позволило определить область применимости борновского приближения) и к задаче резонансной флуоресценции внутри фотонных структур с запрещенной зоной. Импульсно-возвратная модель отклика резервуара позволяет выявить такие важные характеристики, как возможность положительной стационарной инверсии для классически возбуждаемого атома, находящегося внутри фотонной запрещенной зоны. Импульсно-возвратная модель, по мнению авторов, является весьма перспективной для получения качественной картины динамики в случаях, когда более реальными моделями трудно оперировать (например, для атома, взаимодействующего внутри запрещенной зоны с модой квантованного поля).

1. Florescu M., John S. // Phys. Rev. 2001. Vol. A 64. P. 033801.
2. Wodkiewicz K., Eberly J. // Ann. Phys. 1976. Vol. 101. P. 574.
3. Facchi P., Pascazio S. Progress in Optics / Ed. by E. Wolf. Amsterdam. 2001. Vol. 42.
4. Могилевцев Д.С., Килин С.Я., Онищенко Н.С. // Материалы международной конференции «Лазерная физика и применение лазеров»: в 3 ч. Мн., 2003. Ч. 2. С. 55с.
5. Braginski V.B., Khalili F.Ya. Quantum Measurement. Cambridge, 1992. Chap. 7.3.

Поступила в редакцию 28.09.05.

Дмитрий Сергеевич Могилевцев - кандидат физико-математических наук, научный сотрудник лаборатории квантовой оптики Института физики НАН Беларуси.

Сергей Яковлевич Килин - доктор физико-математических наук, профессор, заведующий лабораторией квантовой оптики Института физики НАН Беларуси.

Николай Степанович Онищенко - начальник отдела Национального института образования, преподаватель кафедры лазерной физики и спектроскопии.

Александр Сергеевич Малоштан - аспирант кафедры информатики. Научный руководитель - С.Я. Килин.

 ω_c $\hbar\omega_c \gg k_B T$ $k_B T (\epsilon_d \ll k_B T)$ ϵ_d