Министерство образования Республики Беларусь
Учреждение образования
«Международный государственный экологический
университет имени А. Д. Сахарова»

Факультет мониторинга окружающей среды

Кафедра физики и высшей математики

Е. П. Борботко, Т. Е. Кузьменкова, А. В. Шевцова

ВЫСШАЯ МАТЕМАТИКА (аналитическая геометрия, линейная алгебра, функции и пределы)

Учебно-методическое пособие

Минск
2009

УДК 51(076.1)
ББК 22.11я73
Б82

Рекомендовано к изданию НМС МГЭУ им. А. Д. Сахарова
(протокол № 8 от 24 марта 2008 г.)

Авторы:

Е. П. Борботко, ст. преподаватель кафедры физики и высшей математики МГЭУ им. А. Д. Сахарова;

Т. Е. Кузьменкова, к.п.н., доцент кафедры физики и высшей математики МГЭУ им. А. Д. Сахарова;

А. В. Шевцова, ст. преподаватель кафедры физики и высшей математики МГЭУ имени А. Д. Сахарова.

Рецензенты:

М. В. Щукин, к. ф.-м. н., доцент кафедры физики и высшей математики МГЭУ им. А. Д. Сахарова;

В. В. Пакштайте, к.п.н., зав. кафедрой математики и МПМ МГПУ имени И. П. Шамякина, доцент

Б82 Борботко, Е. П. Высшая математика (аналитическая геометрия, линейная алгебра, функции и пределы): учеб.-метод. пособие / Е. П. Борботко, Т. Е. Кузьменкова, А. В. Шевцова. – Минск : МГЭУ им. А. Д. Сахарова, 2009. – 48 с.

ISBN 978-985-6931-21-8.

Пособие предназначено для студентов факультета заочного обучения (экологическая медицина) и содержит контрольную работу по высшей математике, необходимый теоретический и практический материал к каждому разделу контрольной работы.

УДК 51(076.1)
ББК 22.11я73

ISBN 978-985-6931-21-8

ОГЛАВЛЕНИЕ

ПРЕДИСЛОВИЕ

Первая контрольная работа выполняется по следующим разделам высшей математики.

1. Векторная алгебра. Координаты и длина вектора. Скалярное, векторное и смешанное произведение: определение и вычисление. Угол между векторами. Признаки параллельности и перпендикулярности векторов. Площадь параллелограмма и треугольника. Объем пирамиды, построенной на векторах. Признак компланарности векторов.

2. Аналитическая геометрия на плоскости. Различные виды уравнений прямой на плоскости. Угол между прямыми. Признаки параллельности и перпендикулярности прямых.

Уравнение окружности. Эллипс, гипербола, парабола (определение, канонические уравнения).

3. Аналитическая геометрия в пространстве. Способы задания плоскости в пространстве. Общее уравнение плоскости. Способы задания прямой в пространстве. Угол между плоскостями, прямыми, прямой и плоскостью. Признаки параллельности и перпендикулярности плоскостей, прямых, прямой и плоскости.

4. Элементы линейной алгебры. Матрицы. Действия над матрицами. Определители 2-го и 3-го порядка. Обратная матрица. Решение системы линейных уравнений методом Гаусса, по формулам Крамера и матричным способом.

5. Предел и непрерывность функции. Функции и их свойства. Способы задания функций. Предел функции. 1-й и 2-й замечательные пределы. Раскрытие неопределенностей вида

$$\frac{0}{0},\ \frac{\infty}{\infty},\ 0\cdot\infty,\ 1^{\infty},\ 0^{0},\ \infty-\infty.$$

Непрерывность функции. Точки разрыва. Односторонние пределы.

Рекомендации по выполнению и оформлению контрольных работ

При выполнении контрольных работ необходимо учитывать указанные ниже рекомендации. Работы, выполненные без соблюдения этих рекомендаций, не засчитываются и возвращаются студенту для переработки.

1. Контрольная работа должна быть выполнена в **отдельной тетради в клетку**. Необходимо оставлять **поля** шириной 4–5 см для замечаний рецензента.

2. На обложке тетради должны быть ясно написаны **фамилия** студента, его **инициалы**, **учебный номер** (номер зачетной книжки), номер контрольной работы, название дисциплины; здесь же указывается название учебного заведения, дата отсылки работы и адрес студента. В конце работы ставится дата ее выполнения и подпись студента.

3. В работу должны быть включены **все задачи**, указанные в задании по положенному варианту. Контрольные работы, содержащие не все задачи задания, а также задачи не своего варианта, не засчитываются.

4. Студент должен выполнять задачу в контрольной работе по варианту, определенному двумя последними цифрами его учебного номера (номера зачетной книжки) следующим образом:

№ задачи в контрольной работе	1	2	3	4	5	6	7	8
№ варианта	n	$к$	$9\text{-}n$	$9\text{-}к$	$\vert n\text{-}к\vert$	n	$к$	$9\text{-}n$

Здесь $к$ – последняя, n – предпоследняя цифра учебного номера, $|n–к|$-

5.Решения задач следует располагать в порядке номеров, указанных в задании, сохраняя номера задач, излагать подробно, аккуратно объясняя и мотивируя все действия по ходу решения.

6.Перед решением каждой задачи надо **полностью выписать ее условие.** Если несколько задач, из которых нужно выбрать задачи варианта, имеют общую формулировку, то следует, переписывая условие задачи, заменить общие данные конкретными, взятыми из соответствующего номера.

7.После получения прорецензированной работы, студент должен исправить все отмеченные рецензентом ошибки и выполнить все его рекомендации.

1. МАТРИЦЫ И ОПРЕДЕЛИТЕЛИ

1.1. Вычисление определителей

Матрицей называется прямоугольная таблица, составленная из действительных или комплексных чисел:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}.$$

Горизонтальные ряды чисел матрицы называются ее *строками*, а вертикальные – *столбцами*. Числа a_{ij} называются *элементами матрицы*, где i – номер строки, j – номер столбца. Матрицу, имеющую m строк и n столбцов, называют *матрицей размеров* $m \times n$. Если $m = n$, то матрица называется *квадратной порядка* n .

Определителем квадратной матрицы $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ называется число

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11} \cdot a_{22} - a_{12} \cdot a_{21}.$$

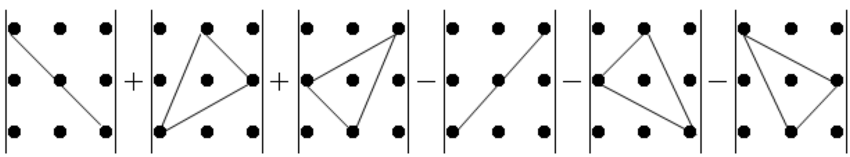
Это определитель второго порядка.

Аналогично определителем третьего порядка называется число:

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11} \cdot a_{22} \cdot a_{33} + a_{12} \cdot a_{23} \cdot a_{31} + a_{21} \cdot a_{32} \cdot a_{13} - a_{13} \cdot a_{22} \cdot a_{31} - a_{12} \cdot a_{21} \cdot a_{33} -$$

$$- a_{23} \cdot a_{32} \cdot a_{11}.$$

При вычислении определителя пользуются правилом треугольника, которое схематически выглядит следующим образом:



1.2. Действия над матрицами

Сложение матриц

Пусть заданы две матрицы одинаковых размеров $m \times n$: $A = (a_{ij})$ и $B = (b_{ij})$. Их *суммой* $A+B$ называется матрица размеров $m \times n$: $C = A + B = (c_{ij})$, такая, что $c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$, $i = 1, 2, ..., m$; $j = 1, 2, ..., n$. Другими словами, при сложении матриц их соответствующие элементы складываются.

Произведение матрицы на число

Произведением матрицы $A = (a_{ij})$ *размеров* $m \times n$ *на число* α (или числа α на матрицу $A = (a_{ij})$) называется матрица $B = (b_{ij})$ размеров $m \times n$, такая, что $b_{ij} = \alpha\ a_{ij}$, $i = 1, 2, ..., m$; $j = 1, 2, ..., n$. Произведение матрицы A на число α обозначается $A\alpha$ или αA.

Разность матриц $A - B$ определим следующим образом: $A - B = A + (-B)$.

Произведение матриц

Матрицу A будем называть *согласованной* с матрицей B, если число столбцов матрицы A равно числу строк матрицы B. (Из согласованности матрицы A с B не следует, вообще говоря, согласованность матрицы B с A.)

Произведение матрицы A на матрицу B вводится только тогда, когда матрица A согласована с матрицей B, т. е. если A есть матрица размеров $m \times n$, а B –размеров $n \times k$.

Произведением матрицы $A = (a_{ij})$ *на матрицу* $B = (b_{ij})$ называется матрица $C = (c_{ij})$ размеров $m \times k$, такая, что $c_{ij} = \sum_{s=1}^{n} a_{is} b_{sj}$. Произведение матрицы A на матрицу B обозначается AB.

Из определения следует, что элемент матрицы AB, стоящий в i-й строке и j-м столбце, равен сумме произведений элементов i-й строки матрицы A на соответствующие элементы j-го столбца матрицы B. Произведение AB часто называют произведением матрицы A на матрицу B справа произведением матрицы B на матрицу A слева. Если произведение AB существует, то произведение BA, вообще говоря, не существует. Если AB и BA существуют, то, возможно, $AB \neq BA$. Если $AB = BA$, то матрицы называются *перестановочными*, или *коммутирующими*.

1.3. Обратная матрица

Если для матрицы A существует матрица B, такая, что $AB = BA = E$, где E – единичная матрица, то матрица B называется *обратной* к матрице A.

Из определения следует, что A и B – квадратные матрицы одинакового порядка. Матрицу, обратную к матрице A, будем обозначать A^{-1}.

Невырожденной, *или неособенной матрицей* называется квадратная матрица, определитель которой отличен от нуля. Если определитель матрицы равен нулю, то матрица называется *вырожденной*, *или особенной*.

Для того, чтобы существовала матрица B, обратная матрице A, необходимо и достаточно, чтобы матрица A была невырожденной.

Определитель второго порядка, который получается из определителя Δ третьего порядка вычеркиванием i-й строки и j-го столбца, называется *минором* элемента a_{ij} определителя Δ и обозначается M_{ij}.

Алгебраическим дополнением элемента a_{ij} определителя Δ называется минор M_{ij}, взятый со знаком $(-1)^{i+j}$, обозначается A_{ij}.

Итак, $A_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}$.

Обратная к данной матрица может быть получена следующим образом:

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A}\begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \dots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \dots & A_{n2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_{1n} & A_{2n} & \dots & A_{nn} \end{pmatrix},$$

где $\det A$ – определитель матрицы A, A_{ij} – алгебраические дополнения элементов матрицы A.

