ПОИСК МИНИМАЛЬНОГО ВЗВЕШЕННОГО ГАМИЛЬТОНОВА ЦИКЛА В МАТРОИДЕ

А. Н. Исаченко[1], Я. А. Исаченко[2]

[1]*Белорусский государственный университет*
Минск, Беларусь
e-mail: isachen@bsu.by
[2]*ООО «Икстет»*
Москва, Россия
e-mail: yarais@mail.ru

Приводятся результаты, касающиеся гамильтоновых матроидов, и рассматривается алгоритм поиска гамильтонова цикла минимального веса. Алгоритм является реализацией метода вервей и границ. Даются соответствующие определения и понятия.

Ключевые слова: матроид; цикл; гамильтонов цикл.

SEARCH FOR MINIMAL WEIGHTED HAMILTON CYCLE IN A MATROID

A. N. Isachenko[1], Y. A. Isachenko[2]

[1] *Belarusian State University*
Minsk, Belarus
[2]*IXTET LLC*
Moscow, Russia

This paper deals with same results about Hamilton matroids and considers search algorithm for minimal weighted Hamilton matroid cycle. Algorism is realization of branch and cut method. We also give appropriate definitions and notions.

Keywords: matroid; cycle; Hamilton cycle.

ВВЕДЕНИЕ

Матроид можно определить одной из по крайней мере двадцати двух криптоморфных систем аксиом, являющихся эквивалентными [1]. Каждая из систем формулируется на основе определенного понятия для матроида. Выбор конкретной системы аксиом зависит от контекста рассматриваемой задачи. Если, например, необходимо найти базу матроида минимального или максимального веса, то естественным является определение матроида аксиомами баз или аксиомами независимости. Кроме этого, на выбор системы аксиом влияют и сложностные аспекты рассматриваемой задачи. Сложность алгоритмов решения задач на матроидах принято оценивать по количеству обращений к оракулу, который соответствует понятию, в терминах которого определяется матроид. Системы аксиом для матроида эквивалентны в том смысле, что определение матроида некоторой системой аксиом дает возможность вывода всех остальных систем аксиом как необходимых и достаточных свойств матроида. С вычислительной точки зрения не все соответствующие системам аксиом оракулы являются эквивалентными. Здесь эквивалентность понимается в смысле получения результата однократного обращения к некоторому оракулу за полиномиальное число обращений к другому оракулу. Поскольку в настоящей статье рассматриваются циклы матроида, дадим определение матроида системой аксиом циклов, а используемые в статье матроидные понятия в терминах циклов.

Матроид – это пара $M = (S, \Sigma)$, где S – конечное множество элементов, а $\Sigma \subseteq 2^S$ – семейство, для которого выполняются следующие условия (аксиомы циклов):

(c1) если $C_1 , C_2 \in \Sigma$, $C_1 \neq C_2$, то $C_1 \not\subset C_2$;

(c2) если $C_1 , C_2 \in \Sigma$, $C_1 \neq C_2$, и $e \in C_1 \setminus C_2$, то для любого $x \in C_1 \cap C_2$ существует $C_3 \in \Sigma$ такое, что $e \in C_3 \subseteq (C_1 \cup C_2) \setminus x$.

Подмножества из Σ называют циклами матроида. Подмножества множества S , не содержащие циклов, считаются независимыми, содержащее – зависимы. Максимальные по включению независимые множества образуют семейство баз матроида. Для подмножества $A \in 2^S$ ранг $\rho (A)$ определяется как максимальная мощность независимых множеств, содержащихся в A. Ранг множества S считается рангом матроида. Элемент e называют петлей, если $\rho (e) = 0$. Элемент $e \in S \setminus A$ зависим от A, если имеет место равенство $\rho (A \cup e) = \rho (A)$, т. е. если при присоединении e к A образуется цикл. Замыкание $\sigma (A)$ – это объединение A со всеми зависимыми элементами.

Укажем определение матроида через аксиомы замыкания.

Матроид – это пара $M = (S, \sigma)$, где S конечное множество элементов, а σ – оператор ($\sigma : 2^S \rightarrow 2^S$) , удовлетворяющий следующим условиям:

(s1) $A \subseteq \sigma (A)$;

(s2) если $A, B \in 2^S$ и $A \subseteq B$, то $\sigma (A) \subseteq \sigma (B)$;

(s3) для любого $X \in 2^S$, $\sigma (X) = \sigma (\sigma (X))$;

(s4) если $y \notin \sigma (X)$, $y \in \sigma (X \cup x)$, то $x \in \sigma (X \cup y)$.

Дадим также определение оракулов «цикл» и «замыкание», которые понадобятся нам ниже. Пусть M – матроид, а u – некоторое понятие матроида. Если u определяет тип каждого подмножества, то через $u (M)$ обозначим все подмножества матроида M данного типа. Если u определяет оператор, то $u (A,M)$ определяет образ подмножества A на матроиде M. Инъективное отображение $W_u : (2^S, \mu) \rightarrow E (u)$, где $\mu (S)$ – совокупность всех матроидов на S , $E (u)$ – множество конкретное для каждого типа подмножеств является оракулом $O (u)$.

