

«глухие» места, посещение которых одним человеком не допускается. Такое нарушение методики работ приводит к тому, что топографы определяют числовые характеристики «на глаз» (иногда шагами), а отдаленные места просто не посещают. Безусловно, это резко снижает качество дешифрирования, а иногда приводит к браку. Особенно нельзя обходиться без рабочих при дешифрировании аэрофотоснимков в масштабе 1 : 2000. Здесь, кроме измерений числовых характеристик, требуется наносить по промерам много объектов, которых нет на аэрофотоснимках.

Отсутствие и несовершенство приспособлений и инструментов для полевого дешифрирования также отрицательно сказываются на результатах работ. Зачастую в экспедициях нет 50-метровых рулеток, инструментов для определения числовых характеристик форм рельефа (курганов, насыпей, выемок, обрывов и т. д.). Необходимо заменить примитивные маятниковые высотомеры оптическими по примеру лесоустроительных предприятий. Производство более мелкого инструментария можно наладить во всех экспедициях. Каждый исполнитель должен иметь полный набор современных приспособлений и инструментов для полевого дешифрирования.

Следует также отметить, что многие

руководители полевых партий слабо знают процесс дешифрирования и не пытаются его освоить, поскольку надеются, что контроль и приемку работ выполняют редакторы. Здесь уместно напомнить, что редакторы занимаются редактированием карт, а руководители партий должны добросовестно выполнять свои обязанности по контролю и приемке полевых работ.

Немаловажное значение имеет и то, что в некоторых экспедициях редакторы чрезмерно загружены. Годовых норм загрузки редакторов нет, поэтому число их в экспедициях не регулируется в зависимости от объема работ. Это приводит к тому, что редакторский просмотр материалов дешифрирования не всегда выполняется своевременно и качественно.

В заключение отметим, что дешифрирование — сложный процесс, требующий высокой квалификации исполнителей и серьезного отношения к нему со стороны руководителей экспедиций. Ведь на дешифрирование расходуется от трети до половины стоимостных и трудовых затрат, приходящихся на весь комплекс полевых топографических работ. К тому же следует помнить, что результаты дешифрирования во многом определяют лицо будущей карты. В связи с этим надо повысить требовательность к организации работ по дешифрированию и его качеству.

## Цифровое моделирование местности

УДК 528.932 : 513.87

С. В. АБЛАМЕЙКО

### МЕТОД ПОВЫШЕНИЯ ТОЧНОСТИ МОДЕЛИРОВАНИЯ РЕЛЬЕФА МЕСТНОСТИ

В последнее время для математического моделирования рельефа местности все чаще используются сплайн-функции [3, 4]. Они алгоритмичны, требуют меньшей памяти ЭВМ по сравнению, например, с полигональным представлением и позволяют достаточно точно моделировать рельеф. Однако в местах резких перегибов линий рельефа (например, в оврагах), т. е. в местах разрыва производных, кубические сплайн-функции не позво-

ляют достигнуть необходимой точности. Для устранения этого недостатка предлагается вводить дополнительные точки вблизи данных участков или моделировать их с помощью линейных сплайн-функций. Недостаточно точно моделируются с помощью кубических сплайн-функций и прямые участки линий рельефа. Для устранения данных недостатков, а также ошибок цифрового желательного иметь математический аппарат, позволяющий локально

модифицировать форму кривой как с изменением положения опорных точек, так и без него.

В настоящей работе предлагается метод, основанный на использовании параметрических В-сплайнов и локальных сплайнов, который позволяет варьировать форму кривой на отдельных участках с помощью определенных параметров и быстрее достигать необходимой точности моделирования рельефа.

Пусть кривая задана своим точечным базисом  $\{r_i\}_{i=0}^N$ . Математическую модель этой кривой представим в виде разложения по параметрическим В-сплайнам

$$\vec{S}(t) = \sum_{i=-3}^{N-1} \vec{C}_i B_i(t), \quad (1)$$

где  $B_i(t)$  — нормированные В-сплайны [2];  $C_i$  — коэффициенты разложения, которые находятся из системы линейных уравнений с ленточной матрицей.