Примеры решения задач

Задача 1. Найти сумму и разность матриц A и B, а также произведение матрицы A на число $\alpha = -3$.

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 3 \\ 4 & -5 & 2 \\ -2 & 3 & 1 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 2 \\ 3 & -4 & 1 \\ 2 & -5 & 2 \end{pmatrix}.$$

Решение. Матрицы A и B имеют одинаковые размеры, следовательно, для них определена операция сложения (вычитания). Найдем сумму матриц

$$A+B=\begin{pmatrix} 4+1 & 2+(-3) & 3+2 \\ 4+3 & -5+(-4) & 2+1 \\ -2+2 & 3+(-5) & 1+2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 5 & -1 & 5 \\ 7 & -9 & 3 \\ 0 & -2 & 3 \end{pmatrix}.$$

Разность матриц будет равна

$$A-B=\begin{pmatrix} 4-1 & 2-(-3) & 3-2 \\ 4-3 & -5-(-4) & 2-1 \\ -2-2 & 3-(-5) & 1-2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 3 & 5 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ -4 & 8 & -1 \end{pmatrix}.$$

Произведение матрицы A на число $\alpha = -3$ есть матрица

$$\alpha A=\begin{pmatrix} -3\cdot 4 & -3\cdot 2 & -3\cdot 3 \\ -3\cdot 4 & -3\cdot(-5) & -3\cdot 2 \\ -3\cdot(-2) & -3\cdot 3 & -3\cdot 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -12 & -6 & -9 \\ -12 & 15 & -6 \\ 6 & -9 & -3 \end{pmatrix}.$$

Пример 2. Найти произведения матриц AB и BA, если они существуют:

1) $A=\begin{pmatrix} 4 & 2 & 3 \\ 4 & -5 & 2 \\ -2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 1 & -3 & 2 \\ 3 & -4 & 1 \\ 2 & -5 & 2 \end{pmatrix}$;

2) $A=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -3 & 4 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 1 & 2 & 9 \end{pmatrix}$.

Решение.

1) Матрица A согласована с матрицей B, тогда, используя определение произведения матриц, находим

$$AB=\begin{pmatrix} 4\cdot 1+2\cdot 3+3\cdot 2 & 4\cdot(-3)+2\cdot(-4)+3\cdot(-5) & 4\cdot 2+2\cdot 1+3\cdot 2 \\ 4\cdot 1+(-5)\cdot 3+2\cdot 2 & 4\cdot(-3)+(-5)\cdot(-4)+2\cdot(-5) & 4\cdot 2+(-5)\cdot 1+2\cdot 2 \\ (-2)\cdot 1+3\cdot 3+1\cdot 2 & (-2)\cdot(-3)+3\cdot(-4)+1\cdot(-5) & (-2)\cdot 2+3\cdot 1+1\cdot 2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 16 & -35 & 16 \\ -7 & -2 & 7 \\ 9 & -11 & 1 \end{pmatrix}.$$

Матрица B согласована с матрицей A, следовательно, существует произведение BA

$$BA=\begin{pmatrix} 1\cdot 4+(-3)\cdot 4+2\cdot(-2) & 1\cdot 2+(-3)\cdot(-5)+2\cdot 3 & 1\cdot 3+(-3)\cdot 2+2\cdot 1 \\ 3\cdot 4+(-4)\cdot 4+1\cdot(-2) & 3\cdot 2+(-4)\cdot(-5)+1\cdot 3 & 3\cdot 3+(-4)\cdot 2+1\cdot 1 \\ 2\cdot 4+(-5)\cdot 4+2\cdot(-2) & 2\cdot 2+(-5)\cdot(-5)+2\cdot 3 & 2\cdot 3+(-5)\cdot 2+2\cdot 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -12 & 23 & -1 \\ -6 & 29 & 2 \\ -16 & 35 & -2 \end{pmatrix}.$$

Таким образом, мы видим, что $AB \neq BA$.

2) Матрица A согласована с матрицей B, тогда находим

$$AB=\begin{pmatrix}1\cdot(-1)+2\cdot 1 & 1\cdot 0+2\cdot 2 & 1\cdot 3+2\cdot(-9)\\ -3\cdot(-1)+4\cdot 1 & -3\cdot 0+4\cdot 2 & -3\cdot 3+4\cdot(-9)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 4 & -15\\ 7 & 8 & -45\end{pmatrix}.$$

Матрица B не согласована с матрицей A, следовательно, произведение BA не существует.

Пример 3. Дана матрица

$$A=\begin{pmatrix}3 & 5 & -2\\ 1 & -3 & 2\\ 6 & 7 & -3\end{pmatrix}.$$

Выяснить, существует ли обратная ей матрица, и если существует, то найти ее.

Решение. Найдем определитель матрицы A

$$\det A=\begin{vmatrix}3 & 5 & -2\\ 1 & -3 & 2\\ 6 & 7 & -3\end{vmatrix}=10\neq 0.$$

Следовательно, данная матрица невырожденная, и обратная к ней матрица существует. Для нахождения обратной матрицы вычислим алгебраические дополнения A_{ij} элементов данной матрицы. Получим

$$A_{11}=\begin{vmatrix}-3 & 2\\ 7 & -3\end{vmatrix}=-5;\quad A_{12}=-\begin{vmatrix}1 & 2\\ 6 & -3\end{vmatrix}=15;\quad A_{13}=\begin{vmatrix}1 & -3\\ 6 & 7\end{vmatrix}=25;$$

$$A_{21}=-\begin{vmatrix}5 & -2\\ 7 & -3\end{vmatrix}=1;\quad A_{22}=\begin{vmatrix}3 & -2\\ 6 & -3\end{vmatrix}=3;\quad A_{23}=-\begin{vmatrix}3 & 5\\ 6 & 7\end{vmatrix}=9;$$

$$A_{31}=\begin{vmatrix}5 & -2\\ -3 & 2\end{vmatrix}=4;\quad A_{32}=-\begin{vmatrix}3 & -2\\ 1 & 2\end{vmatrix}=-8;\quad A_{33}=\begin{vmatrix}3 & 5\\ 1 & -3\end{vmatrix}=-14.$$

Тогда

$$A^{-1} = \frac{1}{10}\begin{pmatrix} -5 & 1 & 4 \\ 15 & 3 & -8 \\ 25 & 9 & -14 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -0{,}5 & 0{,}1 & 0{,}4 \\ 1{,}5 & 0{,}3 & -0{,}8 \\ 2{,}5 & 0{,}9 & -1{,}4 \end{pmatrix}.$$

2. РЕШ СИСТЕМ ЛИНЕЙНЫХ АЛГЕ ЕСКИХ УРАВНЕНИЙ

Линейным алгебраическим уравнением называют уравнение, содержащее переменную только в первой степени и не имеющее произведений переменных. При решении систем линейных уравнений используются определители и матрицы.

Пусть дана система трех линейных уравнений с тремя неизвестными:

$$\begin{cases} a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z = b_1 \\ a_{21}x + a_{22}y + a_{23}z = b_2 \\ a_{31}x + a_{32}y + a_{33}z = b_3 \end{cases}$$

2.1. Метод Крамера

Введем определитель системы $\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$ и дополнительные определители

$$\Delta_x = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} \\ b_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}, \quad \Delta_y = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & a_{13} \\ a_{21} & b_2 & a_{23} \\ a_{31} & b_3 & a_{33} \end{vmatrix}, \quad \Delta_z = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & b_3 \end{vmatrix}.$$

Если определитель системы $\Delta \neq 0$, то система имеет единственное решение, определяемое формулами Крамера**:**

$$x = \frac{\Delta_x}{\Delta}, \qquad y = \frac{\Delta_y}{\Delta}, \qquad z = \frac{\Delta_z}{\Delta}.$$

2.2. Метод Гаусса

Ранее рассмотренный метод Крамера можно применять при решении только тех систем, в которых число уравнений совпадает с числом неизвестных, причем определитель системы должен быть отличен от нуля. Метод Гаусса является более универсальным и пригоден для систем с любым числом уравнений. Он заключается в последовательном исключении неизвестных из уравнений системы.

Теорема Кронекера-Капелли. Для того, чтобы неоднородная система линейных алгебраических уравнений была совместна, необходимо и достаточно, чтобы ранг расширенной матрицы системы совпадал с рангом матрицы системы.

Однородная система уравнений всегда совместна, так как имеет нулевое решение $x = y = z = 0$. Ненулевые решения она имеет тогда и только тогда, когда $\Delta = 0$.

Примеры решения задач

Пример 1. Решить систему линейных уравнений методом Крамера:

$$\begin{cases} 5x + 4y - z = 4 \\ -2x + y + 3z = 1 \\ 7x + y - 2z = 9 \end{cases}$$

Решение. Находим определитель системы:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 5 & 4 & -1 \\ -2 & 1 & 3 \\ 7 & 1 & -2 \end{vmatrix} = 5\cdot 1\cdot(-2) + 4\cdot 3\cdot 7 + (-1)\cdot 1\cdot(-2) - (-1)\cdot 1\cdot 7 - 4\cdot(-2)\cdot(-2) - 5\cdot 3\cdot 1 =$$

$$= -10 + 84 + 2 + 7 - 16 - 15 = 52.$$

Так как $\Delta \neq 0$, то можно использовать формулы Крамера. Для этого находим еще три определетеля:

$$\Delta_X = \begin{vmatrix} 4 & 4 & -1 \\ 1 & 1 & 3 \\ 9 & 1 & -2 \end{vmatrix} = 4\cdot 1\cdot(-2) + 4\cdot 3\cdot 9 + (-1)\cdot 1\cdot 1 - (-1)\cdot 1\cdot 9 - 4\cdot 1\cdot(-2) - 4\cdot 3\cdot 1 =$$

$$= -8 + 108 - 1 + 9 + 8 - 12 = 104,$$

$$\Delta_Y=\begin{vmatrix}5&4&-1\\-2&1&3\\7&9&-2\end{vmatrix}=5\cdot1\cdot(-2)+4\cdot3\cdot7+(-1)\cdot9\cdot(-2)-(-1)\cdot1\cdot7-4\cdot(-2)\cdot(-2)-5\cdot3\cdot9=$$
$$=-10+84+18+7-16-135=-52,$$

$$\Delta_Z=\begin{vmatrix}5&4&4\\-2&1&1\\7&1&9\end{vmatrix}=5\cdot1\cdot9+4\cdot1\cdot7+4\cdot1\cdot(-2)-4\cdot1\cdot7-4\cdot(-2)\cdot9-5\cdot1\cdot1=$$
$$=45+28-8-28+72-5=104.$$

Теперь воспользуемся формулами Крамера:

$$x=\frac{\Delta_X}{\Delta}=\frac{104}{52}=2;\quad y=\frac{\Delta_Y}{\Delta}=\frac{-52}{52}=-1;\quad z=\frac{\Delta_Z}{\Delta}=\frac{104}{52}=2.$$

Ответ: x = 2; y = –1; z = 2.

