

ЗАДАЧА ОПТИМАЛЬНОГО РАСПОЛОЖЕНИЯ СЕНСОРОВ В УЗЛАХ НЕКОТОРЫХ СПЕЦИАЛЬНЫХ ГРАФОВ

Л. А. Пилипчук

Белорусский государственный университет

Минск, Беларусь

e-mail: pilipchuk@bsu.by

Рассматривается задача оптимального расположения сенсоров в узлах некоторых специальных графов. Применяется теория графов, методы декомпозиции потоков и современные достижения в технологии построения численных решений разреженных недоопределенных систем линейных алгебраических уравнений.

Ключевые слова: трафик; задача расположения сенсоров; полный граф; граф-звезда; граф Халина.

THE OPTIMAL SENSORS LOCATION PROBLEM IN THE NODES OF SOME SPECIAL GRAPHS

L. A. Pilipchuk

Belarusian State University

Minsk, Belarus

The optimal sensors location problem in the nodes of some special graphs is considered. Applied graph theory, decomposition methods for flows and recent advances in the technology of construction of numerical solutions of sparse underdetermined system of linear algebraic equations.

Keywords: traffic; sensors location problem; the complete graph; star-graph; Halin's graph.

Задача оптимального расположения сенсоров в узлах графа с целью оценки трафика его ненаблюдаемой части имеет важные приложения в теории транспортных систем и логистики. При математическом моделировании процесса трафика применяются методы разреженного численного анализа [1] для оценки его параметров на ненаблюдаемой части графа. Для описания модели процесса трафика используется система уравнений или неравенств, представляющая собой совокупность элементов, находящихся в структурной взаимосвязи друг с другом и образующих определенную целостность. Такого рода системы могут быть представлены в матричной или сетевой форме, при этом матрица системы является прямоугольной и разреженной. Применение общих методов к построению численных решений такого рода систем требует большого количества ресурсов, что особенно существенно при возрастании размерности задачи. Для решения задачи оптимального расположения сенсоров в узлах графа с целью оценки трафика на его ненаблюдаемой части используется аппарат теории гра-

фов, результаты, полученные в теории потоков, и современные достижения в технологии построения численных решений разреженных недоопределенных систем линейных алгебраических уравнений с применением методов декомпозиции [1].

Рассмотрим проблему оптимального расположения датчиков (сенсоров) в узлах сети для оценки потоков на ее ненаблюдаемой части. В большинстве случаев наблюдение за потоками в больших сетях ведется лишь за малой ее частью. Поскольку установка сенсоров в каждом узле сети требует большого количества ресурсов, необходимо разработать оптимальную стратегию расположения датчиков для оценки трафика ненаблюдаемой части сети.

Различают два типа датчиков: *активные* и *пассивные*. *Активные* датчики – это класс датчиков, которые получают информацию о трафике в сети, затем обрабатывают ее определенным образом. *Пассивные* датчики (счетные и видеодатчики) – это класс датчиков, которые определяют значения дуговых потоков, если они установлены на дугах. Если пассивный датчик установлен в узле, то он определяет значение дугового потока каждой дуги, исходящей и входящей в данный узел, а также значение интенсивности узла, в котором установлен датчик.

Опишем задачу математического моделирования процесса оценки трафика на ненаблюдаемой части графа. Рассмотрим связный конечный ориентированный граф $G = (I, U)$ с множеством узлов I и множеством дуг U . Обозначим через x_{ij} дуговой поток дуги $(i, j) \in U$. Дуговой поток x_{ij} дуги $(i, j) \in U$ необязательно совпадает с дуговым потоком x_{ji} дуги $(j, i) \in U$. Чтобы подчеркнуть эту разницу, ориентированный граф $G = (I, U)$ назовем двунаправленным. Введем подмножество $I^* \subseteq I$ узлов множества I . В узлах из множества I^* поток создается или поглощается. Узлы $i \in I^*$ назовем узлами с переменной интенсивностью x_i . Основой для моделирования процесса трафика является система линейных алгебраических уравнений следующего вида:

$$\sum_{j \in I_i^+(U)} x_{ij} - \sum_{j \in I_i^-(U)} x_{ji} = \begin{cases} x_i, & i \in I^*, \\ 0, & i \in I \setminus I^*, \end{cases} \quad (1)$$

где $I_i^+(U) = \{j \in I : (i, j) \in U\}$, $I_i^-(U) = \{j \in I : (j, i) \in U\}$. Система (1) совместна, поскольку является однородной системой линейных алгебраических уравнений. В результате суммирования уравнений системы получим, что выполняется условие: $\sum_{i \in I^*} x_i = 0$. Если $I^* \neq \emptyset$, то для связного графа G ранг матрицы системы (1) равен $|I|$.

