БЕЛОРУССКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
НАЦИОНАЛЬНАЯ АКАДЕМИЯ НАУК БЕЛАРУСИ

АКТУАЛЬНЫЕ ПРОБЛЕМЫ ИНФОРМАТИКИ

Сборник трудов
VI Международной научной конференции
(26 – 30 октября 1998 года, Минск)

В трех частях

Часть 3

Под редакцией академика НАН Беларуси
А.Ф. Чернявского и профессора В.В. Бобкова

Минск 1998

МИНИМАКСНАЯ ЗАДАЧА О РАСПРЕДЕЛЕНИИ ПРОГРАММЫ

Л.А. Пилипчук, Б.А. Гутин

Беларусь, Минск

Имеется m производственных участков, на которых необходимо производить n различных продуктов (видов работ) в заданном ассортименте. Ассортиментный набор состоит из $k_1, k_2, \ldots, k_n$ единиц продуктов вида (1), (2), ..., (n) соответственно. Известна производительность каждого участка по каждому продукту: на i-м участке ($i = \overline{1,m}$), если на нем поставлено производство j-го продукта ($j = \overline{1,n}$), в единицу времени производится b_{ij} единиц этого продукта. Требуется распределить работы между участками так, чтобы в единицу времени выпускалось максимальное число полных ассортиментных наборов продукции. Эта задача впервые была рассмотрена в [1].

Если обозначить через h_{ij} ($i=\overline{1,m}$, $j = \overline{1,n}$) долю рабочего времени i-го участка, которая отводится на производство j-го продукта, то построение оптимального плана сводится к следующей задаче:

Заданы неотрицательные числа

$$\{ b_{ij} \} \ (i=\overline{1,m},\ j=\overline{1,n}),\ k_j > 0,\ j=\overline{1,n} \qquad (1)$$

причем $\max\limits_{1\le i\le m}\{b_{ij}\} > 0$ ($j=\overline{1,n}$) (т.е. каждый продукт может быть произведен хотя бы на одном из участков). Требуется определить набор чисел (план) $\pi = \{ h_{ij} \}$, $i=\overline{1,m}$, $j=\overline{1,n}$, исходя из условий:

$$a)\ h_{ij} \ge 0 \ (i=\overline{1,m},\ j=\overline{1,n}) \qquad (2)$$

$$b)\ \sum_{j=1}^{n} h_{ij} \le 1 \ \ (i=\overline{1,m}) \qquad (3)$$

$$c)\ \min_{1\le j\le n} \frac{\sum\limits_{i=1}^{m} b_{ij}h_{ij}}{k_j} \to \max \qquad (4)$$

Обозначим $a_{ij} = b_{ij} / k_j$, $i = \overline{1,m}$, $j = \overline{1,n}$. Задачу (1) - (4) можно ести к следующей задаче линейного программирования :

$$z \to \max \quad (5)$$

$$\sum_{j=1}^{n} h_{ij} \le 1 \qquad i = \overline{1,m} \quad (6)$$

$$\sum_{i=1}^{m} a_{ij} h_{ij} \ge z \quad j = \overline{1,n} \quad (7)$$

$$h_{ij} \ge 0 \qquad i = \overline{1,m} \quad , j = \overline{1,n} \quad (8)$$

Существует несколько подходов к решению задачи (5) – (8).

1. Задача (5)–(8) – это специальная задача линейного программирования транспортного типа и для её решения надо разрабатывать специальный алгоритм, учитывающий специфику задачи.
2. Задачу (5)–(8) можно свести к производственно-транспортной задаче с дополнительными ограничениями (9) на обобщенной сети.

В рассматриваемой работе используется второй подход.

Задача (5)-(8) сводится к производственно-транспортной задаче с дополнительными ограничениями (9) на обобщенной сети $S=\{I,U\}$ следующего вида :

$$-h_{i_0}/n \to \min,$$

$$\sum_{j \in I_i^+(U)} h_{ij} - \sum_{j \in I_i^-(U)} a_{ji} h_{ji} = \begin{cases} h_i & , i \in I^1, \\ -h_i & , i \in I^2; \end{cases} \quad (9)$$

$$h_{ii_0} = h_{i_0}/n \, , i \in I_{i_0}^-(U), n = \left|I^2\right| - 1,$$

$$h_{ij} \ge 0 \, , (i,j) \in U \, , 0 \le h_i \le 1 \, , i \in I^1 \, , h_i \ge 0 \, , i \in I^2 \, ,$$

где $I = I^1 \cup I^2$, $I^1 \cap I^2 = \varnothing$, $I^1 = \{1,2,..,m\}$, $I^2 = \{m+1,..,m+n,m+n+1\}$, $i_0 = m+n+1$, $U = \{ (i,j) \, , i \in I^1 \, , j \in I^2 \setminus i_0\} \cup \{(i,i_0) \, , i \in I^2 \setminus i_0 \}$, $I_i^+(U) = \{j : (i,j) \in U\}$, $I_i^-(U) = \{j : (j,i) \in U\}$.