Пример 2. Решить систему линейных уравнений методом Гаусса:

$$\begin{cases}2x+3y+z=21\\5x+4y+z=40\\9x+5y+4z=61\end{cases}$$

Решение. Путем элементарных преобразований необходимо привести имеющуюся систему к эквивалентной системе ступенчатого вида. Затем отбрасывают уравнения вида $0=0$, из последнего уравнения находят выражение последнего неизвестного и подставляют это выражение в предыдущие уравнения. Таким образом находят все неизвестные.

Запишем расширенную матрицу системы:

$$\left(\begin{array}{ccc|c}2&3&1&21\\5&4&1&40\\9&5&4&61\end{array}\right).$$

Первую строку умножим на $-\frac{5}{2}$ и сложим со второй, затем первую строку умножим на $-\frac{9}{2}$ и сложим с третьей:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 3 & 1 & 21 \\ 5 & 4 & 1 & 40 \\ 9 & 5 & 4 & 61 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 3 & 1 & 21 \\ 0 & -7/2 & -3/2 & -25/2 \\ 0 & -17/2 & -1/2 & -67/2 \end{array}\right).$$

Вторую строку, умноженную на $-\frac{17}{7}$, прибавляем к третьей:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 3 & 1 & 21 \\ 0 & -7/2 & -3/2 & -25/2 \\ 0 & -17/2 & -1/2 & -67/2 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 3 & 1 & 21 \\ 0 & -7/2 & -3/2 & -25/2 \\ 0 & 0 & 22/7 & -22/7 \end{array}\right).$$

Система уравнений приведена к треугольному виду:

$$\begin{cases} 2x+3y+z=21 \\ -\frac{7}{2}y-\frac{3}{2}z=-\frac{25}{2} \\ \frac{22}{7}z=-\frac{22}{7} \end{cases}$$

В результате получаем:

$$\frac{22}{7}z=-\frac{22}{7}; \quad -\frac{7}{2}y-\frac{3}{2}(-1)=-\frac{25}{2}; \quad 2x+3\cdot 4+(-1)=21;$$

$$\begin{cases} x=5 \\ y=4 \\ z=-1 \end{cases}$$

Ответ: $x=5; y=4; z=-1$.

Пример 3. Решить систему линейных уравнений методом Гаусса:

$$\begin{cases} x-3y+2z=1 \\ 2x+y-4z=5 \\ 5x-8y+2z=8 \end{cases}$$

Решение. Составим матрицу из коэффициентов при неизвестных и свободных членов:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -3 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & -4 & 5 \\ 5 & -8 & 2 & 8 \end{array}\right).$$

Умножая первую строку поочередно на –2, –5 и прибавляя соответственно ко второй и третьей, получаем матрицу:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -3 & 2 & 1 \\ 0 & 7 & -8 & 3 \\ 0 & 7 & -8 & 3 \end{array}\right).$$

Умножив вторую строку на -1 и прибавив к третьей, получим новую матрицу:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -3 & 2 & 1 \\ 0 & 7 & -8 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Данной матрице соответствует система уравнений:

$$\begin{cases} x - 3y + 2z = 1 \\ \quad 7y - 8z = 3 \end{cases}$$

Отсюда $\begin{cases} x = 3y - 2z + 1 \\ y = \dfrac{3 + 8z}{7} \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x = \dfrac{10z + 16}{7} \\ y = \dfrac{8z + 3}{7} \end{cases}$,

где z может принимать любые действительные значения.

Ответ: $x = \dfrac{10z + 16}{7}$; $y = \dfrac{8z + 3}{7}$, где $z \in R$.

Пример 4. Решить систему линейных уравнений методом Гаусса:

$$\begin{cases} x + y - z = 3 \\ x + y = 1 \\ x + y + z = 1 \end{cases}$$

Решение. Составим матрицу из коэффициентов при неизвестных и свободных членов:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 3 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right).$$

Умножая первую строку на -1 и прибавляя поочередно ко второй и третьей, получаем матрицу:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 2 & -2 \end{array}\right).$$

Умножив вторую строку на -2 и прибавив к третьей, получим новую матрицу:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{array}\right).$$

Данная система уравнений несовместна, так как никакие значения неизвестных не могут удовлетворять ей.

Ответ: система несовместна.

3. ЭЛЕМЕНТЫ В[illegible]НОЙ АЛГЕБРЫ В ПРОСТРАНСТВЕ

3.1. Векторы в пространстве

Любой вектор $\vec{a}$ раскладывается по базисным векторам прямоугольной системы координат: $\vec{a} = a_1\vec{i} + a_2\vec{j} + a_3\vec{k}$.

Координаты вектора

Если в пространстве заданы две точки $A(x_1; y_1; z_1)$, $B(x_2; y_2; z_2)$, то координаты вектора $\overrightarrow{AB}(x;\ y;\ z)$ равны разности соответствующих координат конца и начала вектора: $x = x_2 - x_1$, $y = y_2 - y_1$, $z = z_2 - z_1$,

$$\text{т. е. } \overrightarrow{AB}\ (x_2 - x_1; y_2 - y_1; z_2 - z_1).$$

Сложение и вычитание векторов

Пусть даны два вектора $\vec{a}(a_1;\ a_2;\ a_3)$, $\vec{b}\ (b_1;\ b_2;\ b_3)$. Тогда вектор, равный сумме этих векторов, будет иметь координаты

$$\vec{a} + \vec{b} = (a_1 + b_1;\ a_2 + b_2;\ a_3 + b_3),$$

вектор, равный разности этих векторов, имеет координаты

$$\vec{a} - \vec{b} = (a_1 - b_1;\ a_2 - b_2;\ a_3 - b_3),$$

Умножение вектора на число

При умножении вектора $\vec{a}(a_1;\ a_2;\ a_3)$ на число α, на это число умножается каждая координата данного вектора, т. е. вектор $\alpha\vec{a} = (\alpha a_1;\ \alpha a_2;\ \alpha a_3)$.

Условие коллинеарности векторов

Два вектора $\vec{a}\,(a_1;\ a_2;\ a_3)$ и $\vec{b}$ $(b_1; b_2; b_3)$ коллинеарны тогда и только тогда, когда их соответствующие координаты пропорциональны:

$$\frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2} = \frac{a_3}{b_3}.$$

Скалярное произведение векторов

Скалярным произведением двух векторов называется число, равное произведению длин этих векторов на косинус угла между ними:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos\varphi.$$

Скалярное произведение вектора $\vec{a}\,(a_1;\ a_2;\ a_3)$ на вектор $\vec{b}$ $(b_1; b_2; b_3)$, заданных относительно прямоугольной системы координат, равно сумме произведений соответствующих координат сомножителей:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3.$$

Длина вектора

Из свойств скалярного произведения векторов следует, что длина вектора $|\vec{a}| = \sqrt{\vec{a}^{\,2}}$. Если вектор $\vec{a}$ задан относительно прямоугольной системы координат $\vec{a}\,(a_1;\ a_2;\ a_3)$, то длина его вычисляется с помощью формулы:

$$|\vec{a}| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}.$$

Угол между векторами

Косинус угла φ между двумя векторами $\vec{a}\,(a_1;\ a_2;\ a_3)$ и $\vec{b}$ $(b_1; b_2; b_3)$, заданными в прямоугольной системе координат, находится так:

$$\cos\varphi = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|} \Rightarrow \cos\varphi = \frac{a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2} \cdot \sqrt{b_1^2 + b_2^2 + b_3^2}}.$$

Условие перпендикулярности двух векторов

Два ненулевых вектора $\vec{a}$ и $\vec{b}$ перпендикулярны тогда и только тогда, когда их скалярное произведение равно 0, $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$. Если эти векторы даны в прямоугольной системе координат: $\vec{a}\,(a_1;\ a_2;\ a_3)$ и $\vec{b}$ $(b_1; b_2; b_3)$, то условие перпендикулярности выражается через координаты векторов:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3 = 0 .$$

Векторное произведение векторов

Векторным произведением двух векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ называется вектор, обозначаемый символом $\vec{a} \times \vec{b}$ и удовлетворяющий следующим условиям:

1) длина этого вектора равна произведению длин данных векторов на синус угла между ними: $\left|\vec{a} \times \vec{b}\right| = \left|\vec{a}\right| \cdot \left|\vec{b}\right| \sin(\widehat{\vec{a}, \vec{b}})$;

2) вектор $\vec{a} \times \vec{b}$ перпендикулярен как вектору $\vec{a}$, так и $\vec{b}$;

3) векторы $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{a} \times \vec{b}$, взятые в указанном порядке, составляют правую тройку векторов.

Векторное произведение зависит от порядка сомножителей:

$$\vec{a} \times \vec{b} = -(\vec{b} \times \vec{a}) .$$

Если $\vec{a} \neq 0$, $\vec{b} \neq 0$, то векторное произведение $\vec{a} \times \vec{b}$ равно нулевому вектору тогда и только тогда, когда векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ коллинеарны.

Вычисление векторного произведения

Если векторы $\vec{a} = a_1 \vec{i} + a_2 \vec{j} + a_3 \vec{k}$, $\vec{b} = b_1 \vec{i} + b_2 \vec{j} + b_3 \vec{k}$ даны в прямоугольной системе координат, то векторное произведение вектора $\vec{a}$ на вектор $\vec{b}$ определяется формулой

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix} \vec{i} + \begin{vmatrix} a_3 & a_1 \\ b_3 & b_1 \end{vmatrix} \vec{j} + \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} \vec{k} ,$$

т. е. вектор $\vec{a} \times \vec{b}$ имеет координаты:

$$\vec{a} \times \vec{b} = (\begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix}; \begin{vmatrix} a_3 & a_1 \\ b_3 & b_1 \end{vmatrix}; \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix}) .$$

Вычисление площади треугольника

Если три точки $A(x_1; y_1; z_1)$, $B(x_2; y_2; z_2)$, $C(x_3; y_3; z_3)$ даны относительно прямоугольной системы координат, то площадь треугольника ABC можно найти с помощью векторного произведения векторов $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{AC}$:

$$S_{ABC} = \frac{1}{2}\left|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}\right|.$$

Смешанное произведение векторов

Смешанным произведением трех векторов $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ называется число, равное векторному произведению $\vec{a}\times\vec{b}$, умноженному скалярно на вектор $\vec{c}$, т. е. $(\vec{a}\times\vec{b})\cdot\vec{c}$.

Модуль смешанного произведения трех векторов равен объему параллелепипеда, построенного на векторах $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$.