Если $I^* = \emptyset$, то ранг матрицы системы (1) для связного графа G равен $|I| - 1$ [1].

Обозначим через M множество узлов, в которые установлены датчики (обозреваемые узлы). Для любого обозреваемого узла $i \in M$ дуговые потоки определены для всех входящих и исходящих дуг: $x_{ij} = f_{ij}$, $j \in I_i^+(U)$, $x_{ji} = f_{ji}$, $j \in I_i^-(U)$, $i \in M$. Также известны значения переменных интенсивностей $x_i = f_i$, $i \in M \cap I^*$. Доля (вероятность) p_{ij} общего потока $\sum_{j \in I_i^+(U)} x_{ij}$, исходящего из узла $i \in I$, который проходит по

дуге (i, j) , вычисляется следующим образом: $p_{ij} = \frac{x_{ij}}{\sum_{j \in I_i^+(U)} x_{ij}}$. Итак, $x_{i,j} = p_{i,j} \sum_{j \in I_i^+(U)} x_{ij}$. Вы-

берем любую дугу (i, v_i) , исходящую из узла i , если для узла $i \in I$ выполняется соотношение $|I_i^+(U)| \geq 2$. Тогда можно выразить дуговые потоки для всех дуг, исходящих из узла i (за исключением дуги (i, v_i)), через дуговой поток x_{i,v_i} следующим образом:

$$x_{i,j} = \frac{p_{i,j}}{p_{i,v_i}} x_{i,v_i}, j \in I_i^+(U) \setminus v_i. \quad (2)$$

Соотношения (2) выполняются для каждого узла i при условии $|I_i^+(U)| \geq 2$. Дуговые потоки известны априори для всех дуг, инцидентных узлам, в которых установлены сенсоры. Выберем любую дугу (i, v_i) , $|I_i^+(U)| \geq 2$, исходящую из узла i , для которой дуговой поток определен: $x_{i,v_i} = f_{i,v_i}$. Из (2) определим значения дуговых потоков для дуг, исходящих из узла i (за исключением дуги (i, v_i)), через известный дуговой поток $x_{i,v_i} = f_{i,v_i}$. Подставим известные значения дуговых потоков и известные значения переменных интенсивностей обозреваемых узлов $i \in M \cap I^*$ в систему (1). Удалим из графа $G = (I, U)$ те дуги, для которых известны дуговые потоки. Также удалим из графа $G = (I, U)$ множество обозреваемых узлов M . Таким образом, получим новый граф $\bar{G} = (\bar{I}, \bar{U})$ с множеством узлов $\bar{I}$ и множеством дуг $\bar{U}$. Пусть $\bar{I}^*$ – множество узлов с переменной интенсивностью графа $\bar{G} = (\bar{I}, \bar{U})$, где $\bar{I}^* = I^* \setminus (M \cap I^*)$. Новый граф $\bar{G} = (\bar{I}, \bar{U})$ может быть несвязным. Некоторые компоненты связности графа $\bar{G} = (\bar{I}, \bar{U})$ могут не содержать узлов из множества $\bar{I}^*$. Система (1) – (2) для нового графа $\bar{G} = (\bar{I}, \bar{U})$ примет вид:

$$\sum_{j \in I_i^+(U)} x_{ij} - \sum_{j \in I_i^-(U)} x_{ji} = \begin{cases} x_i + b_i, i \in \bar{I}^*, \\ b_i, i \in \bar{I} \setminus \bar{I}^*, \end{cases} \quad (3)$$

$$\sum_{(i,j) \in \bar{U}} \lambda_{ij}^k x_{ij} = 0, k = \overline{1, q}, \quad (4)$$

где $x = (x_{ij}, (i, j) \in \bar{U}; x_i, i \in \bar{I}^*)$ – вектор неизвестных системы (3) – (4), q – число уравнений вида (2), a_i, b_i, λ_{ij}^k – параметры системы (3) – (4).

Таким образом, задачу определения минимального числа пассивных датчиков и их местоположение в узлах исходного графа $G = (I, U)$ можно сформулировать следующим образом: *какое минимальное число $|M|$ узлов графа $G = (I, U)$ необходимо включить в множество M обозреваемых узлов, $M \subseteq I$, чтобы система (3) – (4) имела единственное решение.*

Система (3) – (4) имеет единственное решение для заданного множества обозреваемых узлов M , если ранг матрицы системы равен числу ее неизвестных. В [2]

исследованы комбинаторные свойства задачи определения минимального числа датчиков в узлах графа. В [3–5] разработаны методы решения систем вида (3) – (4), которые основываются на применении эффективных технологий и алгоритмов декомпозиции с учетом специфики опоры графа $\bar{G} = (\bar{I}, \bar{U})$ и ее теоретико-графовых свойств. В данной работе рассматривается задача оптимального расположения сенсоров в узлах некоторых специальных графов для оценки дуговых потоков и переменных интенсивностей узлов на его ненаблюдаемой части.

