ЭКСТРЕМАЛЬНАЯ СЕТЕВАЯ ЗАДАЧА ДРОБНО-ЛИНЕЙНОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ

А. А. Лагуто, Л. А. Пилипчук

Белорусский государственный университет
г. Минск, Беларусь
E-mail: laguto@bsu.by, pilipchuk@bsu.by

Рассматривается прямой опорный релаксационный метод решения сетевой задачи дробно-линейного программирования с дополнительными ограничениями. На основании сетевых свойств базиса пространства решений недоопределенной системы линейных уравнений с матрицей инцидентности графа получены аналитические выражения для вектора оценок, что позволило не использовать систему потенциалов на итерациях. Приведен пример, иллюстрирующий предложенный метод.

Ключевые слова: дробно-линейная задача, дополнительные ограничения, опора, поток, оценка, декомпозиция.

ВВЕДЕНИЕ

Разработан прямой точный опорный релаксационный метод решения экстремальной сетевой задачи дробно-линейного программирования с дополнительными ограничениями общего вида – задачи об оптимизации отношения двух линейных форм при линейных сетевых ограничениях. Реальным приложением данного класса задач является задача составления плана производства с максимальной рентабельностью.

Итерация метода основана на использовании теоретико-графовых свойств базиса пространства решений недоопределенной системы линейных уравнений с матрицей инцидентности графа и декомпозиции линейных систем, что позволяет решать задачи большой размерности. На основании сетевых свойств базиса пространства решений получены аналитические выражения для вектора оценок, что позволило не использовать систему потенциалов на итерациях. Приведен пример, иллюстрирующий предложенный метод.

ДРОБНО-ЛИНЕЙНАЯ ЗАДАЧА С ДОПОЛНИТЕЛЬНЫМИ ОГРАНИЧЕНИЯМИ

Рассмотрим экстремальную задачу дробно-линейного программирования с дополнительными ограничениями в сетевой форме:

$$f(x)=\frac{p(x)}{q(x)}=\frac{\sum\limits_{(i,j)\in U} p_{ij}x_{ij}+\beta}{\sum\limits_{(i,j)\in U} q_{ij}x_{ij}+\gamma}\to \max\,, \tag{1}$$

$$\sum_{j\in I_i^+(U)} x_{ij}-\sum_{j\in I_i^-(U)} x_{ji}=b_i\,,\; i\in I\,, \tag{2}$$

$$\sum_{(i,j)\in U} \lambda_{ij}^t x_{ij} = \alpha_t ,\ t = \overline{1,l} , \tag{3}$$

$$d_{*ij} \le x_{ij} \le d_{ij}^* ,\ (i,j) \in U , \tag{4}$$

где $S = \{I, U\}$ − конечная ориентированная связная сеть без кратных дуг и петель с множеством узлов I, $|I| = m$, и множеством дуг U, $|U| = n$, $m \le n$, β, γ − скаляры, $\alpha_t \in R$, $t = \overline{1,l}$; $x = (x_{ij}, (i,j) \in U)$ − поток задачи, $x \in X$ (на векторе x выполняются все ограничения задачи (2) − (4)), X − выпуклое множество потоков (планов); $I_i^+(U) = \{j : (i,j) \in U\}$, $I_i^-(U) = \{j : (j,i) \in U\}$. Ограничения (2) будем называть основными ограничениями, ограничения (3) − дополнительными ограничениями, а ограничения (4) − прямыми ограничениями.

Полагаем, что знаменатель $q(x) = \sum_{(i,j)\in U} q_{ij} x_{ij} + \gamma$ целевой функции не меняет знак на множестве потоков. Следовательно, без ограничений общности можно считать, что знаменатель $q(x) > 0$, $\forall x \in X$, в противном случае можно рассматривать задачу $f(x) = \dfrac{-p(x)}{-q(x)}$.