Смешанное произведение не меняется при круговой перестановке сомножителей: $(\vec{a}\times\vec{b})\cdot\vec{c}=(\vec{b}\times\vec{c})\cdot\vec{a}=(\vec{c}\times\vec{a})\cdot\vec{b}.$

Смешанное произведение меняет знак на противоположный при всякой перестановке, изменяющей последовательность сомножителей:

$$(\vec{a}\times\vec{b})\cdot\vec{c}=-(\vec{b}\times\vec{a})\cdot\vec{c};\ (\vec{a}\times\vec{b})\cdot\vec{c}=-(\vec{a}\times\vec{c})\cdot\vec{b}.$$

Смешанное произведение равно нулю тогда и только тогда, когда векторы $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ компланарны.

Вычисление смешанного произведения векторов

Если векторы $\vec{a}\,(a_1;\ a_2;\ a_3)$, $\vec{b}\,(b_1; b_2; b_3)$, $\vec{c}\,(c_1; c_2; c_3)$ заданы относительно прямоугольной системы координат, то смешанное произведение векторов вычисляется так:

$$\vec{a}\vec{b}\vec{c}=\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}.$$

Условие компланарности трех векторов

Три вектора $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ компланарны тогда и только тогда, когда их смешанное произведение равно нулю, т. е. $(\vec{a}\times\vec{b})\cdot\vec{c}=0$. В координатах векторов условие компланарности записывается так:

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}=0\cdot$$

Вычисление объема тетраэдра

Объем тетраэдра равен $\frac{1}{6}$ объема параллелепипеда, т. е. для вычисления объема тетраэдра можно использовать смешанное произведение векторов.

Так, если даны координаты четырех вершин тетраэдра относительно прямоугольной системы координат $A(x_1;\ y_1;\ z_1)$, $B(x_2;\ y_2;\ z_2)$, $C(x_3,\ y_3,\ z_3)$, $D(x_4,\ y_4,\ z_4)$, то объем тетраэдра равен $\frac{1}{6}$ модуля смешанного произведения векторов:

$$V_{тетр} = \frac{1}{6}\left|(\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC})\overrightarrow{AD}\right|.$$

Примеры решения задач

Задача 1. Вычислить площадь параллелограмма, построенного на векторах $\vec{a} = 3\vec{p} - 4\vec{q}$, $\vec{b} = \vec{p} + 3\vec{q}$, $\left|\vec{p}\right| = 2$, $\left|\vec{q}\right| = 3$, если $\alpha = (\widehat{\vec{p}, \vec{q}}) = \frac{\pi}{4}$.

Решение. Известно, что $S = \left|\vec{a} \times \vec{b}\right|$. Тогда

$$\vec{a} \times \vec{b} = (3\vec{p} - 4\vec{q}) \times (\vec{p} + 3\vec{q}) = 3(\vec{p} \times \vec{p}) + 9(\vec{p} \times \vec{q}) - 4(\vec{q} \times \vec{p}) - 12(\vec{q} \times \vec{q}) =$$
$$= 9(\vec{p} \times \vec{q}) + 4(\vec{p} \times \vec{q}) = 13(\vec{p} \times \vec{q}).$$

$$S = 13\left|\vec{p} \times \vec{q}\right| = 13\left|\vec{p}\right| \cdot \left|\vec{q}\right| \sin\alpha = 13 \cdot 2 \cdot 3 \sin\frac{\pi}{4} = 39 \cdot 2 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = 39\sqrt{2} \text{ кв. ед.}$$

Ответ: $39\sqrt{2}$ кв. ед.

Задача 2. Вычислить объем тетраэдра с вершинами в точках $A_1(0; -3; 1)$, $A_2(-4; 1; 2)$, $A_3(2; -1; 5)$, $A_4(3; 1; -4)$ и его высоту, опущенную из вершины A_4 на грань $A_1A_2A_3$.

Решение. Известно, что $V_m = \frac{1}{6}\left|(\overrightarrow{A_1A_2}\ \overrightarrow{A_1A_3}\ \overrightarrow{A_1A_4})\right|$. Находим координаты векторов, получаем $\overrightarrow{A_1A_2}(-4; 4; 1)$, $\overrightarrow{A_1A_3}(2; 2; 4)$, $\overrightarrow{A_1A_4}(3; 4; -5)$.

$$(\overrightarrow{A_1A_2}\ \overrightarrow{A_1A_3}\ \overrightarrow{A_1A_4}) = \begin{vmatrix} -4 & 2 & 3 \\ 4 & 2 & 4 \\ 1 & 4 & -5 \end{vmatrix} = 194.$$

$$\mathrm{V} = \frac{1}{6}\cdot 194 = \frac{97}{3} \text{ куб. ед.}$$

Находим площадь грани $A_1A_2A_3$:

$$S = \frac{1}{2}\sqrt{\begin{vmatrix} 4 & 2 \\ 1 & 4 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} 1 & 4 \\ -4 & 2 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} -4 & 2 \\ 4 & 2 \end{vmatrix}^2} = \frac{1}{2}\sqrt{196+324+256} = \frac{1}{2}\sqrt{194\cdot 4} = \sqrt{194} \text{ кв. ед.}$$

Тогда $V = \frac{1}{3}S_{осн}\cdot H$, отсюда $H = \frac{3V}{S_{осн}} = \frac{3\cdot\frac{97}{3}}{\sqrt{194}} = \frac{97}{\sqrt{194}} = \sqrt{\frac{97}{2}}$.

Ответ: $V = \frac{97}{3}$ куб. ед., $H = \sqrt{\frac{97}{2}}$.

4. АНАЛИТИЧЕСКАЯ ГЕОМЕТРИЯ НА ПЛОСКОСТИ

4.1. Метод координат на плоскости

Деление отрезка в данном отношении

Пусть заданы две точки своими координатами: $M_1(x_1; y_1)$ – начало отрезка, $M_2(x_2; y_2)$ – конец отрезка, и некоторое число $\lambda \neq -1$. Разделить отрезок M_1M_2 в отношении λ – это значит найти координаты (x, y) такой точки C, что $\overline{M_1C} = \lambda\overline{CM_2}$.

Формулы для вычисления координат точки деления C следующие:

$$x = \frac{x_1 + \lambda x_2}{1+\lambda}, \quad y = \frac{y_1 + \lambda y_2}{1+\lambda}.$$

(При пользовании этими формулами нельзя путать координаты начала и конца отрезка).

Если требуется разделить отрезок пополам, то $\lambda = 1$ и координаты (x, y) точки C – середины отрезка M_1M_2 равны

$$x = \frac{x_1 + x_2}{2}, \quad y = \frac{y_1 + y_2}{2}.$$

Расстояние между двумя точками

Расстояние между двумя точками $A(x_1; y_1)$, $B(x_2; y_2)$, заданными относительно прямоугольной системы координат, вычисляется как длина вектора $\left|\overrightarrow{AB}\right|$, т. е.

$$d = \left|\overrightarrow{AB}\right| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}.$$

4.2. Уравнение линии на плоскости

Под линией на плоскости понимается некоторое множество точек, обладающих определенным, только им присущим геометрическим свойством, и координаты которых относительно некоторой системы координат удовлетворяют уравнению $F(x, y) = 0$.

Чтобы составить уравнение линии, необходимо:

1) взять произвольную точку данного множества с текущими координатами (x, y);

2) записать общее свойство точек данного множества в виде равенства;

3) выразить входящие в это равенство величины с помощью координат.

Координаты точек пересечения двух линий, уравнения которых $F_1(x;y) = 0$ и $F_2(x;y) = 0$, находятся из системы уравнений

$$\begin{cases} F_1(x;y) = 0, \\ F_2(x;y) = 0. \end{cases}$$

Если система имеет действительные решения, то линии пересекаются, причем число точек пересечения равно числу решений системы. Если действительных решений нет, то линии общих точек не имеют.

4.3. Прямая на плоскости

Всякая прямая относительно прямоугольной системы координат на плоскости определяется уравнением первой степени, и наоборот, всякое уравнение первой степени относительно координат x, y описывает некоторую прямую на плоскости.

Любой ненулевой вектор, параллельный данной прямой, называется ее *направляющим вектором*.

Различные способы задания прямой

Уравнение прямой, заданной точкой и направляющим вектором

Пусть дана некоторая прямая, которая проходит через точку M_0 с известными координатами $x_{0,}$, y_0 параллельно направляющему вектору $\vec{a}$, координаты которого также известны и равны (a_1, a_2).

Уравнение этой прямой можно записать в виде

$$\frac{x - x_0}{a_1} = \frac{y - y_0}{a_2}.$$

Это равенство называется каноническим уравнением прямой.

Параметрические уравнения прямой

Существует еще один вид уравнения прямой, проходящей через данную точку $M_0(x_0, y_0)$ и имеющей данный направляющий вектор $\vec{a}\ (a_{1,}a_2)$:

$$\begin{cases} x = x_0 + a_1 t, \\ y = y_0 + a_2 t, \end{cases}$$

где t – параметр, принимающий все действительные значения.

Этот вид называется параметрическими уравнениями прямой.

Уравнение прямой, проходящей через две заданные точки

Пусть некоторая прямая проходит через две точки с известными координатами: $M_1(x_1; y_1)$, $M_2(x_2; y_2)$.. Уравнение этой прямой имеет вид:

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1}.$$

Уравнение прямой «в отрезках по осям»

Пусть прямая отсекает на оси Ox отрезок величины a, на оси Oy – отрезок b. В этом случае уравнение прямой будет иметь вид

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1.$$

Уравнение прямой с угловым коэффициентом

Угловым коэффициентом k некоторой прямой называется число, равное отношению координат направляющего вектора $\vec{a}\ (a_1, a_2)$ этой прямой, т. е. $k = \dfrac{a_2}{a_1}$. Если прямая задана относительно прямоугольной системы координат, то угловой коэффициент k есть тангенс угла α наклона данной прямой к положительному направлению оси Ox: $k = tg\alpha, \quad (0 \le \alpha \prec \pi)$.

Уравнение прямой, заданной точкой $M_0(x_0, y_0)$ и угловым коэффициентом k имеет вид $y - y_0 = k(x - x_0)$. Если в качестве точки $M_0(x_0, y_0)$ взять точку $B(0; b)$ пересечения прямой с осью ординат, то получим уравнение: $y = kx + b$.

Уравнение прямой, проходящей через данную точку перпендикулярно данному вектору

Если прямая проходит через данную точку $M_0(x_0, y_0)$ перпендикулярно данному вектору $\vec{n}(A;B)$ (вектор $\vec{n}$ называется нормальным вектором данной прямой), то ее уравнение имеет вид:

$$A(x-x_0)+B(y-y_0)=0.$$

Общее уравнение прямой

Каким бы способом ни была задана прямая, ее уравнение всегда можно привести к уравнению вида $Ax+By+C=0$, которое называется *общим уравнением прямой*.