Векторное равенство (1) понимается как покоординатное. Перепишем его в виде разложения по степеням  $t$ . Тогда на каждом участке сплайн будет иметь вид

$$\begin{aligned} \vec{S}(t) = & \frac{1}{6} (\vec{C}_{i-3} + 4\vec{C}_{i-2} + \vec{C}_{i-1}) + \\ & + \frac{1}{2} (-\vec{C}_{i-3} + \vec{C}_{i-1}) t + \frac{1}{2} (\vec{C}_{i-3} - \\ & - 2\vec{C}_{i-2} + \vec{C}_{i-1}) t^2 + \frac{1}{6} (-\vec{C}_{i-3} + \\ & + 3\vec{C}_{i-2} - 3\vec{C}_{i-1} + \vec{C}_i) t^3. \end{aligned} \quad (2)$$

Дифференцируя эту функцию в точке  $t=0$ , получим

$$\left. \begin{aligned} \vec{S}_i &= \frac{1}{6} (\vec{C}_{i-3} + 4\vec{C}_{i-2} + \vec{C}_{i-1}); \\ \vec{S}_i' &= \frac{1}{2} (-\vec{C}_{i-3} + \vec{C}_{i-1}); \\ \vec{S}_i'' &= \vec{C}_{i-3} - 2\vec{C}_{i-2} + \vec{C}_{i-1}. \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

Разобьем теперь  $i$ -й участок прямоугольной сетки рельефа  $[0,1]$  на три части точками  $0, 1/3, 2/3, 1$  и найдем уравнение сплайна в каждой части в виде [1,5]

$$S_i(t) = \begin{cases} P^0_i + P^1_i t + P^2_i \frac{t^2}{2} + b_1 t^3, & 0 \leq t \leq \frac{1}{3}; \\ b_2 + b_3 t + b_4 t^2 + b_5 t^3, & \frac{1}{3} \leq t \leq \frac{2}{3}; \\ P^0_{i+1} - P^1_{i+1} (1-t) + P^2_{i+1} (1-t)^2/2 + b_6 (1-t)^3, & \frac{2}{3} \leq t \leq 1, \end{cases}$$

где

$$P_i^k = (x_i^{(k)}, y_i^{(k)}), \quad k = 0, 1, 2;$$

$$S_i(t) = (S_i^x(t), S_i^y(t)), \quad i = 0, 1, \dots, N;$$

$$b_j = (b_j^x, b_j^y), \quad j = 1, 2, \dots, 6.$$

Выбор уравнений данного вида обуславливается требованиями непрерывности сплайна и его производных в узловых точках. Так как сплайн-функция непрерывна на каждом участке, то требуя непрерывности сплайна и его первых двух производных в точках  $1/3, 2/3$ , получим для нахождения  $b_i$  систему из шести уравнений с шестью неизвестными. Тогда уравнение сплайна запишется в виде

$$\begin{aligned} S_i(t) = & P^0_i + P^1_i t + \frac{1}{2} P^2_i t^2 + \\ & + \left( -\frac{9}{2} P^0_i - 3P^1_i - \frac{11}{12} P^2_i \right) t^3 + \\ & + \left( \frac{9}{2} P^0_{i+1} - \frac{3}{2} P^1_{i+1} + \frac{1}{6} P^2_{i+1} \right) t^3, \\ & 0 \leq t \leq \frac{1}{3}; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} S_i(t) = & \left( 9P^0_i + \frac{9}{2} P^1_i + \frac{7}{12} P^2_i \right) t^3 + \\ & + \left( -\frac{27}{2} P^0_i - \frac{15}{2} P^1_i - P^2_i \right) t^2 + \\ & + \left( \frac{9}{2} P^0_i + \frac{7}{2} P^1_i + \frac{1}{2} P^2_i \right) t + \\ & + \left( \frac{1}{2} P^0_i - \frac{5}{18} P^1_i - \frac{1}{18} P^2_i \right) + \\ & + \left( 9P^0_{i+1} - \frac{9}{2} P^1_{i+1} + \frac{7}{12} P^2_{i+1} \right) \times \\ & \times (1-t)^3 + \left( -\frac{27}{2} P^0_{i+1} + \frac{15}{2} P^1_{i+1} - \right. \\ & \left. - P^2_{i+1} \right) (1-t)^2 + \left( \frac{9}{2} P^0_{i+1} - \frac{7}{2} P^1_{i+1} + \right. \\ & \left. + \frac{1}{2} P^2_{i+1} \right) (1-t) + \left( \frac{1}{2} P^0_{i+1} + \right. \\ & \left. + \frac{5}{18} P^1_{i+1} - \frac{1}{18} P^2_{i+1} \right), \quad \frac{1}{3} \leq t \leq \frac{2}{3}; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} S_i(t) = & P^0_{i+1} - P^1_{i+1} (1-t) + \\ & + \frac{1}{2} P^2_{i+1} (1-t)^2 + \left( -\frac{9}{2} P^0_{i+1} + 3P^1_{i+1} - \right. \\ & \left. - \frac{11}{12} P^2_{i+1} \right) (1-t)^3 + \left( \frac{9}{2} P^0_i + \right. \\ & \left. + \frac{3}{2} P^1_i + \frac{1}{6} P^2_i \right) (1-t)^3, \quad \frac{2}{3} \leq t \leq 1. \end{aligned}$$

Подставляя в последние уравнения выражения (3), сведем их к формуле (2).

