BULGARIAN ACADEMY OF SCIENCES

SOFIA UNIVERSITY "KLIMENT OHRIDSKI"

HIGHER INSTITUTE OF MACHINE AND ELECTRICAL ENGINEERING "LENIN"

БОЛГАРСКАЯ АКАДЕМИЯ НАУК

СОФИЙСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ им. КЛИМЕНТА ОХРИДСКОГО

ВЫСШИЙ МАШИННО-ЭЛЕКТРОТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ им. В.И. ЛЕНИНА

NUMERICAL METHODS AND APPLICATIONS

PROCEEDINGS OF THE INTERNATIONAL CONFERENCE ON NUMERICAL METHODS AND APPLICATIONS

SOFIA, AUGUST 22 - 27, 1989

ЧИСЛЕННЫЕ МЕТОДЫ И ПРИЛОЖЕНИЯ

ТРУДЫ МЕЖДУНАРОДНОЙ КОНФЕРЕНЦИИ ПО ЧИСЛЕННЫМ МЕТОДАМ И ПРИЛОЖЕНИЯМ

СОФИЯ, 22 - 27 АВГУСТА 1989 Г.

PUBLISHING HOUSE OF THE BULGARIAN ACADEMY OF SCIENCES

ИЗДАТЕЛЬСТВО БОЛГАРСКОЙ АКАДЕМИИ НАУК

SOFIA . 1989 . СОФИЯ

ОБОБЩЕННАЯ ПРОИЗВОДСТВЕННО-ТРАНСПОРТНАЯ СЕТЕВАЯ ЗАДАЧА

Л.А.Пилипчук, Л.В.Командина

Рассмотрим конечную ориентированную сеть $S=\{I, U\}$ с множеством узлов I и множеством дуг U. Будем считать, что $I=I^c \cup I^*$, $I^c \cap I^* = \varnothing$, где I^c, I^* – множество узлов с постоянными a_i и переменными $\pm x_i$ интенсивностями соответственно. Через $I^n \subset I^*$ обозначим заданное множество узлов (пунктов производства) с интенсивностями x_i. Тогда $I^* \setminus I^n$ – заданное множество узлов (пунктов потребления) с интенсивностями $-x_i$, $a_{*i} \leq x_i \leq a_i^*$, $a_{*i} \geq 0$, $i \in I^*$.

Введем для узлов $i \in I^*$ характеристику c_i, которая для узлов из I^n означает затраты, связанные с увеличением производства на единицу продукта, для узлов из $I^* \setminus I^n$ – величину расхода на хранение единицы продукта. Остальные характеристики оставим традиционными: d_{ij} – пропускная способность дуги (i,j); x_{ij} – дуговой поток; c_{ij} – стоимость перевозки единицы потока по дуге (i,j).

Совокупность $x=(x_i, i\in I^*, x_{ij}, (i,j)\in U)$ из плана производства $(x_i, i\in I^*)$ и потока $(x_{ij}, (i,j)\in U)$ назовем потокопланом на сети S, если она удовлетворяет соотношениям:

$$\sum_{j\in I_i^+(U)} x_{ij} - \sum_{j\in I_i^-(U)} x_{ji} = \begin{cases} a_i, & \text{если } i\in I^c; \\ x_i, & \text{если } i \in I^n; \\ -x_i, & \text{если } i\in I^* \setminus I^n; \end{cases} \tag{I}$$

$$\sum_{i\in I^*} \alpha_i^k x_i = b_k, \quad k=\overline{1,l}; \tag{2}$$

$$a_{*i} \leq x_i \leq a_i^*, \ i\in I^*; \quad 0 \leq x_{ij} \leq d_{ij}, \ (i,j)\in U, \tag{3}$$

где $I_i^+(U)=\{j: (i,j)\in U\}$, $I_i^-(U)=\{j: (j,i)\in U\}$.

На сети S рассмотрим задачу минимизации целевой функции

$$\sum_{(i,j)\in U} c_{ij} x_{ij} + \sum_{i\in \bar{I}^*} c_i x_i \longrightarrow \min, \tag{4}$$

при ограничениях (1) – (3).

Потокоплан $x^{\varepsilon} = (x_{ij}^{\varepsilon}, (i,j)\in U; x_i^{\varepsilon}, i\in I^*)$ называется ε - оптимальным (субоптимальным), если

$$\sum_{(i,j)\in U} c_{ij} x_{ij}^{\varepsilon} + \sum_{i\in \bar{I}^*} c_i x_i^{\varepsilon} - \sum_{(i,j)\in U} c_{ij} x_{ij}^{0} - \sum_{i\in \bar{I}^*} c_i x_i^{0} \leqslant \varepsilon,$$

где $x^0 = (x_{ij}^0, (i,j)\in U; x_i^0, i\in \bar{I}^*)$ – оптимальный потокоплан.