Геометрический смысл коэффициентов общего уравнения прямой

Коэффициенты $(-B;A)$ общего уравнения прямой $Ax+By+C=0$ являются координатами направляющего вектора $\vec{a}$ данной прямой, т. е. $\vec{a}(-B;A)$. Коэффициенты $(A;B)$ есть координаты нормального вектора данной прямой, т. е. $\vec{n}(A;B)$. Угловой коэффициент прямой равен $k=-\dfrac{A}{B}$, а отношение $-\dfrac{C}{B}=b$ – величина отрезка, отсекаемого прямой на оси Oy.

Расстояние от точки до прямой

Расстояние от точки $M_0(x_0, y_0)$ до прямой $Ax+By+C=0$ вычисляется по формуле

$$\rho(M_0, d)=\frac{|Ax_0+By_0+C|}{\sqrt{A^2+B^2}}.$$

Угол между двумя прямыми. Условия параллельности и перпендикулярности прямых

Тангенс угла между прямыми, уравнения которых относительно прямоугольной системы координат заданы в виде $y=k_1x+b_1$ и $y=k_2x+b_2$, вычисляется по формуле

$$tg\ \varphi=\frac{k_2-k_1}{1+k_1\cdot k_2},$$

причем угол принято отсчитывать против часовой стрелки от первой прямой ко второй.

Необходимое и достаточное условие параллельности заданных прямых выражается равенством $k_1 = k_2$, а условие перпендикулярности $k_1 = -\dfrac{1}{k_2}$.

Примеры решения задач

Пример 1. Задан ΔABC координатами своих вершин:

$$A\,(-1, 2),\ B\,(3, 3),\ C\,(1, -1).$$

Найти: а) периметр треугольника;

б) точку пересечения медиан;

в) уравнение стороны AB;

г) уравнение высоты, опущенной из C;

д) длину этой высоты.

Решение.

а) находим длины сторон треугольника по формуле:

$$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}\,.$$

$$AB = \sqrt{(3+1)^2 + (3-2)^2} = \sqrt{16+1} = \sqrt{17}\,;$$

$$BC = \sqrt{(1-3)^2 + (-1-3)^2} = \sqrt{4+16} = \sqrt{20}\,;$$

$$AC = \sqrt{(1+1)^2 + (1-2)^2} = \sqrt{4+9} = \sqrt{13}\,;$$

$$p = \sqrt{17} + \sqrt{20} + \sqrt{13}\,;$$

б) точку пересечения медиан треугольника находим по формулам:

$$x = \frac{x_1 + x_2 + x_3}{3},\quad y = \frac{y_1 + y_2 + y_3}{3}\,.$$

Тогда $x = \dfrac{-1+3+1}{3} = 1,\quad y = \dfrac{2+3-1}{3} = \dfrac{4}{3}$, т. е. $M\,(1;\ \dfrac{4}{3})$;

в) составляем уравнение прямой AB по двум точкам:

$\dfrac{x+1}{3+1} = \dfrac{y-2}{3-2}$, $x + 1 = 4(y-2)$, $\qquad x - 4y + 9 = 0$;

г) находим угловой коэффициент прямой *AB*, $k_{AB} = \frac{1}{4}$, тогда $k_{CD} = -4$, где *CD* – высота, опущенная из вершины *C*. Составим уравнение *CD* по точке *C* и угловому коэффициенту: $y + 1 = -4(x - 1)$; $4x + y - 3 = 0$;

д) Длину высоты *CD* найдем как расстояние от точки *C* до прямой *AB*.

$$CD = \rho(C, AB) = \frac{|1 - 4(-1) + 9|}{\sqrt{1+16}} = \frac{14}{\sqrt{17}} = \frac{14\sqrt{17}}{17}.$$

Ответ: а) $p = \sqrt{17} + \sqrt{20} + \sqrt{13}$, б) $M(1;\ \frac{4}{3})$,

в) $x - 4y + 9 = 0$, г) $4x + y - 3 = 0$, д) $\frac{14\sqrt{17}}{17}$.

4.4. Линии второго порядка, заданные каноническими уравнениями

Алгебраической линией n-го порядка называется множество точек, определяемое алгебраическим уравнением n-ой степени относительно декартовой системы координат. В случае $n = 2$ линия называется *линией второго порядка*.

Эллипс

Каноническое уравнение эллипса имеет вид

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1,$$

где a, b – длины полуосей.

Точки пересечения эллипса с его осями симметрии, которые в данном случае совпадают с осями координат, называются *вершинами*. Точки $F_1(-c;0)$, $F_2(c;0)$ – фокусы эллипса, причем $c^2 = a^2 - b^2$.

Эксцентриситет ε эллипса есть число, равное $\varepsilon = \frac{c}{a} < 1$.

Директрисы эллипса – прямые l_1 и l_2, определяются уравнениями

$$x = -\frac{a}{\varepsilon}, \quad x = \frac{a}{\varepsilon}.$$

Директориальное свойство: для любой точки эллипса справедливы равенства: $\frac{r_1}{d_1}=\varepsilon$, $\frac{r_2}{d_2}=\varepsilon$,

где d_1, d_2 – расстояния от точки до соответствующей данному фокусу директрисы.

Гипербола

Каноническое уравнение гиперболы: $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$.

При $a=b$ гипербола называется равносторонней.

Точки пересечения гиперболы с действительной осью, в данном случае совпадающей с осью Ox, называются вершинами гиперболы.

Фокусы гиперболы $F_1(-c;\ 0)$, $F_2(c;0)$, где $c^2=a^2+b^2$.

Эксцентриситет гиперболы число ε, определяемое формулой $\varepsilon=\frac{c}{a}>1$.

Директрисы гиперболы – прямые l_1 и l_2, определяются уравнениями

$$x=-\frac{a}{\varepsilon},\quad x=\frac{a}{\varepsilon},$$

директриса l_1 соответствует фокусу F_1, l_2 – фокусу F_2.

Директориальное свойство: $\frac{r_1}{d_1}=\varepsilon$, $\frac{r_2}{d_2}=\varepsilon$, где r_1 – расстояние от левого фокуса до точки любой ветви гиперболы, r_2 – расстояние от правого фокуса до точки любой ветви гиперболы, d_1 и d_2 – расстояния этих точек от директрис l_1 и l_2.

Асимптоты гиперболы определяются уравнениями

$$y=\frac{b}{a}x,\quad y=-\frac{b}{a}x.$$

Уравнение $-\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ определяет гиперболу, симметричную относительно координатных осей; ветви ее пересекают ось Oy, фокусы лежат на оси Oy.

Парабола

Каноническое уравнение параболы, симметричной относительно оси Ox:

$$y^2 = 2px,$$

где p – фокальный параметр (расстояние от фокуса параболы до директрисы l).

Директриса l определяется уравнением $x = -\frac{p}{2}$.

Вершина параболы совпадает с началом координат. Фокус находится в точке $F(\frac{p}{2};0)$.

Парабола, симметричная относительно Oy и проходящая через начало координат, определяется уравнением $x^2 = 2qy$. Ее фокус находится в точке $F(0; \frac{q}{2})$, уравнение директрисы имеет вид: $y = -\frac{q}{2}$, а фокальный радиус точки $M(x;y)$ равен $r = y + \frac{q}{2}$.

Примеры решения задач

Задача 1. Составить каноническое уравнение эллипса, если расстояние между фокусами равно 14, эксцентриситет $\varepsilon = \frac{7}{9}$.

Решение. Из условия задачи следует, что $2c = 14$, тогда $c = 7$. Так как $\varepsilon = \frac{c}{a} = \frac{7}{9}$ и $c = 7$, то $a = 9$. Из равенства $b^2 = a^2 - c^2$ получаем $b^2 = 81 - 49 = 32$. Каноническое уравнение данного эллипса имеет вид $\frac{x^2}{81} + \frac{y^2}{32} = 1$.

Ответ: $\frac{x^2}{81} + \frac{y^2}{32} = 1$.

Задача 2. Составить каноническое уравнение гиперболы, если действительная ось равна 6, эксцентриситет $\varepsilon = \frac{5}{3}$.

Решение. Из условия задачи следует, что 2 a = 6, тогда a = 3. Так как $\varepsilon=\dfrac{c}{a}=\dfrac{5}{3}$ и a =3, то c = 5. Так как $b^2=c^2-a^2$, то $b^2=25-9=16$. Каноническое уравнение гиперболы примет вид $\dfrac{x^2}{9}-\dfrac{y^2}{16}=1$.

Ответ: $\dfrac{x^2}{9}-\dfrac{y^2}{16}=1$.

Задача 3. Написать каноническое уравнение эллипса, проходящего через точки $M(3;2)$, $N(3\sqrt{\frac{3}{2}};\sqrt{2})$.

Решение. Чтобы составить каноническое уравнение эллипса $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$, необходимо найти его полуоси, т. е. величины a и b. Так как эллипс проходит через точки M и N, их координаты должны удовлетворять уравнению эллипса. Подставляем в каноническое уравнение эллипса сначала координаты точки M, затем – точки N. Получаем систему двух уравнений с двумя неизвестными a и b:

$$\begin{cases}\dfrac{(3)^2}{a^2}+\dfrac{(2)^2}{b^2}=1,\\ \dfrac{\left(3\sqrt{\frac{3}{2}}\right)^2}{a^2}+\dfrac{(\sqrt{2})^2}{b^2}=1,\end{cases}\quad \begin{cases}\dfrac{9}{a^2}+\dfrac{4}{b^2}=1,\\ \dfrac{27}{2a^2}+\dfrac{2}{b^2}=1,\end{cases}\quad \begin{cases}9b^2+4a^2=a^2b^2,\\ 27b^2+4a^2=2a^2b^2,\end{cases}$$

$$\begin{cases}9b^2+4a^2=a^2b^2,\\ 18b^2=a^2b^2,\end{cases}\quad \begin{cases}9b^2+4a^2=a^2b^2,\\ a^2=18,\end{cases}\quad \begin{cases}b^2=8,\\ a^2=18.\end{cases}$$

Следовательно, каноническое уравнение эллипса будет иметь вид

$$\frac{x^2}{18}+\frac{y^2}{8}=1.$$

Ответ: $\dfrac{x^2}{18}+\dfrac{y^2}{8}=1$.