Теорема **(сетевой критерий опорности).** Множество дуг U_K является опорой сети $S = \{I, U\}$ для системы (2) − (3) тогда и только тогда, когда выполняются следующие условия:

1) множество U_K может быть разделено на два множества U_R и U_W, такие, что $U_K = U_R \cup U_W$, $U_R \cap U_W = \varnothing$ и множество U_R составляет опору сетевой части ограничений (2), т. е. множество U_R является покрывающим деревом сети S;

2) $|U_W| = l$;

3) $\det \Lambda_W \ne 0$, где $\Lambda_W = \left(\Lambda_{\tau\rho}^t, t = \overline{1,l}; (\tau,\rho) \in U_W\right)$ − матрица детерминантов циклов, порожденных дугами $(\tau,\rho) \in U_W$.

Определение 1. Число $\Lambda_{\tau\rho}^t = \lambda_{\tau\rho}^t + \sum_{(i,j)\in U_R} \lambda_{ij}^t \operatorname{sign}(i,j)^{L(\tau,\rho)}$ будем называть детерминантом цикла, порожденного дугой $(\tau,\rho) \in U \setminus U_R$ относительно дополнительного ограничения (3) с номером t, $t = \overline{1,l}$.

Определение 2. Число $\operatorname{sign}(i,j)^{L(\tau,\rho)}$ определим как знак дуги (i,j) в цикле $L(\tau,\rho)$, порожденном дугой $(\tau,\rho) \in U \setminus U_R$. (Дуга (τ,ρ) задает направление в цикле.)

Определение 3. Пусть *root* − произвольный узел $i \in I$. Определим число $\operatorname{sign}(i,j)^{Ls}$ как знак дуги (i,j) в единственной цепи Ls покрывающего дерева U_R сети $S = \{I, U\}$, соединяющей узел s с узлом *root*.

Обозначим $U_N = U \setminus U_K$ – множество неопорных дуг сети *S*. Пара $\{x, U_K\}$, состоящая из произвольного потока *x* и произвольной опоры U_K, называется опорным потоком. Опорный поток $\{x, U_K\}$ будем называть невырожденным, если он невырожден по прямым ограничениям $d_{*ij} < x_{ij} < d^*_{ij}$, $(i, j) \in U_K$.

ФОРМУЛА ПРИРАЩЕНИЯ ЦЕЛЕВОЙ ФУНКЦИИ

Пусть $\{x, U_K\}$ – начальный опорный поток задачи (1) − (4). Обозначим через $\bar{x} = x + \Delta x$ некоторый другой поток задачи (1) − (4), где $\Delta x = \bar{x} - x$ − приращение потока. Известно [4, 6], что фундаментальная система циклов образует базис пространства решений системы основных ограничений (2). Следовательно, общее решение системы (2) имеет вид

$$x_{ij} = \sum_{(\tau,\rho)\in U \setminus U_R} x_{\tau\rho} \operatorname{sign}(i, j)^{L(\tau,\rho)} + \sum_{s \in I \setminus root} b_s \operatorname{sign}(i, j)^{Ls}, \ (i, j) \in U_R, \tag{5}$$

где *root* − произвольный узел $i \in I$.

Приращение потока Δx удовлетворяет однородной системе, соответствующей основным ограничениям задачи (2):

$$\sum_{j \in I_i^+(U)} \Delta x_{ij} - \sum_{j \in I_i^-(U)} \Delta x_{ji} = 0, \ i \in I. \tag{6}$$

С учетом (5) и (6) приращение Δx на дугах дерева $(i, j) \in U_R$ вычисляется следующим образом:

$$\Delta x_{ij} = \sum_{(\tau,\rho)\in U \setminus U_R} \Delta x_{\tau\rho} \operatorname{sign}(i, j)^{L(\tau,\rho)}, \ (i, j) \in U_R. \tag{7}$$

С другой стороны, приращение потока Δx удовлетворяет также и однородной системе, соответствующей дополнительным ограничениям задачи (3):

$$\sum_{(i,j)\in U} \lambda_{ij}^t \Delta x_{ij} = 0, \ t = \overline{1, l}. \tag{8}$$

