О ХАРАКТЕРИЗАЦИИ И РАСПОЗНАВАНИИ ГРАФОВ ПЕРЕСЕЧЕНИЙ РЕБЕР 3-ХРОМАТИЧЕСКИХ ГИПЕРГРАФОВ КРАТНОСТИ НЕ ВЫШЕ 2 В КЛАССЕ РАСЩЕПЛЯЕМЫХ ГРАФОВ

Т. В. Лубашева, Ю. М. Метельский

Белорусский государственный университет
Минск, Беларусь
e-mail: lubasheva_t@mail.ru, metelsky@bsu.by

Доказано, что для класса графов пересечений ребер 3-хроматических гиперграфов кратности не выше 2 существует конечная характеризация в терминах запрещенных порожденных подграфов в классе расщепляемых графов.

Ключевые слова: граф пересечений ребер гиперграфа; запрещенный порожденный подграф; характеризация.

ON CHARACTERIZATION AND RECOGNITION OF EDGE INTERSECTION GRAPHS OF 3-CHROMATIC HYPERGRAPHS WITH MULTIPLICITY AT MOST 2 IN THE CLASS OF SPLIT GRAPHS

T. V. Lubasheva, Y. M. Metelsky

Belarusian State University
Minsk, Belarus

It is proved that there exists a finite characterization in terms of forbidden induced subgraphs for the class of edge intersection graphs of 3-chromatic hypergraphs with multiplicity at most 2 in the class of split graphs.

Keywords: edge intersection graph; forbidden induced subgraph; characterization.

ВВЕДЕНИЕ

В работе рассматриваются конечные, неориентированные графы без петель и кратных ребер. Множество вершин и множество (семейство) ребер графа (гиперграфа) G обозначаются через $V(G)$ и $E(G)$ соответственно. Если $N(v) = N_G(v)$ − окружение вершины v в графе G, то $\deg(v) = \deg_G(v) = |N(v)|$ − степень вершины v; если $X \subseteq V(G)$, то $G(X)$ − подграф, порожденный множеством X. Далее $\chi(G)$ обозначает хроматическое число графа G.

Граф $\Omega(F)$ *пересечений семейства* $F = (S_1, S_2, \ldots, S_n)$ непустых множеств определяется условиями:

1) $V(\Omega(F)) = F$;

2) вершины S_i и S_j, $i \neq j$, смежны в $\Omega(F)$, если и только если $S_i \cap S_j \neq \varnothing$.

Граф $L(H)$ *пересечений ребер гиперграфа* H определяется как граф пересечений $\Omega(E(H))$. Другими словами, вершины графа $L(H)$ биективно соответствуют ребрам гиперграфа H и две вершины в графе $L(H)$ смежны тогда и только тогда, когда соответствующие ребра гиперграфа H пересекаются. Известно, что каждый граф является графом пересечений ребер некоторого гиперграфа.

Гиперграф H называется k-*хроматическим*, если существует разбиение $V(H) = V_1 \cup V_2 \cup \ldots \cup V_l$ множества его вершин на $l \leq k$ цветных классов V_i такое, что каждое ребро гиперграфа содержит не более одной вершины из каждого цветного класса. В [1] класс графов пересечений ребер 2-хроматических гиперграфов охарактеризован посредством бесконечного списка запрещенных порожденных подграфов. Существование полиномиального алгоритма распознавания графов из этого класса доказано в [2]. Там же доказано, что при фиксированном $k \geq 3$ задача распознавания графов пересечений ребер k-хроматических гиперграфов является NP-полной.

Кратностью гиперграфа называется максимальное число его ребер, содержащих пару вершин. Класс графов пересечений ребер k-хроматических гиперграфов кратности не выше m обозначим через $L^m(k)$. В [3] класс $L^1(2)$ охарактеризован посредством бесконечного списка запрещенных порожденных подграфов. Известно, что задача распознавания графов из $L^1(k)$ полиномиально разрешима при $k \leq 2$ и является NP-полной для любого фиксированного $k \geq 3$ [2]. Вопрос о сложности распознавания графов из класса $L^m(k)$ при фиксированных $k \geq 1$ и $m \geq 2$ на данный момент остается открытым.

Граф G называется *расщепляемым*, если существует разбиение множества его вершин $V(G) = C \cup S$ на клику C и независимое множество S (*биразбиение* (C, S)). В [4] доказано, что для любого k класс $L^1(k)$ может быть охарактеризован посредством конечного списка запрещенных порожденных подграфов в классе расщепляемых графов. В этой работе доказано, что для класса $L^2(3)$ существует конечная характеризация в терминах запрещенных порожденных подграфов в классе расщепляемых графов. Отсюда, в частности, вытекает полиномиальная разрешимость задачи распознавания графов из $L^2(3)$ в классе расщепляемых графов.

РЕЗУЛЬТАТЫ

Множество попарно смежных вершин графа называется *кликой*; *максимальная клика* максимальна относительно включения. Конечное семейство $Q = \{C_i\colon i \in I\}$ клик графа G называется *покрытием* этого графа, если каждая вершина и каждое ребро (как пара вершин) графа G содержатся в некоторой C_i, клики C_i – *кластеры* покрытия Q. Покрытие Q графа G называется k-*хроматическим*, если $\chi(\Omega(Q)) \leq k$, и m-*ограниченным*, если никакие два его кластера не имеют более чем m общих вершин.