Пусть $\quad \operatorname{sign}[i] = \begin{cases} 1, & \text{если } i\in \bar{I}^n; \\ -1, & \text{если } i\in \bar{I}^*\setminus \bar{I}^n. \end{cases}$

В этом случае ограничения (I) можно записать так:

$$\sum_{j\in \bar{I}_i^+(U)} x_{ij} - \sum_{j\in \bar{I}_i^-(U)} x_{ji} = \begin{cases} a_i, & \text{если } i\in \bar{I}^c; \\ x_i \operatorname{sign}[i], & \text{если } i\in \bar{I}^*. \end{cases} \tag{5}$$

Обозначим через $S^p = \{\bar{I}^p, U^p\}$, $p=\overline{1,s}$ компоненты связности сети S. Составим $(s+l)\times|\bar{I}^*|$ – матрицу:

$$\mathcal{D}(\bar{I}^*) = \begin{bmatrix} \hat{\mathcal{D}} \\ \mathcal{D}_{\alpha} \end{bmatrix}.$$

Здесь $\hat{\mathcal{D}}$ – матрица блочно-диагонального вида

$$\hat{\mathcal{D}} = \begin{bmatrix} \mathcal{D}_1 & & 0 \\ & \mathcal{D}_2 & \\ 0 & \ldots & \mathcal{D}_s \end{bmatrix}$$

где блок $\mathcal{D}_p$, $p=\overline{1,s}$ представляет собой строку из $|\bar{I}^p\cap I^*|$ элементов, каждый из которых равен $\operatorname{sign}[i]$, $i\in \bar{I}^p\cap \bar{I}^*$, а $\mathcal{D}_{\alpha}$ – $l\times|I^*|$ матрица, k -ая строка которой состоит из элементов α_i^k, $i\in I^p\cap I^*$, $p=\overline{1,s}$. Если $s+l\neq|I^*|$, то дополним $\mathcal{D}(I^*)$ нулями до квадратной матрицы размера $\max\{s+l, |I^*|\}$.

Опорой сети S в задаче (2) – (5) назовем совокупность $\{I_{on}, U_{on}\}$, $\bar{I}_{on}\subset \bar{I}^*$, $U_{on}\subset U$, для которой при $\tilde{I}=\bar{I}_{on}$, $\tilde{U}=U_{on}$ система

$$\left.\begin{array}{l}\sum\limits_{j\in \bar I_{i}^{+}(\tilde U)} x_{ij} - \sum\limits_{j\in \bar I_i^{-}(\tilde U)} x_{ji} = \begin{cases} 0, \text{ если } i\in \bar I\setminus \tilde{\bar I}, \\ x_i\,\mathrm{sign}[i], \text{ если } i\in\tilde{\bar I}, \end{cases} \\ \sum\limits_{i\in\tilde{\bar I}} \alpha_i^k x_i = 0, \ k=\overline{1,\ell} \end{array}\right\} \quad (6)$$

имеет только тривиальное решение $x_i=0$, $i\in I_{on}$; $x_{ij}=0, (i,j)\in U_{on}$, но имеет нетривиальное решение для любой из совокупностей $\{\tilde{\bar I}, \tilde U\}$ вида:

а) $\tilde{\bar I} = \bar I_{on}$, $\tilde U = U_{on}\cup(i_0,j_0)$, где $(i_0,j_0)\bar\in U_{on}$;

б) $\tilde{\bar I} = \bar I_{on}\cup i_0$, $i_0\in \bar I^*\setminus \bar I_{on}$, $\tilde U = U_{on}$.

Дуги $(i,j)\in U_{on}$ и узлы $i\in\bar I_{on}$ назовем опорными, остальные дуги $(i,j)\in U_H = U\setminus U_{on}$ и узлы $i\in \bar I_H = \bar I^*\setminus\bar I_{on}$ – неопорными.

Критерий опорности. Совокупность $\{\bar I_{on}, U_{on}\}$ является опорой сети S тогда и только тогда, когда для частичной сети $S_{on}=\{I, U_{on}\}$ выполняются условия:

1) Каждая компонента связности $S^p_{on}=\{\bar I^p, U^p_{on}\}$, $p=\overline{1,s}$ не содержит циклов;

2) Каждая компонента связности содержит хотя бы один опорный узел;

3) $\det \mathcal{D}(I_{on}) \neq 0$.