Подставим соотношение (7) в условие (8) и изменим порядок суммирования:

$$\sum_{(i,j)\in U} \lambda_{ij}^t \Delta x_{ij} = \sum_{(i,j)\in U_R} \lambda_{ij}^t \sum_{(\tau,\rho)\in U \setminus U_R} \Delta x_{\tau\rho} \operatorname{sign}(i, j)^{L(\tau,\rho)} + \sum_{(i,j)\in U \setminus U_R} \lambda_{ij}^t \Delta x_{ij} = 0.$$

$$\sum_{(\tau,\rho)\in U_W} \Delta x_{\tau\rho} \Lambda^t_{\tau\rho} + \sum_{(\tau,\rho)\in U_N} \Delta x_{\tau\rho} \Lambda^t_{\tau\rho} = 0, \ t = \overline{1, l}. \tag{9}$$

В матричной форме соотношение (9) имеет вид

$$\Lambda_W \Delta x_W + \Lambda_N \Delta x_N = 0, \tag{10}$$

где $\Lambda_W = \left(\Lambda^t_{\tau\rho}, t = \overline{1, l}; (\tau, \rho) \in U_W\right)$, $\Lambda_N = \left(\Lambda^t_{\tau\rho}, t = \overline{1, l}; (\tau, \rho) \in U_N\right)$ − матрицы детерминантов циклов, порожденных соответственно дугами $(\tau, \rho) \in U_W$ и $(\tau, \rho) \in U_N$.

По условию 3 сетевого критерия опорности матрица детерминантов Λ_W – невырожденная матрица, тогда из соотношения (10) можем выразить приращение Δx_W:

$$\Delta x_W = -\Lambda_W^{-1}\Lambda_N \Delta x_N. \qquad (11)$$

Вычислим приращение целевой функции Δf:

$$\Delta f = f(x+\Delta x) - f(x) = \frac{p(x+\Delta x) - f(x)q(x+\Delta x)}{q(x+\Delta x)} = \frac{\sum\limits_{(i,j)\in U} p_{ij}\Delta x_{ij} - f(x)\sum\limits_{(i,j)\in U} q_{ij}\Delta x_{ij}}{\left(\sum\limits_{(i,j)\in U} q_{ij}\left(x_{ij}+\Delta x_{ij}\right)+\gamma\right)}.$$

Преобразуем числитель и знаменатель приращения целевой функции на основании аналитического выражения дуговых потоков x_{ij} (5) приращения потока Δx_{ij} (7), $(i,j)\in U_R$:

$$\sum_{(i,j)\in U} p_{ij}\Delta x_{ij} = \sum_{(\tau,\rho)\in U\setminus U_R} \Delta x_{\tau\rho}\Delta_p^{(\tau,\rho)}, \text{ где } \Delta_p^{(\tau,\rho)} = p_{\tau\rho} + \sum_{(i,j)\in U_R} p_{ij}\operatorname{sign}(i,j)^{L(\tau,\rho)},$$

$$\sum_{(i,j)\in U} q_{ij}\Delta x_{ij} = \sum_{(\tau,\rho)\in U\setminus U_R} \Delta x_{\tau\rho}\Delta_q^{(\tau,\rho)}, \text{ где } \Delta_q^{(\tau,\rho)} = q_{\tau\rho} + \sum_{(i,j)\in U_R} q_{ij}\operatorname{sign}(i,j)^{L(\tau,\rho)},$$

$$(\tau,\rho)\in U\setminus U_R.$$

$$\sum_{(i,j)\in U} q_{ij}x_{ij} = \sum_{(\tau,\rho)\in U\setminus U_R} x_{\tau\rho}\Delta_q^{(\tau,\rho)} + Q, \text{ где } Q = \sum_{(i,j)\in U_R} q_{ij}\sum_{s\in I\setminus root} b_s\operatorname{sign}(i,j)^{Ls}.$$

