

СЛОЖНОСТЬ ЗАДАЧИ О НЕЗАВИСИМОМ ДОМИНИРУЮЩЕМ МНОЖЕСТВЕ В КЛАССЕ КУБИЧЕСКИХ ПЛАНАРНЫХ ДВУДОЛЬНЫХ ГРАФОВ

Я. А. Ловеров

Белорусский государственный университет

Минск, Беларусь

e-mail: y.loverov@gmail.com

Доказывается NP-полнота задачи о независимом доминирующем множестве в классе кубических планарных двудольных графов.

Ключевые слова: независимое доминирующее множество; двудольный граф; кубический граф; планарный граф; NP-полнота.

THE COMPLEXITY OF THE INDEPENDENT DOMINATING SET PROBLEM WITHIN THE CLASS OF CUBIC PLANAR BIPARTITE GRAPHS

Y. A. Loverov

Belarusian State University

Minsk, Belarus

We prove that the independent dominating set problem is NP-complete within the class of cubic planar bipartite graphs.

Keywords: independent dominating set; bipartite graph; cubic graph; planar graph; NP-completeness.

Стандартные понятия теории графов, не определяемые в работе, можно найти в [1, 3]. Пусть G – простой граф с множеством вершин $V = V(G)$ и множеством ребер $E = E(G)$.

Порядком графа G называется число его вершин. Порядок графа будем обозначать $|G|$. Подмножество всех вершин графа G , смежных с вершиной u , называется *окружением* вершины u и обозначается через $N_G(u)$ или просто $N(u)$; *замкнутым окружением* вершины u называется множество $N[u] = N(u) \cup \{u\}$.

Степенью $\deg u$ вершины u называется число вершин графа G , смежных с ней; очевидно, $\deg u = |N(u)|$. Через $\delta(G)$ и $\Delta(G)$ обозначим минимальную и максимальную степени вершин графа G соответственно. Граф G называется *k-регулярным*, если $\delta(G) = \Delta(G) = k$; 3-регулярные графы также называются *кубическими*.

Некоторое подмножество множества вершин графа называется *независимым*, если никакие две вершины из этого подмножества не смежны. Независимое множество называется *максимальным*, если оно не является собственным подмножеством некоторого другого независимого множества. Независимое множество называется *наибольшим*, если его мощность не меньше мощности любого другого независимого

множества графа. Мощность наибольшего независимого множества графа G называется *числом независимости* графа G и в данной работе обозначается $\alpha(G)$.

Некоторое подмножество множества вершин графа G называется *доминирующим*, если любая вершина графа G , не принадлежащая этому подмножеству, смежна хотя бы с одной вершиной из этого подмножества. Подмножество вершин графа G , являющееся одновременно независимым и доминирующим, называется *независимым доминирующим*. Отметим, что любое максимальное независимое множество является независимым доминирующим и наоборот [2]. Мощность наименьшего из максимальных независимых множеств графа G называется *числом независимого доминирования* графа G и в данной работе обозначается $i(G)$.

Сформулируем следующую задачу распознавания, связанную с параметром $i(G)$.
НЕЗАВИСИМОЕ ДОМИНИРУЮЩЕЕ МНОЖЕСТВО

Условие: Задан граф G и натуральное число k . *Вопрос:* Верно ли, что $i(G) \leq k$?

Известно, что задача НЕЗАВИСИМОЕ ДОМИНИРУЮЩЕЕ МНОЖЕСТВО является NP-полной в общем случае [4] и остается NP-полной для некоторых специальных классов графов, в частности для кубических планарных [6] и кубических двудольных графов [5]. В статье [5] также отмечено, что сложностной статус данной задачи в классе кубических двудольных планарных графов неизвестен.

Докажем, что задача НЕЗАВИСИМОЕ ДОМИНИРУЮЩЕЕ МНОЖЕСТВО является NP-полной в классе кубических планарных двудольных графов.

Пусть G – произвольный кубический планарный граф. Выберем в нем некоторую вершину v_i и пронумеруем инцидентные ей ребра $v_i v_j$, $v_i v_k$, $v_i v_m$ последовательными натуральными числами от 1 до 3 соответственно. Тогда ребро $v_i v_j$ можно обозначить через v_i^1 , ребро $v_i v_k$ — через v_i^2 , $v_i v_m$ — через v_i^3 . Проведем такую операцию для каждой вершины графа G . При этом ребро $v_i v_j$ не обязательно будет иметь один и тот же номер относительно обеих вершин, т. е. возможны ситуации, например, вида $v_i v_j = v_i^1 = v_j^3$.