Формула приращения. Пару из потокоплана x и опоры S_{on} назовем опорным потокопланом. Будем называть его прямо невырожденным, если

$$0 < x_{ij} < d_{ij},\ (i,j)\in U_{on} \text{ и } a_{*i} < x_i < a_i^*,\ i\in \bar I_{on}. \quad (7)$$

По опоре S_{on} построим потенциалы $u_i, i\in\bar I$ и $z_k, k=\overline{1,\ell}$ – числа, являющиеся решением системы:

$$\begin{aligned} -u_i\,\mathrm{sign}[i] + \sum_{k=1}^{\ell} \alpha_i^k z_k &= c_i, \quad i\in\bar I^p_{on}, \\ u_i - u_j &= c_{ij},\ (i,j)\in U^p_{on},\quad p=\overline{1,s}. \end{aligned} \quad (8)$$

По известным потенциалам подсчитаем оценки неопорных дуг и узлов:

$$\Delta_{ij} = u_i - u_j - c_{ij},\quad (i,j)\in U_H,$$

$$\Delta_i = -u_i \,\mathrm{sign}[i] + \sum_{k=1}^{l} \alpha_i^k z_k - c_i, \quad i \in I_H.$$

Приращение целевой функции (4), соответствующее приращению Δx потокоплана x, $\bar{x} = x + \Delta x$ имеет вид:

$$\sum_{(i,j)\in U} c_{ij} \Delta x_{ij} + \sum_{i\in I^*} c_i \Delta x_i = -\sum_{(i,j)\in U_H} \Delta_{ij} \Delta x_{ij} - \sum_{i\in I_H} \Delta_i \Delta x_i . \tag{9}$$

Критерий оптимальности. Соотношения

$\Delta_{ij} \leq 0$ при $x_{ij} = 0$, $\Delta_{ij} \geq 0$ при $x_{ij} = d_{ij}$;

$\Delta_{ij} = 0$ при $0 < x_{ij} < d_{ij}$, $(i,j) \in U_H$ – на дугах;

$\Delta_i \leq 0$ при $x_i = a_{*i}$; $\Delta_i \geq 0$ при $x_i = a_i^*$;

$\Delta_i = 0$ при $a_{*i} < x_i < a_i^*$, $i \in I_H$ – на узлах

достаточны, а в случае невырожденности (7) и необходимы для оптимальности опорного потокоплана $\{x, S_{on}\}$.

Число

$$\beta = \beta(x, S_{on}) = \sum_{\substack{i\in I_H,\\ \Delta_i<0}} \Delta_i (a_{*i} - x_i) + \sum_{\substack{i\in I_H,\\ \Delta_i>0}} \Delta_i (a_i^* - x_i) + \sum_{\substack{(i,j)\in U_H,\\ \Delta_{ij}>0}} \Delta_{ij} (d_{ij} - x_{ij}) - \sum_{\substack{(i,j)\in U_H,\\ \Delta_{ij}<0}} \Delta_{ij} x_{ij} \tag{10}$$

назовём оценкой субоптимальности опорного потокоплана $\{x, S_{on}\}$.

Критерий субоптимальности. Для ε-оптимальности потокоплана x^ε необходимо и достаточно, чтобы существовала такая опора S_{on}^ε, что для оценки субоптимальности (10) опорного потокоплана $\{x^\varepsilon, S_{on}^\varepsilon\}$ выполняется неравенство $\beta \leq \varepsilon$.

Пусть $\{x, S_{on}\}$ – начальный опорный потокоплан, для которого не выполняются условия критериев оптимальности и субоптимальности (при заданном ε). Из формулы (9) следует, что потокоплан x можно улучшить. Следуя [1] осуществим операции по улучшению потокоплана x.

Согласно (9) число Δ_{ij} (или Δ_i) есть скорость изменения стоимости потокоплана x при изменении неопорного дугового потока x_{ij} (или неопорной компоненты x_i). Пусть $\Delta_{i_0 j_0}$ – наибольшая по модулю неопорная оценка, не удовлетворяющая соотношениям критерия оптимальности на дугах; Δ_{k_0} – наибольшая по модулю оценка, не удовлетворяющая условиям критерия оптимальности на узлах. Пусть $\Delta_0 = \max\{|\Delta_{i_0 j_0}|, |\Delta_{k_0}|\}$. Возможны случаи:

I) $\Delta_0 = |\Delta_{i_0 j_0}|$;

2) $\Delta_0 = |\Delta_{k_0}|$.

Из формулы приращения (9) следует, что при переходе $x \to \bar{x}$ стоимость потокоплана уменьшается на величину $\theta^c |\Delta_{i_0 j_0}|$ в случае I) и на величину $\theta^c |\Delta_{k_0}|$ в случае 2), где θ^c – максимально допустимый шаг, при котором совокупность чисел $\bar{x} = (\bar{x}_i, i \in \bar{I}^*, \bar{x}_{ij}, (i,j) \in U)$ является потокопланом на сети S.

Если для опорного потокоплана $\{\bar{x}, \bar{S}_{on}\}$ не выполняется неравенство $\bar{\beta} \leq \xi$, то продолжаем операции по улучшению потокоплана. В противном случае потокоплан $\bar{x}$ принимается за приближенное решение задачи (2)-(5).

Литература

I. Габасов Р., Кириллова Ф.М. Методы линейного программирования. ч.3. Специальные задачи. Мн.: Изд-во БГУ им.В.И.Ленина, 1980. - 368с.