С учетом полученных преобразований приращение целевой функции имеет вид:

$$\Delta f = \frac{\sum\limits_{(\tau,\rho)\in U_W} \Delta x_{\tau\rho}\Delta^{(\tau,\rho)} + \sum\limits_{(\tau,\rho)\in U_N} \Delta x_{\tau\rho}\Delta^{(\tau,\rho)}}{\sum\limits_{(\tau,\rho)\in U\setminus U_R} x_{\tau\rho}\Delta_q^{(\tau,\rho)} + \sum\limits_{(\tau,\rho)\in U\setminus U_R} \Delta x_{\tau\rho}\Delta_q^{(\tau,\rho)} + Q + \gamma},$$

где $\Delta^{(\tau,\rho)} = \Delta_p^{(\tau,\rho)} - f(x)\Delta_q^{(\tau,\rho)}$, $(\tau,\rho)\in U\setminus U_R$, в матричной форме $\Delta'_N = \left(\Delta^{(\tau,\rho)}, (\tau,\rho)\in U_N\right)$, $\Delta'_W = \left(\Delta^{(\tau,\rho)}, (\tau,\rho)\in U_W\right)$.

Перепишем числитель приращения целевой функции в матричной форме и преобразуем согласно формуле (11):

$\Delta'_W\Delta x_W + \Delta'_N\Delta x_N = \widetilde{\Delta}'_N\Delta x_N$, где $\widetilde{\Delta}'_N = \Delta'_N - \Delta'_W\Lambda_W^{-1}\Lambda_N$,

$\widetilde{\Delta}'_N = \left(\widetilde{\Delta}^{(\tau,\rho)}, (\tau,\rho)\in U_N\right)$ – вектор оценок.

Таким образом, получаем формулу приращения целевой функции:

$$\Delta f = \frac{\widetilde{\Delta}'_N\Delta x_N}{\sum\limits_{(\tau,\rho)\in U\setminus U_R} x_{\tau\rho}\Delta_q^{(\tau,\rho)} + \sum\limits_{(\tau,\rho)\in U\setminus U_R} \Delta x_{\tau\rho}\Delta_q^{(\tau,\rho)} + Q + \gamma}.$$

ДОПУСТИМОЕ НАПРАВЛЕНИЕ ИЗМЕНЕНИЯ ПОТОКА

Вектор $l = l(U) \in R^n$ называется допустимым направлением для потока x, если $\exists \theta^0 > 0$, что все векторы $x(\theta) = x + \theta l$, $0 \le \theta \le \theta^0$, являются потоками задачи, т. е. выполняются соотношения

$$\sum_{j \in I_i^+(U)} x_{ij}(\theta) - \sum_{j \in I_i^-(U)} x_{ji}(\theta) = b_i,\ i \in I, \tag{12}$$

$$\sum_{(i,j)\in U} \lambda_{ij}^t x_{ij}(\theta) = \alpha_t,\ t = \overline{1,l}, \tag{13}$$

$$d_{*ij} \le x_{ij}(\theta) \le d_{ij}^*,\ (i,j) \in U,\ \forall \theta \in \left[0, \theta^0\right], \tag{14}$$

$$l_R = l(U_R) = \left(l_{ij}, (i,j) \in U_R\right),\ l_W = l(U_W),\ l_K = l(U_K), l_N = l(U_N). \tag{15}$$

Из соотношений (12) – (13) следует, что допустимое направление $l = l(U)$ удовлетворяет системе

$$\sum_{j \in I_i^+(U)} l_{ij} - \sum_{j \in I_i^-(U)} l_{ji} = 0,\ i \in I, \tag{16}$$

$$\sum_{(i,j)\in U} \lambda_{ij}^t l_{ij} = 0,\ t = \overline{1,l}. \tag{17}$$

Следовательно [4, 6], из соотношения (16) имеем, что $l_{ij} = \sum_{(\tau,\rho)\in U \setminus U_R} l_{\tau\rho} \operatorname{sign}(i,j)^{L(\tau,\rho)}$, $(i,j) \in U_R$, а из соотношения (17) согласно формуле (11): $l_W = -\Lambda_W^{-1} \Lambda_N l_N$.