По графу G построим граф H_G следующим образом. Каждая вершина v_i графа G переходит в двудольный планарный граф Q^i , изоморфный графу Q , изображенному на рис. 1. Каждый из графов Q^i будем называть *составной вершиной* графа H_G .

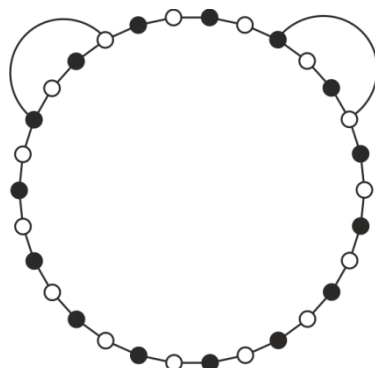


Рис. 1. Граф Q

Каждое ребро $v_i v_j$ графа G переходит в пару ребер графа H_G , соединяющую некоторую пару P вершин составной вершины Q^i с некоторой парой R вершин составной вершины Q^j . Пара P определяется по номеру ребра $v_i v_j$ относительно вершины v_i , пара

R аналогично определяется по номеру ребра $v_i v_j$ относительно вершины v_j . Данный переход для ребер $e_1 = v_i^1 = v_j^1$, $e_2 = v_i^2 = v_k^3$, $e_3 = v_i^3 = v_m^2$ проиллюстрирован на рис. 2.

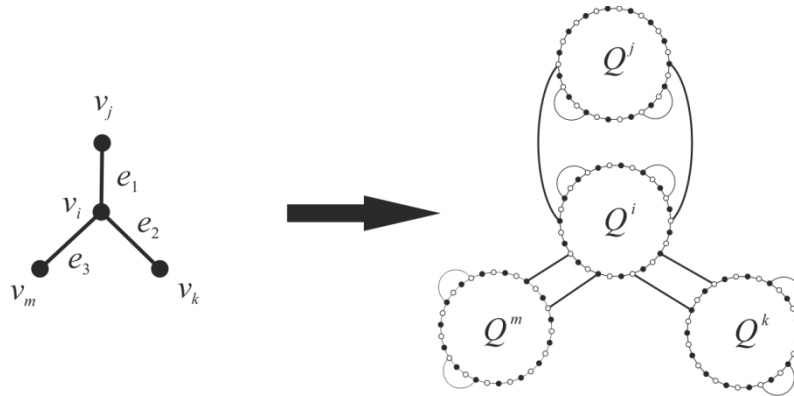


Рис. 2. Фрагмент графа H_G , соответствующий замкнутому окружению вершины v_i , где $e_1 = v_i^1 = v_j^1$, $e_2 = v_i^2 = v_k^3$, $e_3 = v_i^3 = v_m^2$

Отметим, что граф H_G , построенный по кубическому планарному графу G , является планарным двудольным графом.

Теорема 1. Пусть граф H_G построен по кубическому планарному графу G . Тогда выполнено равенство $i(H_G) = 11 \cdot |G| - \alpha(G)$.

Пусть G – произвольный граф, u, v – две его различные вершины. Добавим к графу G планарный двудольный граф B , изображенный на рис. 3, и ребра vb_1, ub_2 , где b_1 и b_2 – вершины графа B степени 2. Данную операцию назовем *вставкой* графа B (между вершинами u и v).