Лемма 1 [5]. Граф G принадлежит классу $L^m(k)$ тогда и только тогда, когда существует m-ограниченное k-хроматическое покрытие этого графа.

Клику K графа назовем (k, m)-*большой*, если $|K| \geq m(k-1)^2 + 1$.

Лемма 2 (о большой клике). Любая максимальная (k, m)-большая клика графа G является кластером каждого его m-ограниченного k-хроматического покрытия.

Доказательство. Пусть $G \in L^m(k)$, а K – некоторая максимальная клика графа G, не являющаяся кластером некоторого m-ограниченного k-хроматического покрытия Q этого графа. Пусть далее $Q_1, Q_2, \ldots, Q_t$ – кластеры покрытия Q, которые имеют непустое пересечение с кликой K. Тогда семейство $A = (A_1, A_2, \ldots, A_t)$, где $A_i = Q_i \cap K$, $i = 1$, 2, …, t, является m-ограниченным k-хроматическим покрытием полного графа $G(K)$. Так как K – максимальная клика, то $K \neq A_i$ для любого $i = 1, 2, …, t$.

Рассмотрим произвольный кластер A_j, $j \in \{1, 2, …, t\}$ и вершину $v \in K \setminus A_j$. Поскольку K – клика, то вершина v смежна со всеми вершинами x кластера A_j в $G(K)$. Так как A – m-ограниченное k-хроматическое покрытие графа $G(K)$, то ребра вида vx, где $x \in A_j$, покрываются не более чем $k - 1$ кластерами, отличными от A_j, каждый из которых имеет с A_j не более чем m общих вершин. Таким образом, $|A_j| \le m(k-1)$ для любого $j = 1, 2, …, t$.

Далее рассмотрим пару кластеров A_i и A_j покрытия A таких, что $A_i \cap A_j \neq \varnothing$. Для любой вершины $u \in A_i \setminus A_j$ ребра ux, где $x \in A_j \setminus A_i$, (если таковые существуют) не принадлежат кластерам A_i и A_j. Так как A – m-ограниченное k-хроматическое покрытие графа $G(K)$, то ребра вида ux, где $x \in A_j \setminus A_i$, покрываются не более чем $k - 2$ кластерами из A. Каждый из этих кластеров пересекается с A_j не более чем по m вершинам. Отсюда получаем следующую оценку: $|A_j \setminus A_i| \le m(k-2)$.

И, наконец, рассмотрим произвольную вершину $w \in K$. Считаем, не ограничивая общности, что она принадлежит $s \le k$ кластерам $A_1, A_2, …, A_s$. Из вышесказанного вытекает следующая цепочка соотношений:

$$\begin{aligned}|K| &= |A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_s| = |A_1| + |A_2 \setminus A_1| + |A_3 \setminus (A_1 \cup A_2)| + \ldots + \\ &+ |A_s \setminus (A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_{s-1})| \le m(k-1) + (s-1)m(k-2) \le \\ &\le m(k-1) + (k-1)m(k-2) = m(k-1)(1+(k-2)) = m(k-1)^2.\end{aligned}$$

Таким образом, $|K| \le m(k-1)^2$, что и доказывает лемму.

Далее будем рассматривать класс $L^2(3)$.

С использованием лемм 1 и 2 доказаны следующие утверждения.

Теорема 1. Пусть G – расщепляемый граф с биразбиением (C, S) таким, что C – максимальная клика и $|C| \ge 9$. Тогда $G \in L^2(3)$, если и только если выполнены условия:

1) $|N_S(v)| \le 2$ для любой вершины $v \in C$;
2) $\deg v \le 4$ для любой вершины $v \in S$.

Теорема 2. В классе расщепляемых графов существует конечная характеризация класса $L^2(3)$ в терминах запрещенных порожденных подграфов.

Следствие. Задача распознавания графов из класса $L^2(3)$ полиномиально разрешима в классе расщепляемых графов.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЕ ССЫЛКИ

1. Тышкевич Р. И., Урбанович О. П. Графы с матроидным числом 2 // Весці АН БССР. Сер. фіз.- мат. навук. 1989. № 3. С. 13–17.
2. Метельский Ю. М., Тышкевич Р. И. Пересечения матроидов и реберные гиперграфы // Тр. Ин-та математики НАН Беларуси. 2005. Т. 13, № 2. С. 44–54.
3. Harary F., Holzmann C. Line graphs of bipartite graphs // Rev. Soc. Mat. Chile. 1974. Vol. 1. P. 19–20.
4. Бабайцев А. Ю., Тышкевич Р. И. Линейная размерность расщепляемых графов // Весці НАН Беларусі. Сер. фіз.- мат. навук. 1999. № 1. С. 112–115.
5. Berge C. Hypergraphs. Combinatorics of finite sets. Amsterdam; N.-Y.; Oxford; Tokyo : North-Holland, 1989.