5. АНАЛИТИЧЕСКАЯ ГЕОМЕТРИЯ В ПРОСТРАНСТВЕ

5.1. Метод координат в пространстве

Деление отрезка в данном отношении

Координаты x, y, z точки M, делящей отрезок M_1M_2 в отношении $\lambda \neq -1$, вычисляются по формулам

$$x = \frac{x_1 + \lambda x_2}{1+\lambda}, \quad y = \frac{y_1 + \lambda y_2}{1+\lambda}, \quad z = \frac{z_1 + \lambda z_2}{1+\lambda}.$$

Если точка M – середина отрезка M_1M_2, то $\lambda = 1$ и формулы принимают вид

$$x = \frac{x_1 + x_2}{2}, \quad y = \frac{y_1 + y_2}{2}, \quad z = \frac{z_1 + z_2}{2}.$$

В этих формулах x_1; y_1; z_1 – координаты точки M_1 – начала отрезка, x_2; y_2; z_2 – координаты точки M_2 – конца отрезка.

Расстояние между двумя точками

Расстояние ρ между двумя точками $A(x_1;\, y_1;\, z_1)$ и $B(x_2;\, y_2;\, z_2)$, заданными относительно прямоугольной системы координат в пространстве, определяется формулой:

$$\rho(A,B) = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}.$$

5.2. Плоскость

Всякая плоскость относительно некоторой прямоугольной системы координат в пространстве определяется уравнением первой степени и обратно: каждое уравнение первой степени определяет плоскость.

Различные способы задания плоскости

Уравнение плоскости, проходящей через заданную точку параллельно двум неколлинеарным векторам

Пусть относительно некоторой прямоугольной системы координат в пространстве дана точка $M_0(x_0;\, y_0;\, z_0)$ некоторой плоскости и два неколлинеарных вектора $\vec{l}\,(l_1; l_2; l_3)$, $\vec{m}(m_1; m_2; m_3)$, параллельные этой плоскости.

Тогда уравнение плоскости можно записать так:

$$\begin{vmatrix} x-x_0 & y-y_0 & z-z_0 \\ l_1 & l_2 & l_3 \\ m_1 & m_2 & m_3 \end{vmatrix} = 0$$

Уравнение плоскости, проходящей через три заданные точки

Если относительно некоторой прямоугольной системы координат в пространстве даны точки $M_1(x_1;\, y_1;\, z_1)$, $M_2(x_2;\, y_2;\, z_2)$, $M_3(x_3;\, y_3;\, z_3)$, принадлежащие некоторой плоскости, то уравнение этой плоскости имеет вид

$$\begin{vmatrix} x-x_1 & y-y_1 & z-z_1 \\ x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ x_3-x_1 & y_3-y_1 & z_3-z_1 \end{vmatrix} = 0.$$

Уравнение плоскости в «отрезках»

Если некоторая плоскость отсекает на осях координат отрезки: a – на оси Ox, b – на оси Oy, c – на оси Oz, то уравнение этой плоскости имеет вид

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1.$$

Уравнение плоскости, проходящей через заданную точку перпендикулярно данному вектору

Пусть относительно некоторой прямоугольной системы координат плоскость проходит через точку $M_0(x_0;\, y_0;\, z_0)$ перпендикулярно вектору $\vec{n}\,(A; B; C)$. Уравнение этой плоскости будет иметь вид:

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0.$$

Общее уравнение плоскости. Условие параллельности вектора некоторой плоскости

Какими бы способами ни была задана плоскость, ее уравнение можно привести к виду

$$Ax + By + Cz + D = 0\,.$$

Это уравнение называется *общим уравнением плоскости*.

Если плоскость задана относительно прямоугольной системы координат, то коэффициенты A, B, C этого уравнения служат координатами вектора нормали к данной плоскости: $\vec{n}\,(A; B; C)$.

Вектор $\vec{p}(p_1; p_2; p_3)$ параллелен плоскости, определяемой уравнением $Ax + By + Cz + D = 0$, тогда и только тогда, когда выполняется условие

$$Ap_1 + Bp_2 + Cp_3 = 0.$$

Расстояние от точки до плоскости

Расстояние от точки $M_0(x_0; y_0; z_0)$ до плоскости, определяемой в прямоугольной системе координат общим уравнением $Ax + By + Cz + D = 0$, находится с помощью формулы

$$\rho(M_0, \delta) = \frac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}\,.$$

5.3. Прямая в пространстве

Вектор, параллельный прямой, называется *направляющим вектором прямой*.

Различные способы задания прямой

Уравнение прямой, проходящей через данную точку параллельно данному вектору

Прямая, проходящая через точку $M_0(x_0; y_0; z_0)$ параллельно направляющему вектору $\vec{a}(a_1; a_2; a_3)$, определяется или параметрическими уравнениями

$$x = x_0 + a_1 t,$$
$$y = y_0 + a_2 t,$$
$$z = z_0 + a_3 t,$$

где t – параметр, принимающий произвольные значения, или каноническими уравнениями вида

$$\frac{x - x_0}{a_1} = \frac{y - y_0}{a_2} = \frac{z - z_0}{a_3}.$$

(В этом уравнении отношения рассматриваются как пропорция, а не как дроби.)

Прямая как линия пересечения двух плоскостей

Прямая как линия пересечения двух плоскостей определяется системой уравнений этих плоскостей:

$$\begin{cases} A_1 x + B_1 y + C_1 z + D_1 = 0, \\ A_2 x + B_2 y + C_2 z + D_2 = 0. \end{cases}$$

Координаты a_1, a_2, a_3 направляющего вектора $\vec{a}$ этой прямой равны:

$$a_1 = \begin{vmatrix} B_1 & C_1 \\ B_2 & C_2 \end{vmatrix}, \quad a_2 = \begin{vmatrix} C_1 & A_1 \\ C_2 & A_2 \end{vmatrix}, \quad a_3 = \begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix},$$

т. е. $\vec{a}(a_1; a_2; a_3)$.

Уравнения прямой, проходящей через две точки

Канонические уравнения прямой, проходящей через две данные точки $M_1(x_1; y_1; z_1)$, $M_2(x_2; y_2; z_2)$, имеют вид

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{z - z_1}{z_2 - z_1}.$$

5.4. Прямая и плоскость

Взаимное расположение прямой и плоскости

Необходимым и достаточным условием того, что плоскость $Ax + By + Cz + D = 0$ и прямая $x = x_0 + a_1 t$,

$$y = y_0 + a_2 t,$$

$$z = z_0 + a_3 t$$

пересекаются, является условие: $Aa_1 + Ba_2 + Ca_3 \neq 0$.

Чтобы найти точку пересечения прямой и плоскости, необходимо решить систему из уравнения плоскости и параметрических уравнений прямой

$$\begin{cases} Ax + By + Cz + D = 0, \\ x = x_0 + a_1 t, \\ y = y_0 + a_2 t, \\ z = z_0 + a_3 t. \end{cases}$$

Если прямая и плоскость параллельны, то выполняются условия

$$\begin{cases} Aa_1 + Ba_2 + Ca_3 = 0, \\ Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D \neq 0. \end{cases}$$

Условиями принадлежности прямой некоторой плоскости являются

$$\begin{cases} Aa_1 + Ba_2 + Ca_3 = 0, \\ Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D = 0. \end{cases}$$

Угол между прямой и плоскостью. Условие перпендикулярности прямой и плоскости

Пусть относительно прямоугольной системы координат в пространстве даны плоскость $Ax + By + Cz + D = 0$ и прямая $x = x_0 + a_1 t$, $y = y_0 + a_2 t$, $z = z_0 + a_3 t$.

Угол между ними определяется из соотношения:

$$\sin\varphi = \frac{|Aa_1 + Ba_2 + Ca_3|}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2} \cdot \sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}.$$

Необходимым и достаточным условием параллельности прямой и плоскости является условие перпендикулярности векторов $\vec{a}(a_1; a_2; a_3)$ и $\vec{n}(A; B; C)$:

$$\frac{A}{a_1} = \frac{B}{a_2} = \frac{C}{a_3}.$$

Примеры решения задач

Пример 1. Найти координаты точки, симметричной точке M (3; 3; 3) относительно прямой $\frac{x-1}{-1}=\frac{y-1{,}5}{0}=\frac{z-3}{1}$.

Решение. Обозначим точку, симметричную точке M, через M'.

Эти две точки расположены на одинаковых расстояниях от заданной прямой.

Пусть точка A - середина отрезка MM', лежащая на данной прямой $\frac{x-1}{-1}=\frac{y-1{,}5}{0}=\frac{z-3}{1}$.

Составим уравнение плоскости, проходящей через точку M, и перпендикулярной данной прямой, а затем найдем координаты точки A как точки пересечения прямой и плоскости, и далее с помощью формул координат середины отрезка можно вычислить координаты M'.

Координаты нормального вектора плоскости: $\vec{n}(-1;\,0;1)$.

Составляем уравнение плоскости:

$-1(x-3)+0(y-3)+1(z-3)=0$

$-x+3+z-3=0$

$-x+z=0$.

Вычисляем координаты точки A, для чего составляем систему уравнений, состоящую из параметрических уравнений данной прямой и общего уравнения плоскости:

$$\begin{cases}-x+z=0\\ x=1-t\\ y=1{,}5\\ z=3+t\end{cases}\quad \begin{cases}-1+t+3+t=0\\ x=1-t\\ y=1{,}5\\ z=3+t\end{cases}\quad \begin{cases}2t+2=0\\ x=1-t\\ y=1{,}5\\ z=3+t\end{cases}\quad \begin{cases}t=-1\\ x=1-t\\ y=1{,}5\\ z=3+t\end{cases}\quad \begin{cases}t=-1\\ x=2\\ y=1{,}5\\ z=2\end{cases}$$

Итак, A (2; 1,5; 2).

Так как точка A – середина отрезка MM', используем формулы

$$x=\frac{x_1+x_2}{2},\quad y=\frac{y_1+y_2}{2},\quad z=\frac{z_1+z_2}{2}$$

и получаем $x_2=1$, $y_2=0$, $z_2=1$.

Ответ: M' (1; 0; 1).

6. ВЫЧИСЛЕНИЕ ПРЕДЕЛА ФУНКЦИИ

При решении различных задач часто используется понятие предела функции. С определениями и свойствами пределов рекомендуем ознакомиться самостоятельно по предлагаемой учебной литературе. Приведем основные свойства пределов функций:

$$\lim_{x\to a}(f(x)\pm g(x))=\lim_{x\to a}f(x)\pm\lim_{x\to a}g(x)$$

$$\lim_{x\to a}(f(x)\cdot g(x))=\lim_{x\to a}f(x)\cdot\lim_{x\to a}g(x)$$

$$\lim_{x\to a}\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)=\frac{\lim\limits_{x\to a}f(x)}{\lim\limits_{x\to a}g(x)},\quad (\lim_{x\to a}g(x)\neq 0)$$

При вычислении пределов функций используются следующие простейшие пределы:

1) $\lim\limits_{x\to\infty}A\cdot x=\infty$; 2) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{A}{x}=\infty$; $A=const$, $A\neq 0$

3) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x}{A}=\infty$; 4) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{A}{x}=0$.