Запишем производную целевой функции по допустимому направлению:

$$\frac{\partial f(x)}{\partial l} = \frac{\widetilde{\Delta}'_N l_N}{q(x)}.$$

КРИТЕРИЙ ОПТИМАЛЬНОСТИ

Теорема **(критерий оптимальности).** Для оптимальности опорного потока $\{x, U_K\}$ достаточно, а в случае невырожденности и необходимо выполнение соотношений

$$\begin{gathered} \widetilde{\Delta}^{(\tau,\rho)} \ge 0,\ \text{при}\ x_{\tau\rho} = d_{\tau\rho}^*, \\ \widetilde{\Delta}^{(\tau,\rho)} \le 0,\ \text{при}\ x_{\tau\rho} = d_{*\tau\rho}, \\ \widetilde{\Delta}^{(\tau,\rho)} = 0,\ \text{при}\ d_{*\tau\rho} < x_{\tau\rho} < d_{\tau\rho}^*,\ (\tau,\rho) \in U_N. \end{gathered} \tag{18}$$

ПОСТРОЕНИЕ ИТЕРАЦИИ

Пусть опорный поток $\{x, U_K\}$ не является оптимальным потоком, т. е. нарушаются условия критерия оптимальности (18). Тогда строится новый опорный поток $\{\overline{x}, \overline{U}_K\}$: $\overline{x} = x + \theta l$, $\overline{x} - x = \Delta x = \theta l$, где θ – шаг, l – допустимое направление [1].

Согласно принципу, лежащему в основе метода, направление l следует выбирать так, чтобы на итерациях целевая функция была неубывающей функцией, т. е. $\Delta f = f(\bar{x}) - f(x) \geq 0$. Тогда

$$\Delta f = \frac{\theta \widetilde{\Delta}'_N l_N}{\sum\limits_{(\tau,\rho)\in U\setminus U_R} x_{\tau\rho}\Delta_q^{(\tau,\rho)} + \sum\limits_{(\tau,\rho)\in U\setminus U_R} \Delta x_{\tau\rho}\Delta_q^{(\tau,\rho)} + Q + \gamma} \geq 0 .$$

Таким образом, так как шаг $\theta > 0$ и по предположению $q(x + \Delta x) > 0$, то направление l должно удовлетворять неравенству

$$\widetilde{\Delta}'_N l_N \geq 0 , \tag{19}$$

т. е. быть направлением возрастания целевой функции. Следовательно, при построении итерации направление l должно быть и допустимым, и направлением возрастания целевой функции. Такое направление называется подходящим.

В качестве подходящего направления l для потока x выбирается вектор, вдоль которого производная целевой функции по допустимому направлению достигает максимального значения при симплексной нормировке:

$$\sum_{(i,j)\in U_N} \left| l_{ij} \right| = 1 . \tag{20}$$

Из условия (14) для потока $\bar{x}$: $d_{*ij} \leq x_{ij} + \theta l_{ij} \leq d_{ij}^*$, $(i, j) \in U$, $\forall \theta \in \left[0, \theta^0\right]$, получаем: $l_{ij} \geq 0$, если $x_{ij} = d_{*ij}$ и $l_{ij} \leq 0$, если $x_{ij} = d_{ij}^*$, $(i, j) \in U_N$. В силу невыполнения критерия оптимальности максимальное значение производной целевой функции по допустимому направлению при нормировочном условии (20) $\max \dfrac{\partial f(x)}{\partial l} = \max \dfrac{\widetilde{\Delta}'_N l_N}{q(x)}$ достигается на дуге $(\tau_0, \rho_0) \in U_N$, которая находится из условия:

$$\left|\widetilde{\Delta}^{(\tau_0,\rho_0)}\right| = \max_{(\tau,\rho)\in U_N} \left\{ \max_{x_{\tau\rho} = d_{*\tau\rho}} \widetilde{\Delta}^{(\tau,\rho)},\ \max_{x_{\tau\rho} = d^*_{\tau\rho}} -\widetilde{\Delta}^{(\tau,\rho)},\ \max_{d_{*\tau\rho} < x_{\tau\rho} < d^*_{\tau\rho}} \left|\widetilde{\Delta}^{(\tau,\rho)}\right| \right\}. \tag{21}$$