Полный граф – простой граф, в котором каждая пара вершин смежна. Полный граф с n вершинами имеет $n(n-1)/2$ ребер и является регулярным графом степени $n-1$. Пример полного графа с шестью вершинами приведен на рис. 1. Для построения полного графа для заданного количества вершин n в *Wolfram Mathematica* используется функция *CompleteGraph[n]*.

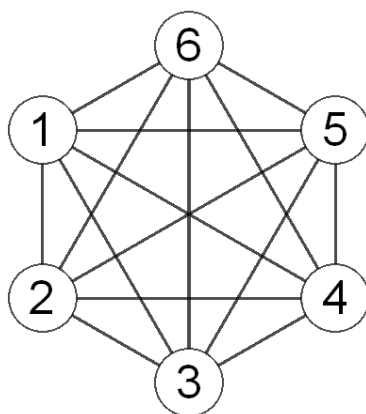


Рис. 1. Полный граф $G = (I, U), |I| = 6$

Графом Халина называется некоторый вид планарного графа, который строится из дерева, имеющего по меньшей мере 4 вершины, ни одна из которых не имеет в точности двух соседей. Дерево представлено на плоскости так, что никакие ребра не пересекаются, затем добавляются ребра, соединяющие все его листья в цикл. Пример графа Халина с восемью вершинами приведен на рис. 2. В *Wolfram Mathematica* для построения графа Халина для заданного количества вершин n используется функция *WheelGraph[n]*.

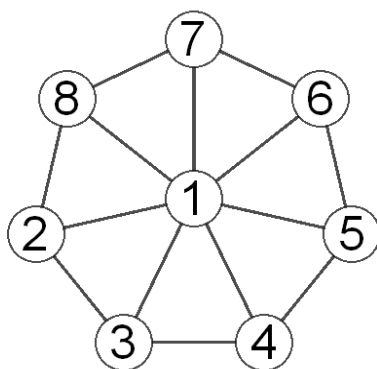


Рис. 2. Граф Халина $|I| = 8$

Определим минимальное число пассивных датчиков и их местоположение в узлах графа Халина. Поскольку в графе Халина для любых двух вершин существует ребро, то достаточно разместить один сенсор в произвольную вершину.

Граф-звезда S_k – это полный двудольный граф $K_{1,k}$: дерево с одним внутренним узлом и k листьями. Пример графа-звезды для восьми вершин приведен на рис. 3.

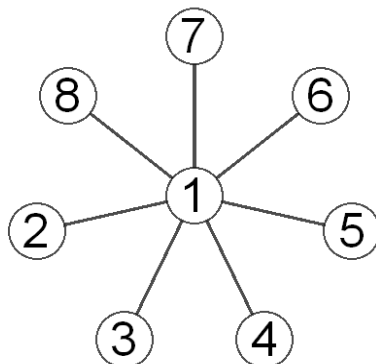


Рис. 3. Граф-звезда для восьми вершин

В *Wolfram Mathematica* для построения графа-звезды для заданного количества вершин n используется функция *StarGraph[n]*. Определим минимальное число пассивных датчиков и их местоположение в узлах графа-звезды. Достаточно разместить один сенсор в произвольную вершину графа-звезды.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЕ ССЫЛКИ

1. Пилипчук Л. А. Разреженные недоопределенные системы линейных алгебраических уравнений. Минск : БГУ, 2012.
2. Bianco L., Confessore G., Gentili M. Combinatorial Aspects of the Sensor Location Problem // *Annals of Operation Research*. 2006. Vol. 144 (1). P. 201–234.
3. Пилипчук А. С. Расположение минимального числа обозреваемых узлов в обобщенном графе для оценки трафика его ненаблюдаемой части // *Вестн. Белорус. гос. ун-та*. 2015. Сер. 1, Физика. Математика. Информатика. № 1. С. 108–111.
4. Pilipchuk L. A., German O. V., Pilipchuk A. S. The general solutions of sparse systems with rectangular matrices in the problem of sensors optimal location in the nodes of a generalized graph // *Vestnik BSU*. 2015. Ser. 1: Fizika. Matematika. Informatika. № 2. P. 91–96.
5. Pilipchuk L. A. *Sparse Linear Systems and Their Applications*. Minsk : BSU, 2013.