Задача (9) является частным случаем обобщенной производственно-транспортной задачи с дополнительными ограничениями (10) :

$$\sum_{(ij)\in U} c_{ij}\cdot x_{ij} + \sum_{i\in I^d} c_i\cdot x_i \to \min,$$

$$\sum_{j\in I_i^+(U)} x_{ij} - \sum_{j\in I_i^-(U)} \mu_{ji}\cdot x_{ji} = \begin{cases} a_i\,, i\in I^c \\ x_i\cdot \mathrm{sign}[i]\,, i\in I^d, \end{cases}$$

$$\sum_{(i,j)\in U} \lambda_{ij}^k\cdot x_{ij} + \sum_{i\in I^d} \lambda_i^k\cdot x_i = \alpha^k\,,\ k=\overline{1,p}, \qquad (10)$$

$$0\le x_{ij}\le d_{ij}\,,\ (i,j)\in U,$$

$$a_{*i}\le x_i\le a_i^*\,,\ i\in I^d,$$

$$I_i^+(U)=\{j: (i,j)\in U\},\ I_i^-(U)=\{j: (j,i)\in U\}$$

Задача рассматривается на конечной ориентированной связной сети $S=\{I,U\}$ с множеством узлов I и множеством дуг U, определенных на $I\times I$ ($|I|<\infty$, $|U|<\infty$), где каждой дуге $(i,j)\in U$ поставлены в соответствие действительные числа c_{ij}, $\mu_{ij}\ge 0$, d_{ij}, которые назовем соответственно тарифом перевозки единицы груза по дуге (i,j), коэффициентом потерь при перевозке груза по дуге (i,j) и пропускной способностью дуги (i,j). Аналогично каждому узлу $i\in I^d$ поставлены в соответствие действительные числа c_i, $\mathrm{sign}[i]\in\{-1;1\}$, a_{*i} и a_i^* и $a_{*i}<a_i^*$, $a_{*i}\ge 0$, которые будем соответственно называть затратами на производство в узле i, знаком узла i, минимальной допустимой интенсивностью и максимально допустимой интенсивностью узла i.

Будем считать, что I состоит из узлов $i\in I^c$ с постоянной интенсивностью a_i и узлов $i\in I^d = I\setminus I^c$ с переменной интенсивностью.

Рассмотрим пример :

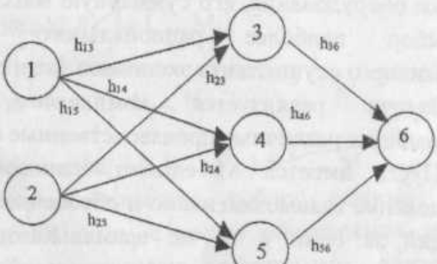
$$-z\to\min$$

$$\begin{cases} h_{13}+h_{14}+h_{15}\le 1 \\ h_{23}+h_{24}+h_{25}\le 1 \\ -10\cdot h_{13}-4\cdot h_{23}\le -z \\ -2\cdot h_{14}-5\cdot h_{24}\le -z \\ -3\cdot h_{15}-6\cdot h_{25}\le -z \\ h_{ij}\ge 0 \quad i=\overline{1,2}\,,\ j=\overline{3,5} \end{cases}$$

На обобщенной сети эта задача будет отображена следующим образом :

$$-h_6/3 \to \min$$

$$\begin{cases} h_{13}+h_{14}+h_{15}=h_1 \\ h_{23}+h_{24}+h_{25}=h_2 \\ h_{36}-10\cdot h_{13}-4\cdot h_{23}=-h_3 \\ h_{46}-2\cdot h_{14}-5\cdot h_{24}=-h_4 \\ h_{56}-3\cdot h_{15}-6\cdot h_{25}=-h_5 \\ -h_{36}-h_{46}-h_{56}=-h_6 \\ h_{36}=h_6/3 \\ h_{46}=h_6/3 \\ h_{56}=h_6/3 \\ h_{ij}\ge 0\ ,\ (i,j)\in U, \\ 0\le h_i\le 1,\ i\in I^1 \\ h_i\ge 0,\ i\in I^2 \end{cases}$$



$I^1=\{1,2\}$, $I^2=\{3,4,5,6\}$, $i_0=6$.

Этот пример был решен с помощью алгоритма решения производственно-транспортной задачи с дополнительными ограничениями (10) с учетом сетевых свойств задачи , специфики теоретико-графовой структуры базиса . Значение целевой функции равно -3.6 , потоки по дугам: h_{13}=0.36 , h_{14}=0.00 , h_{15}=0.64 , h_{23}=0.00 , h_{24}=0.72 , h_{25}=0.28 , h_{36}=3.6 , h_{46}=3.6, h_{56}=3.6 , интенсивности узлов: h_1=1.00 , h_2=1.00 , h_3=0 , h_4=0 , h_5=0 , h_6=10.8.

Литература:

1.Л.В.Канторович. Экономический расчет наилучшего использования ресурсов. Изд-во АН СССР , М , 1959 .