В некоторых примерах для раскрытия неопределенности вида $\left[\frac{0}{0}\right]$ можно попытаться числитель и знаменатель разложить на множители и дробь сократить или применить первый замечательный предел:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{x}{\sin x}=1.$$

Для раскрытия неопределенности вида $\left[\frac{\infty}{\infty}\right]$ числитель и знаменатель (если они являются многочленами относительно независимой переменной x) делят на x с наибольшим показателем.

В случае неопределенности вида $\left[1^{\infty}\right]$ используют второй замечательный предел

$$\lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=e,\quad (e\approx 2{,}7...).$$

Примеры решения задач

Пример 1.

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^3-1}{2x^2-x-1}=\left[\frac{0}{0}\right]=\lim_{x\to 1}\frac{(x-1)\left(x^2+x+1\right)}{2(x-1)\left(x+\frac{1}{2}\right)}=\lim_{x\to 1}\frac{x^2+x+1}{2x+1}=\frac{3}{3}=1.$$

Пример 2.

$$\lim_{x\to 5}\frac{x^2-25}{\sqrt{x-1}-2}=\left[\frac{0}{0}\right]=\lim_{x\to 5}\frac{(x-5)(x+5)(\sqrt{x-1}+2)}{(\sqrt{x-1}-2)(\sqrt{x-1}+2)}=$$

$$=\lim_{x\to 5}\frac{(x-5)(x+5)(\sqrt{x-1}+2)}{x-1-4}=\lim_{x\to 5}\frac{(x-5)(x+5)(\sqrt{x-1}+2)}{x-5}=$$

$$=\lim_{x\to 5}(x+5)(\sqrt{x-1}+2)=10\cdot 4=40$$

Пример 3.

В данном случае $x\to\infty$. Разделим числитель и знаменатель на высшую степень x (в данном случае на x^2), а затем воспользуемся теоремами о пределах функций.

$$\lim_{x\to\infty}\frac{3x^2-2x-8}{2x^2-5x+2}=\left[\frac{\infty}{\infty}\right]=\lim_{x\to\infty}\frac{3-\frac{2}{x}-\frac{8}{x^2}}{2-\frac{5}{x}+\frac{2}{x^2}}=\frac{3}{2}.$$

Пример 4.

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos 6x}{x\cdot\left(\sqrt{4+x}-2\right)}=\lim_{x\to 0}\frac{2\sin^2 3x(\sqrt{4+x}+2)}{x(\sqrt{4+x}-2)(\sqrt{4+x}+2)}=\lim_{x\to 0}\frac{2\sin^2 3x(\sqrt{4+x}+2)}{x^2}=$$

$$=2\lim_{x\to 0}(\sqrt{4+x}+2)\cdot\lim_{x\to 0}\frac{\sin^2 3x}{x^2}=8\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin 3x}{3x}\right)^2\cdot 9=72\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin 3x}{3x}\right)^2=$$

$$=72\cdot 1^2=72$$

Пример 5.

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{2x-1}{2x+1}\right)^x = \left[1^\infty\right] = \lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{2x-1}{2x+1}-1\right)^x = \lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{-2}{2x+1}\right)^x =$$

$$= \lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{\frac{2x+1}{-2}}\right)^x = \lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{\frac{2x+1}{-2}}\right)^{\frac{2x+1}{-2}\cdot\frac{-2}{2x+1}\cdot x} = \lim_{x\to\infty} e^{\frac{-2x}{2x+1}} = e^{\lim\limits_{x\to\infty}\frac{-2x}{2x+1}} = e^{-1}$$

Контрольная работа № 1

Задача 1

Даны две матрицы А и В. Найти: 1) А·В; 2) В·А; 3) A^{-1}.

0. $A=\begin{pmatrix}8 & -1 & -1\\ 5 & -5 & -1\\ 10 & 3 & 2\end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix}3 & 2 & 5\\ 3 & 2 & 1\\ 1 & 0 & 2\end{pmatrix};$

1. $A=\begin{pmatrix}2 & -1 & -4\\ 4 & -9 & 3\\ 2 & -7 & -1\end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix}0 & 0 & -4\\ 5 & -6 & 4\\ 7 & -4 & 1\end{pmatrix};$

2. $A=\begin{pmatrix}3 & -7 & 2\\ 1 & -8 & 3\\ 4 & -2 & 3\end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix}0 & 5 & -3\\ 2 & 4 & 1\\ 2 & 1 & -5\end{pmatrix};$

3. $A=\begin{pmatrix}-2 & 3 & 4\\ 3 & -1 & -4\\ -1 & 2 & 2\end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix}3 & 3 & 1\\ 0 & 6 & 2\\ 1 & 9 & 2\end{pmatrix};$

4. $A=\begin{pmatrix}-6 & 1 & 11\\ 9 & 2 & 5\\ 0 & 3 & 7\end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix}3 & 0 & 1\\ 0 & 2 & 7\\ 1 & -3 & 2\end{pmatrix};$

5. $A=\begin{pmatrix}-1 & 0 & 2\\ 2 & 3 & 2\\ 3 & 7 & 1\end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix}3 & 0 & 1\\ -3 & 1 & 7\\ 1 & 3 & 2\end{pmatrix};$

6. $A=\begin{pmatrix}3 & 1 & 2\\ -1 & 0 & 2\\ 1 & 2 & 1\end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix}0 & -1 & 2\\ 2 & 1 & 1\\ 3 & 7 & 1\end{pmatrix};$

7. $A=\begin{pmatrix}2 & -1 & -3\\ 8 & -7 & -6\\ -3 & 4 & 2\end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix}2 & -1 & -2\\ 3 & -5 & 4\\ 1 & 2 & 1\end{pmatrix};$

8. $A=\begin{pmatrix}3 & 5 & -6\\ 2 & 4 & 3\\ -3 & 1 & 1\end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix}2 & 8 & -5\\ -3 & -1 & 0\\ 4 & 5 & -3\end{pmatrix};$

9. $A=\begin{pmatrix}8 & 5 & -1\\ 1 & 5 & 3\\ 1 & 1 & 0\end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix}4 & -7 & -6\\ 3 & 2 & -1\\ 0 & 1 & 2\end{pmatrix}.$

Задача 2

Проверить совместность системы и в случае совместности решить ее:

1) по формулам Крамера;
2) методом Гаусса.

0) $\begin{cases}4x_1+x_2+4x_3=19\\ 2x_1-x_2+2x_3=11\\ x_1+x_2+2x_3=8\end{cases};$

1) $\begin{cases}x_1+4x_2-x_3=6\\ 5x_2+4x_3=-20\\ 3x_1-2x_2+5x_3=-22\end{cases};$

2) $\begin{cases}3x_1-2x_2-5x_3=5\\ 2x_1+3x_2-4x_3=12\\ x_1-2x_2+3x_3=-1\end{cases};$

3) $\begin{cases}2x_1+3x_2+x_3=12\\ 2x_1+x_2+3x_3=16\\ 3x_1+2x_2+x_3=8\end{cases};$

4) $\begin{cases} 4x_1 - x_2 = -6 \\ 3x_1 + 2x_2 + 5x_3 = -14 \\ x_1 - 3x_2 + 4x_3 = -19 \end{cases}$;

5) $\begin{cases} 2x_1 - x_2 + 2x_3 = 3 \\ x_1 + x_2 + 2x_3 = -4 \\ 4x_1 + x_2 + 4x_3 = -3 \end{cases}$;

6) $\begin{cases} x_1 + 5x_2 - 6x_3 = -15 \\ 3x_1 + x_2 + 4x_3 = 13 \\ 2x_1 - 3x_2 + x_3 = 9 \end{cases}$;

7) $\begin{cases} 7x_1 + 4x_2 - x_3 = 13 \\ 3x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 3 \\ 2x_1 - 3x_2 + x_3 = -10 \end{cases}$;

8) $\begin{cases} x_1 + 4x_2 - x_3 = -9 \\ 4x_1 - x_2 + 5x_3 = -2 \\ 3x_2 - 7x_3 = -6 \end{cases}$;

9) $\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 + 4x_3 = 12 \\ 7x_1 - 5x_2 + x_3 = -33 \\ 4x_1 + x_3 = -7 \end{cases}$

Задача 3

Вычислить площадь параллелограмма, построенного на векторах $\vec{a}$ и $\vec{b}$, где $\alpha = (\widehat{\vec{p}, \vec{q}})$, если:

0. $\vec{a} = \vec{p} + 2\vec{q}, \vec{b} = 3\vec{p} - \vec{q}; \left|\vec{p}\right| = 1, \left|\vec{q}\right| = 2, \alpha = \dfrac{\pi}{6}$;

1. $\vec{a} = 3\vec{p} + \vec{q}, \vec{b} = \vec{p} - 2\vec{q}; \left|\vec{p}\right| = 4, \left|\vec{q}\right| = 1, \alpha = \dfrac{\pi}{4}$;

2. $\vec{a} = \vec{p} - 3\vec{q}, \vec{b} = \vec{p} + 2\vec{q}; \left|\vec{p}\right| = \dfrac{1}{5}, \left|\vec{q}\right| = 1, \alpha = \dfrac{\pi}{2}$;

3. $\vec{a} = 3\vec{p} - 2\vec{q}, \vec{b} = \vec{p} + 5\vec{q}; \left|\vec{p}\right| = 4, \left|\vec{q}\right| = \dfrac{1}{2}, \alpha = \dfrac{5\pi}{6}$;

4. $\vec{a} = \vec{p} - 2\vec{q}, \vec{b} = 2\vec{p} + \vec{q}; \left|\vec{p}\right| = 2, \left|\vec{q}\right| = 3, \alpha = \dfrac{3\pi}{4}$;

5. $\vec{a} = \vec{p} + 3\vec{q}, \vec{b} = \vec{p} - 2\vec{q}; \left|\vec{p}\right| = 2, \left|\vec{q}\right| = 3, \alpha = \dfrac{\pi}{3}$;

6. $\vec{a} = 2\vec{p} - \vec{q}, \vec{b} = \vec{p} + 3\vec{q}; \left|\vec{p}\right| = 3, \left|\vec{q}\right| = 2, \alpha = \dfrac{\pi}{2}$;

7. $\vec{a} = 4\vec{p} + \vec{q}, \vec{b} = \vec{p} - \vec{q}; \left|\vec{p}\right| = 7, \left|\vec{q}\right| = 2, \alpha = \dfrac{\pi}{4}$;

8. $\vec{a} = \vec{p} - 4\vec{q}$, $\vec{b} = 3\vec{p} + \vec{q}$; $\left|\vec{p}\right| = 1$, $\left|\vec{q}\right| = 2$, $\alpha = \dfrac{\pi}{6}$;

9. $\vec{a} = \vec{p} + 4\vec{q}$, $\vec{b} = 2\vec{p} - \vec{q}$; $\left|\vec{p}\right| = 7$, $\left|\vec{q}\right| = 2$, $\alpha = \dfrac{\pi}{3}$.