На основании полученных формул представим уравнение кривой в виде

$$S(t) = \sum_{i=0}^N (P^0_i R^0_i(t) + P^1_i R^1_i(t) + P^2_i R^2_i(t)), \quad (4)$$

где  $R^j_i(t)$  — кубические полиномы от  $t$ .

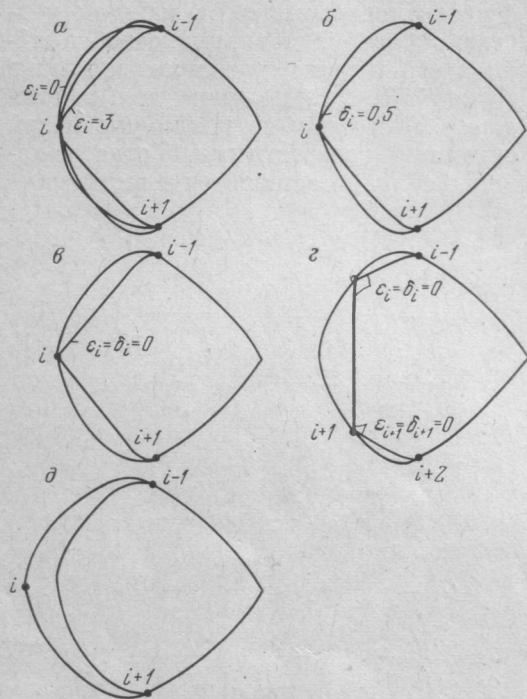


Рис. 1. Пример управления формой кривой с помощью введенных параметров

В каждой узловой точке имеем шесть параметров  $x_i, y_i, \dot{x}_i, \dot{y}_i, \ddot{x}_i, \ddot{y}_i$ . Полученные формулы обеспечивают

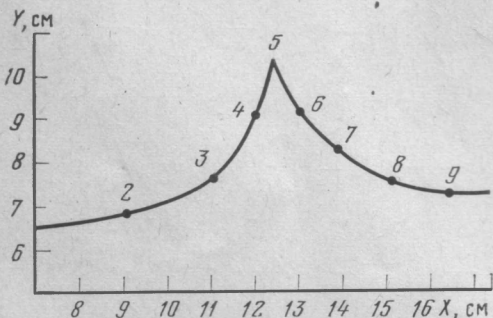


Рис. 2. Исходная кривая

непрерывность кривой в узлах стыка до второй производной включительно. Введем параметры управления формой кривой  $\delta^k_i$  и  $\epsilon^k_i$ . Для этого перепишем формулу (4) в виде

$$S(t) = \sum_{i=0}^N (P^0_i R^0_i(t) + P^1_i(\delta^k_i) R^1_i(t) + P^2_i(\epsilon^k_i) R^2_i(t)),$$

где

$$P^1_i(\delta^k_i) = (\delta^1_i \dot{x}_i, \delta^2_i \dot{y}_i);$$

$$P^2_i(\epsilon^k_i) = (\epsilon^1_i \ddot{x}_i, \epsilon^2_i \ddot{y}_i);$$

$$\delta^k_i, \epsilon^k_i \geq 0, k = 1, 2.$$

Изменяя параметры  $\delta^k_i$  и  $\epsilon^k_i$ , будем локально изменять форму кривой. Для простоты и наглядности примем  $\epsilon^1_i = \epsilon^2_i = \epsilon_i$  и  $\delta^1_i = \delta^2_i = \delta_i$ . Рассмотрим изменение параметров в какой-либо одной точке кривой, т. е. при фиксированном значении  $i$ . При  $\epsilon_i = \delta_i = 1$  вновь полученная кривая совпадает с исходной.

Пусть  $\delta_i = 1$ . Тогда изменение величины  $\epsilon_i$  влияет на кривизну кривой. При  $\epsilon \rightarrow 0$  радиус кривизны  $R$  на отрезках  $[t_{i-1}, t_i]$  и  $[t_i, t_{i+1}]$  стремится к const. При  $\epsilon \rightarrow 3-0$  радиус  $R \rightarrow \infty$ . При  $\epsilon \in [0, 3]$  кривая занимает промежуточное положение между двумя границами, при  $\epsilon > 3$  у нее появляются перегибы (рис. 1, а).

Пусть  $\epsilon_i = 1$ . Тогда изменение параметра  $\delta_i$  влияет на длину дуги. При  $\delta_i \rightarrow 0.5+0$  длина дуги стремится к минимуму (рис. 1, б).

Пусть  $\epsilon_i \neq 1, \delta_i \neq 1$ . Тогда при  $\epsilon_i = \delta_i = 0$  кривая спрямляется, сохраняя непрерывность в точках  $i-1, i+1$  и претерпевая разрыв производных в  $i$ -й точке (рис. 1, в).

