БИНОМИАЛЬНАЯ УСЛОВНО АВТОРЕГРЕССИОННАЯ МОДЕЛЬ ПРОСТРАНСТВЕННО-ВРЕМЕННЫХ ДАННЫХ И ЕЕ ВЕРОЯТНОСТНЫЕ СВОЙСТВА

М.К. Журак

Белорусский государственный университет, факультет прикладной математики и информатики, Минск, Беларусь
mzhurak@gmail.com

Моделирование и анализ пространственно-временных данных является актуальной научной задачей. При вероятностно-статистическом моделировании и анализе пространственно-временных данных возникают трудности двух типов. Во-первых, это необходимость совместного учета временных и пространственных зависимостей регистрируемых наблюдений, приводящая к сложным моделям, содержащим много априорно неизвестных параметров. Во-вторых, это вычислительные проблемы, вызванные необходимостью обработки больших массивов пространственно-временных данных для достижения приемлемых уровней точности статистических оценок параметров, статистических решений и прогнозов.

Введем следующие обозначения: (Ω, F, P) — вероятностное пространство; $\mathbb{Z}$ — множество целых чисел; $\mathbb{N}$ — множество натуральных чисел; $s \in S = \{1, 2, \ldots, n\}$ — индексная переменная, кодирующая пространственные координаты географических регионов (условимся далее их называть сайтами), на которые разбита изучаемая область; n — число сайтов; $t \in \{1, 2, \ldots, T\}$ — дискретное время; T — длительность временного промежутка наблюдений; $x_{s,t}$ — дискретная случайная величина в момент времени t в сайте s; $F_{<t} = \sigma\{x_{u,\tau} : \tau < t\} \subset F$ — σ-алгебра, порожденная указанными в скобках случайными величинами; $L(\xi)$ — закон распределения вероятностей случайной величины ξ.

Построим биномиальную условно авторегрессионную модель пространственно-временных наблюдений $\{x_{s,t}\}$, следуя [1, 2]. Будем предполагать, что при фиксированной предыстории $\{x_{s,\tau} : s \in S, \ \tau \leqslant t-1\}$ случайные величины $x_{1,t}, \ldots, x_{n,t}$ условно независимы, причем:

$$L\{x_{s,t} | F_{<t}\} = Bi(\cdot; N; p_{s,t}),$$

$$\ln \frac{p_{s,t}}{1-p_{s,t}} = \sum_{i=1}^{n} a_{s,i} x_{i,t-1} + \sum_{j=1}^{m} b_{s,j} z_{j,t}, \quad t \in \mathbb{Z}, \quad s \in S,$$

где $x_{s,\,t} \in A = \{0, 1, \ldots, N\}$; $a = (a_{s,1}, \ldots, a_{s,n})' \in \mathbb{R}^n$, $b_s = (b_{s,1}, \ldots, b_{s,m})' \in \mathbb{R}^m$, $s \in \in S$, $\theta_s = (a'_s, b'_s)' \in \mathbb{R}^{n+m}$ — векторы-столбцы параметров модели (число параметров модели равно $D = n(n + m)$); $z_{j,t} \in Z$, $j = 1, \ldots, m$ — наблюдаемый (известный) набор значений m внешних факторов в момент времени t; $Bi(;N;p)$ — биномиальный закон распределения вероятностей с параметрами $N \in \mathbb{N}$, $0 \leqslant p \leqslant 1$ для случайной величины ξ :

$$P\{\xi = l\} = Bi(l; N, p) ::= C_N^l p^l (1 - p)^{N-l}, \quad l \in A, \quad L\{\xi\} = Bi(;N;p),$$

$$p_{s,t} = p_s(X_{t-1}, Z_t) ::= \exp\{\theta'_s Y_t\}(1 + \exp\{\theta'_s Y_t\})^{-1}, \quad s \in S, \quad t \in \mathbb{Z},$$

где $Z_t = (z_{1,t}, z_{2,t}, \ldots, z_{m,t})' \in \mathbb{R}^m$ — вектор-столбец, задающий значения внешних факторов в момент времени t; $X_t = (x_{1,t}, x_{2,t}, \ldots, x_{n,t})' \in A^n$ — вектор-столбец, задающий временной срез исследуемого явления в момент времени $t \in \mathbb{Z}$; $Y_t = (X'_{t-1}, Z'_t)' \in \in \mathbb{R}^{n+m}$, $t \in \mathbb{Z}$.

Литература

1. Mariella, L., Tarantino M. *Spatial temporal conditional Auto-Regressive Model: A New Autoregressive Matrix*. Austrian journal of Statistics, 2010.

2. Kharin Yu., Zhurak M. *Statistical Analysis of Spatio-Temporal Data Based on Poisson Conditional Autoregressive Model*. INFORMATICA, 2015.