В силу (21) компоненты подходящего направления, доставляющего максимум производной $\dfrac{\partial f(x)}{\partial l}$ при нормировочном условии (20), равны:

$$\begin{gathered} l_{\tau_0\rho_0} = \operatorname{sign} \widetilde{\Delta}^{(\tau_0,\rho_0)},\ l_{\tau\rho} = 0, (\tau, \rho) \in U_N \setminus (\tau_0, \rho_0); \\ l_{\xi\eta} = R^{\zeta\eta}_{\tau_0\rho_0} l_{\tau_0\rho_0},\ (\xi, \eta) \in U_W; \\ l_{ij} = \sum_{(\xi,\eta)\in U_W} l_{\xi\eta} \operatorname{sign}(i, j)^{L(\xi,\eta)} + l_{\tau_0\rho_0} \operatorname{sign}(i, j)^{L(\tau_0,\rho_0)},\ (i, j) \in U_R , \end{gathered} \tag{22}$$

где $R_{\tau_0\rho_0} = \left(R^{\zeta\eta}_{\tau_0\rho_0}, (\xi, \eta) \in U_W\right)$ – столбец матрицы $R = -\Lambda_W^{-1}\Lambda_N$, соответствующий дуге $(\tau_0, \rho_0) \in U_N$.

Так как по предположению $q(x) > 0$, $\forall x \in X$, то при этом справедливо неравенство

$$\frac{\partial f(x)}{\partial l} = \frac{l_{\tau_0\rho_0}\widetilde{\Delta}^{(\tau_0,\rho_0)}}{q(x)} = \frac{\widetilde{\Delta}^{(\tau_0,\rho_0)}\operatorname{sgn}\widetilde{\Delta}^{(\tau_0,\rho_0)}}{q(x)} = \frac{\left|\widetilde{\Delta}^{(\tau_0,\rho_0)}\right|}{q(x)} > 0.$$

Дробно-линейная функция обладает следующим свойством: если вдоль выбранного направления знаменатель $q(x)$ дробно-линейной функции $f(x)$ не меняет знак, то функция $f(x)$ вдоль этого направления меняется монотонно. Из этого свойства получаем, что вдоль построенного направления (22) будем двигаться до тех пор, пока не достигнем границы множества потоков X. Для этого найдем максимально допустимый шаг θ°, при котором вектор $\overline{x} = x + \theta^\circ l = \{x_{ij} + \theta^\circ l_{ij}, (i, j) \in U\}$ – поток, т. е. выполняются условия (12) – (14).

Из соотношений (22) следует, что условия (12) – (13) выполняются для любых $\theta^\circ > 0$. Из (22) и (14) следует, что:

$$\theta^\circ = \min\{\theta_{\tau_0\rho_0}, \theta_{\tau_1\rho_1}, \theta_{\tau_2\rho_2}\}, \text{ где } \theta_{\tau_1\rho_1} = \min\{\theta_{ij}, (i, j) \in U_R\},$$

$$\theta_{\tau_2\rho_2} = \min\{\theta_{ij}, (i, j) \in U_W\};$$

$$\theta_{ij} = \frac{d^*_{ij} - x_{ij}}{l_{ij}}, \text{ при } l_{ij} > 0;$$

$$\theta_{ij} = \frac{d_{*ij} - x_{ij}}{l_{ij}}, \text{ при } l_{ij} < 0;$$

$$\theta_{ij} = \infty, \text{ при } l_{ij} = 0, (i, j) \in U_K \cup (\tau_0, \rho_0).$$