Наибольший интерес представляет случай, когда данные параметры рассматриваются в двух соседних точках. Тогда при  $\epsilon_i, \epsilon_{i+1}, \delta_i, \delta_{i+1} \rightarrow 0$  кривая на отрезке  $[t_i, t_{i+1}]$  стремится к прямой линии, достигая ее при  $\epsilon_i = \epsilon_{i+1} = \delta_i = \delta_{i+1} = 0$ . В общем случае, изменяя данные параметры, можно получить на отрезке  $[t_i, t_{i+1}]$  кривую любой формы (рис. 1, г).

С помощью данного математического аппарата возможно:

— построить кривую с минимальной длиной дуги на различных участках;

— построить кривую с постоянным радиусом кривизны на различных участках;

— спрямить кривую, не нарушая ее непрерывности до второй производной включительно;

— спрямить кривую, нарушая непрерывность производных, что необходимо для построения кривых с резкими перегибами.



Все это достигается без изменения положения опорных точек и их числа путем варьирования параметров управления.

Данный математический аппарат позволяет также выполнять модификацию кривых с изменением положения опорных точек. Но по сравнению с ранее полученными результатами он обеспечивает более высокую степень локальности, т. е. кривая изменяется только на двух соседних участках (рис. 1, д).

Рассмотрим возможности применения данного аппарата для достижения необходимой точности моделирования линий рельефа в местах резких перегибов. Так, на рис. 2 представлена в увеличенном виде кривая, изображающая овраг; она имеет в одном месте разрыв производных. На рис. 3 показана кривая, восстановленная с помощью обычных кубических сплайнов. Как видно, на участке, прилегающем к точке 5, она отличается от исходной. Рис. 4 является иллюстрацией применения предлагаемого метода (в точке 5 параметры  $\delta_i$  и  $\epsilon_i$  равны нулю). На основе вычисления координат точек 4, 5, 6 сделан вывод, что на данном участке полученная кривая совпадает с исходной с точностью до 0,2 мм. Данный метод также позволяет точно моделировать прямые участки картографических линий.

Отметим, что время моделирования объектов с помощью предложенных сплайнов соизмеримо со временем моделирования обычными кубическими сплайнами, поскольку те и другие являются полиномами третьей степени. Однако в первом случае необходимая точность моделирования достигается гораздо быстрее, так как не надо выполнять различные дополнительные операции (разбиение кривой, ввод дополнительных точек, задание различных значений касательных); достаточно только варьировать введенные параметры.

Таким образом, можно заключить, что применение локальных кубических

сплайнов позволяет более полно и точно воспроизводить особенности картографических линий.

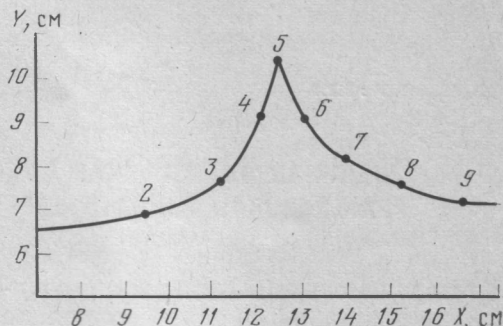


Рис. 3. Результат моделирования кривой с помощью обычных кубических сплайнов

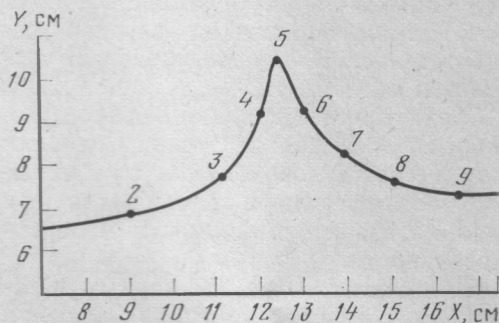


Рис. 4. Результат моделирования кривой с помощью предложенного метода

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Абламейко С. В. Управление формой кривых с помощью сплайн-функций. — В кн.: Сплайн-функции в инженерной геометрии (Вычислительные системы, вып. 86). Новосибирск, 1981, с. 145—149.
2. Абламейко С. В., Васильев В. П. Использование В-сплайнов для задач формирования математической модели линии в САПР. — В кн.: Теория и методы автоматизации проектирования. Минск, 1979, вып. 2, с. 35—40.
3. Проворов К. Л., Иванов А. М. Математическое моделирование местности с использованием кубических и бикубических сплайнов. — Геодезия и картография, 1978, № 8, с. 39—44.
4. Adams J., Gary J. Compact representation of contour plots for phone line transmission. — Com. ACM, 1974, vol. 17, № 6, 1974, p. 333—336.
5. Dube R. P. Preliminary specification of spline curves. — IEEE Trans. on Comput., 1979, VC—28, № 4, p. 286—290.