Задача 4

Вычислить объем тетраэдра с вершинами в точках A_1, A_2, A_3, A_4 и его высоту, опущенную из вершины A_4 на грань $A_1A_2A_3$, если:

0. $A_1(1,3,6)$, $A_2(2,2,1)$, $A_3(–1,0,1)$, $A_4(–4,6,–3)$;
1. $A_1(–4,2,6)$, $A_2(2,–3,0)$, $A_3(–10,5,8)$, $A_4(–5,2,–4)$;
2. $A_1(7,2,4)$, $A_2(7,–1,–2)$, $A_3(3,3,1)$, $A_4(–4,2,1)$;
3. $A_1(2,1,4)$, $A_2(–1,5,–2)$, $A_3(–7,–3,2)$, $A_4(–6,–3,6)$;
4. $A_1(–1,–5,2)$, $A_2(–6,0,–3)$, $A_3(3,6,–3)$, $A_4(–10,6,7)$;
5. $A_1(0,–1,–1)$, $A_2(–2,3,5)$, $A_3(1,–5,–9)$, $A_4(–1,–6,3)$;
6. $A_1(5,2,0)$, $A_2(2,5,0)$, $A_3(1,2,4)$, $A_4(–1,1,1)$;
7. $A_1(2,–1,–2)$, $A_2(1,2,1)$, $A_3(5,0,–6)$, $A_4(–10,9,–7)$;
8. $A_1(–2,0,–4)$, $A_2(–1,7,1)$, $A_3(4,–8,–4)$, $A_4(1,–4,6)$;
9. $A_1(14,4,5)$, $A_2(–5,–3,2)$, $A_3(–2,–6,–3)$, $A_4(–2,2,–1)$;

Задача 5

Задан треугольник ABC координатами своих вершин. Найдите:

а) периметр треугольника;

б) точку пересечения медиан;

в) уравнение стороны AB;

г) уравнение высоты, опущенной из вершины C;

д) длину этой высоты.

0.	$A(1,2)$	$B(3,4)$	$C(-2,-3)$
1.	$A(-5,2)$	$B(3,6)$	$C(4,-6)$
2.	$A(1,2)$	$B(8,4)$	$C(-1,4)$
3.	$A(3,5)$	$B(-3,4)$	$C(5,1)$
4.	$A(3,7)$	$B(-4,0)$	$C(1,4)$
5.	$A(-4,5)$	$B(2,7)$	$C(1,1)$
6.	$A(-3,2)$	$B(-5,-4)$	$C(2,1)$
7.	$A(3,-5)$	$B(-2,-7)$	$C(0,2)$
8.	$A(1,-3)$	$B(5,4)$	$C(-1,0)$
9.	$A(-1,2)$	$B(-2,-2)$	$C(5,-2)$

Задача 6

Составьте каноническое уравнение эллипса, если:

0. Расстояние между фокусами равно 10, большая ось равна 26.
1. Большая ось равна 20, эксцентриситет $\varepsilon = 0{,}6$.
2. Расстояние между директрисами равно 18, большая ось равна 12.
3. Прямые $x = \pm 12{,}5$ являются директрисами, малая ось равна 12.
4. Точки $M(4,-\sqrt{3})$, $N(2\sqrt{2},\sqrt{3})$ принадлежат эллипсу.
5. Точка $M(3,4)$ принадлежит эллипсу, эксцентриситет $\varepsilon = \dfrac{1}{2}$.
6. Большая полуось равна 5, расстояние между фокусами равно 6.
7. Расстояния от фокуса до концов большой оси равны 1 и 9.
8. Сумма длин полуосей равна 8 и расстояние между фокусами равно 8.
9. Директрисы задаются уравнениями $x = \pm 12$, эксцентриситет $\varepsilon = \dfrac{1}{3}$.

Задача 7

Найти точку M', симметричную точке M относительно прямой:

0. $M(0,-3,-2)$, $\dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y+1{,}5}{-1}=\dfrac{z}{1}$;

1. $M(2,-1,1)$, $\dfrac{x-4{,}5}{1}=\dfrac{y+3}{-0{,}5}=\dfrac{z-2}{1}$;

2. $M(1,1,1)$, $\dfrac{x-2}{1}=\dfrac{y+1{,}5}{-2}=\dfrac{z-1}{1}$;

3. $M(1,2,3)$, $\dfrac{x-0{,}5}{0}=\dfrac{y+1{,}5}{-1}=\dfrac{z-1{,}5}{1}$;

4. $M(1,0,-1)$, $\dfrac{x-3{,}5}{2}=\dfrac{y-1{,}5}{2}=\dfrac{z}{0}$;

5. $M(2,1,0)$, $\dfrac{x-2}{0}=\dfrac{y+1{,}5}{-1}=\dfrac{z+0{,}5}{1}$;

6. $M(-2,-3,0)$, $\dfrac{x+0{,}5}{1}=\dfrac{y+1{,}5}{0}=\dfrac{z-0{,}5}{1}$;

7. $M(-1,0,-1)$, $\dfrac{x}{-1}=\dfrac{y-1{,}5}{0}=\dfrac{z-2}{1}$;

8. $M(0,1,2)$, $\dfrac{x-1{,}5}{2}=\dfrac{y}{-1}=\dfrac{z-2}{1}$;

9. $M(3,-3,-1)$, $\dfrac{x-6}{5}=\dfrac{y-3{,}5}{4}=\dfrac{z+0{,}5}{0}$.

Задача 8

Найдите пределы функций, не пользуясь правилом Лопиталя.

0. а) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{5x-1}{x+1}$, б) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{x}$, в) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 4x}{5-\sqrt{2x+25}}$.

1. а) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x^2-x-3}{x^3-8x+5}$, б) $\lim\limits_{x\to+\infty}x(\sqrt{x^2+1}-x)$, в) $\lim\limits_{x\to-3}\dfrac{\sin(x+3)}{9-x^2}$.

2. а) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^2-6x+1}{2x-7}$, б) $\lim\limits_{x\to-8}\dfrac{\sqrt{1-x}-3}{2+\sqrt[3]{x}}$, г) $\lim\limits_{x\to 0}\cdot\left(\dfrac{3x-4}{3x+1}\right)^{x-2}$

3. а) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x^3-90x^2+10}{25x^3+13x}$, б) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{6x-5}{1+\sqrt{x^2+3}}$,

в) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{2-\sqrt{4-x}}{\sin 4x}$.

4. а) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{3x^2-x}{x^2+5}$, б) $\lim\limits_{x\to 4}\frac{2-\sqrt{x}}{3-\sqrt{2x+1}}$,

в) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{2x-4}{2x}\right)^{7x}$.

5. а) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x}{\sqrt[3]{x^3-9}}$, б) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\sqrt{1-x}}{\sin 3x}$,

в) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x^2+1}{x^2-3}\right)^{x^2}$.

6. а) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x^3-10x-1}{x+10^5}$, б) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{x}{3-\sqrt{x+9}}$,

в) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\cos 5x-\cos x}{4x^2}$.

7. а) $\lim\limits_{x\to -1}(x^5-4^{x+1}-3)$, б) $\lim\limits_{x\to -\infty}\frac{1+\sqrt{2x^2-1}}{x}$,

г) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{3x}{3x-5}\right)^{4x}$.

8. а) $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{1+3x^2}}{x-1}$, б) $\lim\limits_{x\to+\infty}(x-\sqrt{x^2+4x})$,

в) $\lim\limits_{x\to 0-0}\frac{x}{\sqrt{1-\cos x}}$.

9. а) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1-2x-2x^2}{3+x^3}$, б) $\lim\limits_{x\to+\infty}(\sqrt{x^2+x}-\sqrt{x^2-x})$,

в) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{4x-1}{4x+1}\right)^{2x+3}$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Гусак, А. А. Высшая математика: учебник: в 2 т. / А. А. Гусак. – Минск : ТетраСистемс, 2001. – 544 с. – Т. 1.

2. Марков, Л. Н. Высшая математика. / Л. Н. Марков, Г. П. Размыслович. – Минск : Амалфея, 1999. – Ч. 1: Элементы линейной и векторной алгебры. Основы аналитической геометрии. – 208 с.

3. Дадаян, А. А. Сборник задач по аналитической геометрии и элементам линейной алгебры / А. А. Дадаян, Е. С. Масалова. – Минск : Выш. школа, 1982. – 206 с.

4. Гусак, А. А. Задачи и упражнения по высшей математике: учебник: в 2 ч. / А. А. Гусак. – Минск : Выш. школа, 1988. – 229 с. – Ч. 2.

5. Гусак, А. А. Задачи и упражнения по высшей математике: учебник: в 2 ч. / А. А. Гусак. – Минск : Выш. школа, 1988. – 247 с. – Ч. 1.

6. Гусак, А. А. Аналитическая геометрия и линейная алгебра: справ. пособие / А. А. Гусак. – Минск : ТетраСистемс, 2001. – 288 с.

7. Гусак, А. А. Математический анализ и дифференциальные уравнения: справочное пособие по решению задач / А. А. Гусак. – Минск : ТетраСистемс, 2001. – 416 с.

8. Щукин, М. В. Курс лекций по аналитической геометрии и линейной алгебре / М. В. Щукин. – МГЭУ им. А. Д. Сахарова, 2007. – 36 с.

Учебное издание

Борботко Елена Петровна

Кузьменкова Тамара Евгеньевна

Шевцова Анна Владимировна

ВЫСШАЯ МАТЕМАТИКА (аналитическая геометрия, линейная алгебра, функции и пределы)

Учебно-методическое пособие

Редакторы *С. О. Сараева, О. А. Кучинский*

Корректор *С. О. Сараева*

Компьютерная верстка *М. Ю. Мошкова*

Подписано в печать 12.11.2009. Формат 60×90 $^{1}/_{16}$.
Бумага офсетная. Гарнитура Times. Ризография.
Усл. печ. л. 3. Уч.-изд. л. 0, 9.
Тираж 73 экз. Заказ № 116.

Издатель и полиграфическое исполнение
учреждение образования «Международный государственный
экологический университет имени А. Д. Сахарова»

ЛИ № 02330/0131580 от 28.07.2005 г.
Республика Беларусь, 220070, г. Минск, ул. Долгобродская, 23

E-mail: info@iseu.by
http://www.iseu.by