Если $\theta^\circ = \theta_{\tau_0\rho_0}$, то опора не меняется, т. е. $\overline{U}_K = U_K$; в противном случае происходит замена опоры $\overline{U}_K = (U_K \setminus (\tau_1, \rho_1)) \cup (\tau_0, \rho_0)$, где $(\tau_1, \rho_1) \in U_R$, если $\theta^\circ = \theta_{\tau_1\rho_1}$ и $(\tau_1, \rho_1) \in U_W$, если $\theta^\circ = \theta_{\tau_2\rho_2}$.

Пример. Рассмотрим дробно-линейную сетевую задачу с дополнительными ограничениями:

$$f(x) = \frac{2x_{14} - x_{21} + 3x_{23} - 4x_{34} + 8x_{42} - 5x_{45} - x_{53} - 1}{x_{14} - 3x_{23} + 2x_{25} - x_{42} - 4x_{51} + 10x_{53} + 3} \to \max,$$

$$\begin{cases} x_{14} - x_{21} - x_{51} = 2, \\ x_{21} + x_{23} + x_{25} - x_{42} = 4, \\ x_{34} - x_{23} - x_{53} = -2, \\ x_{42} + x_{45} - x_{14} - x_{34} = -1, \\ x_{51} + x_{53} - x_{25} - x_{45} = -3, \end{cases}$$

$$
\begin{cases}
x_{14}+2x_{21}-x_{25}+3x_{34}+5x_{42}-2x_{45}=2,\\
-x_{14}+3x_{23}+x_{25}-4x_{42}+2x_{51}+5x_{53}=10,\\
x_{21}-x_{25}+2x_{34}+x_{45}+3x_{51}=-4,
\end{cases}
$$

$$
-2\le x_{14}\le 5,\ -4\le x_{21}\le 2,\ -3\le x_{23}\le 3,\ 1\le x_{25}\le 8,\ -5\le x_{34}\le 5,
$$

$$
-3\le x_{42}\le 1,\ -6\le x_{45}\le 4,\ -3\le x_{51}\le 0,\ 1\le x_{53}\le 6.
$$