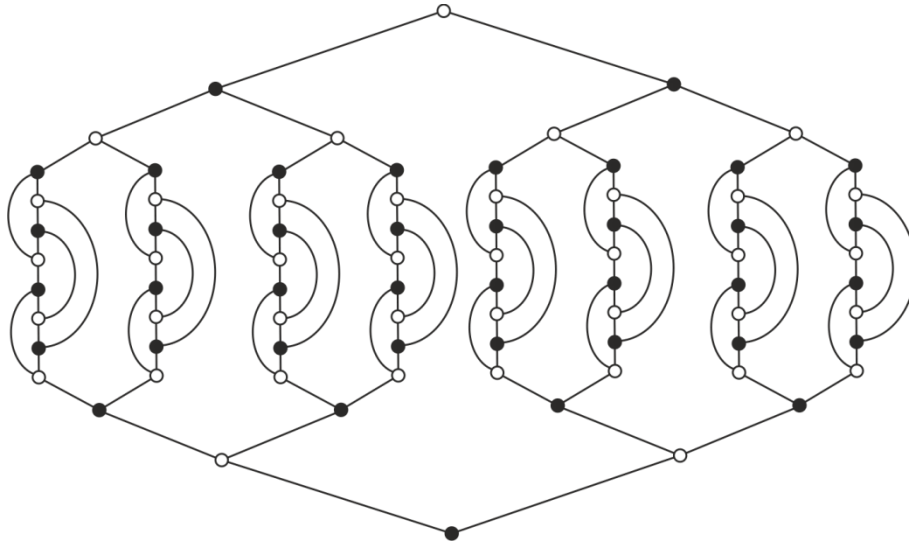


Рис. 3. Граф B

Теорема 2. Пусть граф M получается из графа G вставкой графа B . Тогда имеет место равенство $i(M) = i(G) + 20$.

Применим к каждой составной вершине графа H_G операции вставки графа B так, как схематично изображено на рис. 4. Полученный в результате граф обозначим M_G .

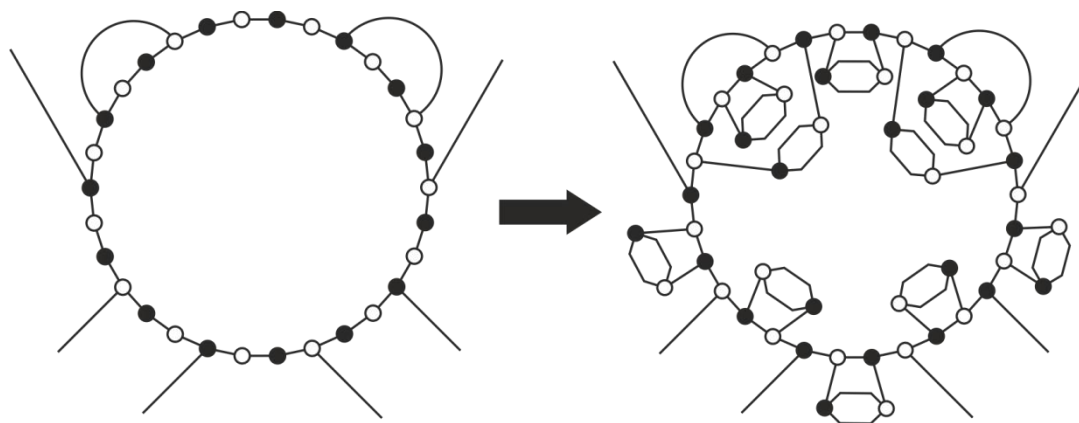


Рис. 4. Вставка графов B

Отметим, что граф M_G является кубическим планарным двудольным графом.

Теорема 3. Для графа M_G имеет место равенство $i(M_G) = 211 \cdot |G| - \alpha(G)$.

Поскольку граф M_G можно построить по графу G за полиномиальное от размерности последнего время, получаем следующий результат.

Теорема 4. Задача НЕЗАВИСИМОЕ ДОМИНИРУЮЩЕЕ МНОЖЕСТВО NP-полна в классе кубических планарных двудольных графов.

Таким образом, теорема 4 закрывает вопрос о сложности задачи НЕЗАВИСИМОЕ ДОМИНИРУЮЩЕЕ МНОЖЕСТВО в классе кубических планарных двудольных графов, поставленный в [5].

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЕ ССЫЛКИ

1. Емеличев В. А., Мельников О. И., Сарванов В. И., Тышкевич Р. И. Лекции по теории графов. М.: Наука, 1990.
2. Berge C. Graphs and Hypergraphs. Amsterdam, 1973.
3. Bondy J. A., Murty U. S. R. Graph theory. Berlin: Springer, 2008.
4. Garey M. R., Johnson D. S. Computers and Intractability: A Guide to the Theory of NP-Completeness. San Francisco: Freeman, 1979.
5. Liu C.-H., Poon S.-H., Lin J.-Y. Independent dominating set problem revisited // Theoret. Comput. Sci. 2015. Vol. 562. P. 1–22.
6. Manlove D. F. On the algorithmic complexity of twelve covering and independence parameters of graphs // Discrete Appl. Math. 1999. Vol. 91. P. 155–175.