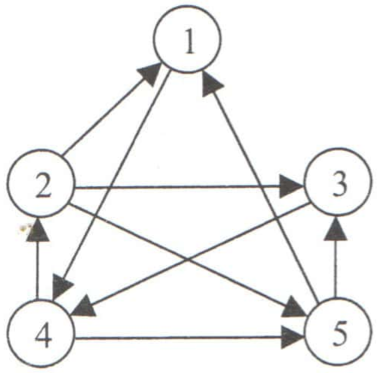

Рис. 1. Сеть задачи

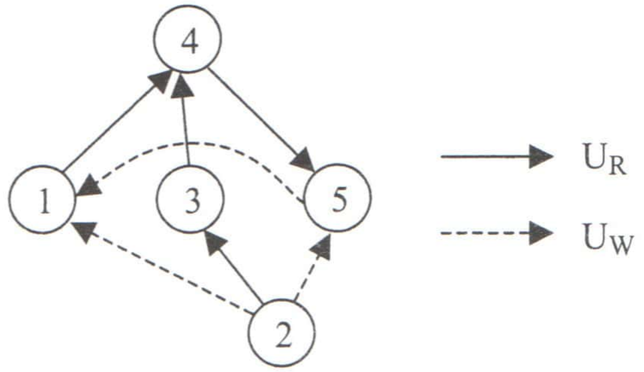

Рис. 2. Начальная опора задачи

На рис. 1 изображена сеть задачи $S=\{I,U\}$: $I=\{1, 2, 3, 4, 5\}$, $|I|=m=5$; $U=\{(1,4), (2,1), (2,3), (2,5), (3,4), (4,2), (4,5), (5,1), (5,3)\}$, $|U|=n=9$. Знаменатель целевой функции положителен для любого потока *x*, удовлетворяющего прямым ограничениям. В качестве начальной опоры задачи выберем сеть, представленную на рис. 2, тогда: $U_R=\{(1,4), (2,3), (3,4), (4,5)\}$; $U_W=\{(2,1), (2,5), (5,1)\}$, $U_N=\{(4,2), (5,3)\}$; а в качестве начального приближения − вектор $\overset{\circ}{x}=(1, 1, 1, 2, 1, 0, 1, -2, 2)$, удовлетворяющий всем ограничениям задачи. Итерации метода представлены в таблице.

Итерации метода для дробно-линейной сетевой задачи

Дуги	(1, 4)	(2, 1)	(2, 3)	(2, 5)	(3, 4)	(4, 2)	(4, 5)	(5, 1)	(5, 3)	$f(x)$	+/-
x_{ij}	1^*	1^*	1^*	2^*	1^*	0	1^*	-2^*	2	−0.(24)	
$\Delta^{(i,j)}$	–	–	–	–	–	**15.7025**	–	–	−1.0		$\Delta^{(4,2)}$
Критерий / выполнение						= 0 / –			= 0 / –		
l_{ij}	0.9545	−1.1818	−0.75	2.9318	−0.75	1.0	−0.7954	2.1363	0		
θ_{ij}	4.1905	4.2308	5.(3)	2.0465	8.0	1.0	8.8	**0.9362**	∞		θ_{51}
x_{ij}	1.8936^*	-0.1064^*	0.2979^*	4.7447^*	0.2979^*	0.9362^*	0.2553^*	0.0	2.0	0.2092	
$\Delta^{(i,j)}$	–	–	–	–	–	–	–	7.4510	**−8.4510**		$\Delta^{(5,3)}$
Критерий / выполнение								≥ 0 / +	= 0 / –		
l_{ij}	−1.0	−1.0	1.5	−0.5	0.5	0.0	−0.5	0.0	−1.0		
θ_{ij}	3.8936	3.8936	1.8014	7.4894	9.4043	∞	12.5106	∞	**1.0**		θ_{53}
$\boldsymbol{x_{ij}}$	0.8936^*	-1.1064^*	1.7979^*	4.2447^*	0.7979^*	0.9362^*	-0.2447^*	0.0	1.0	**0.7356**	
$\Delta^{(i,j)}$								7.5686	−17.1372		
Критерий / выполнение								≥ 0 / +	≤ 0 / +		

* – опорные дуги для каждой итерации.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Альсевич В. В., Габасов Р., Глушенков В. С.* Оптимизация линейных экономических моделей: Статические задачи: Учеб. пособие. Мн.: БГУ, 2000.
2. *Габасов Р., Кириллова Ф. М.* Методы линейного программирования. Ч. 3: Специальные задачи. Мн.: БГУ, 1980.
3. *Иванчев Д.* Мрежова оптимизация. София: Херон Пресс, 2002.
4. *Пилипчук Л. А.* Алгоритмы решения больших разреженных линейных систем в экстремальных распределительных задачах // Информационные системы и технологии (IST' 2002): Материалы I Междунар. науч. конф. Мн., 2002.
5. *Пилипчук Л. А.* Решение разреженных систем линейных уравнений в задачах сетевой оптимизации // Третьи научные чтения по обыкновенным дифференциальным уравнениям: Тезисы докл. междунар. науч. конф. Мн., 2001.
6. *Pilipchuk L. A.* Network optimization problems // Applications of Mathematics in Engineering and Economics '27 / eds. D. Ivanchev and M. D. Todorov. Sofia: Heron Press, 2002.
7. *Pilipchuk L. A., Malakhouskaya Y. V., Kincaid D. R., Lai M.* Algorithms of solving large sparse undetermined systems with embedded network structure // East-West J. of Mathematics. 2002. Vol. 4, № 2. P. 191–202.