Например, в нашем случае для циклов (тип подмножества u = «цикл») получим, что $E (u)$ ={ДА, НЕТ} и

$$W_{цикл} : (A , M) \rightarrow \{ \text{ДА, если } A \text{ цикл в } M \text{ и НЕТ, если } A \text{ не является циклом в } M \}.$$

Для оператора замыкания $E (u) = 2^S$ и $W_\sigma : (A , M) \rightarrow \{ \sigma (A) \text{ в матроиде } M \}$.

Определения и результаты о полиномиальной сводимости двадцати двух матроидных оракулов приведены в работах [2, 3]. В частности показано, что оракул «цикл» полиномиально сводится к оракулу «замыкание».

Из оптимизационных задач на матроидах наиболее известными являются задача поиска базы минимального или максимального веса и задача поиска независимого множества максимального или минимального веса на пересечении двух матроидов.

Для их решения применяются «жадный» алгоритм и алгоритм поиска решения на пересечении двух матроидов соответственно [4].

ГАМИЛЬТОНОВЫ МАТРОИДЫ

Цикл матроида $M = (S, \Sigma)$, имеющего ранг k, называется гамильтоновым, если он содержит $k + 1$ элемент. Соответственно база B матроида гамильтонова, если существует содержащий ее гамильтонов цикл. Матроид, содержащий гамильтонов цикл, называют гамильтоновым. Понятия гамильтонова цикла, гамильтоновой базы и гамильтонова матроида рассмотрены в работах [5–9]. Приведем некоторые из результатов этих работ.

Элементы $a, b \in S$ в матроиде $M = (S, F)$ назовем связными, если существует цикл C такой, что $a, b \in C$. Матроид $M = (S, F)$ называют связным, если любые два элемента множества S являются связными. В [5] показано, что гамильтонов матроид является связным.

Степень $d(e)$ элемента $e \in S$ – это число циклов матроида $M = (S,F)$, содержащих e. Пусть $|S| = n$ и $\rho(S) = k$, $0 < k < n$. Необходимым условием для гамильтонова матроида является выполнение неравенств $d(e) \geq n - k$, для любого $e \in S$ [6].

Циклический граф $G(M) = (V, E)$ матроида M – это граф с множеством вершин $V = \Sigma$ и множеством ребер E, состоящим из пар (C_1, C_2) таких, что:

1) $C_1 \cup C_2$ связное подмножество матроида M;

2) $\rho(C_1 \cup C_2) = |C_1 \cup C_2| - 2$.

В работе [7] показано, что циклический граф гамильтонова матроида является связным.

В работах [8, 9] приведен ряд свойств, касающихся сложности распознавания гамильтонова цикла матроида относительно оракулов. В частности, указаны оракулы, для которых задача распознавания гамильтонова цикла является полиноминально разрешимой.

ГАМИЛЬТОНОВ ЦИКЛ МИНИМАЛЬНОГО ВЕСА

Рассмотрим задачу поиска гамильтонова цикла матроида минимального веса. Пусть дан матроид $M = (S, \Sigma)$ ранга k без петель с заданными весами $w(e) \geq 0$ элементов. Ниже используются следующие обозначения: list (I) – упорядоченный список элементов множества I, first (list (I)) – первый элемент этого списка, Fam – семейство подмножеств. Для решения задачи рассмотрим следующий алгоритм.

Первый шаг.

1. Упорядочиваем элементы матроида по неубыванию их весов. Пусть

$$w(e_1) \leq w(e_2) \leq \ldots \leq w(e_n).$$

2. $I_0 = \varnothing$, list $(I_0) = S$, Fam $= \{ I_0 \}$.

3. Пересчитываем веса элементов $w(e_i) := w(e_i) - w(e_1)$, $i = 1, \ldots, n$. Полагаем для множества I_0 оценку $\xi(I_0)$ и текущий рекорд для задачи f равными $w(e_1)$.

4. Полагаем

$$I_1 = \{ e_1 \}. \ I_2 = \varnothing, \ \text{list}(I_1) := \text{list}(I_0) - \sigma(e_1), \ \text{list}(I_2) := \text{list}(I_2) - \{ e_1 \}.$$

5. Приводим веса элементов из list (I_1) и list (I_2) по формуле

$$w(e) := w(e) - w(\text{first}(\text{list}(I_j))),\ e \in \text{list}(I_j),\ j = 1, 2\ .$$

Оценка $\xi(I_j) = \xi(I_0) + w(\text{first}(\text{list}(I_j))),\ j = 1, 2$.

6. Полагаем Fam = { I_1 , I_2 } .

Общий шаг.

1. Среди множеств семейства Fam находим множество I_p с минимальной оценкой. Если их несколько, берем любое из тех, которые имеют максимальное число элементов. Полагаем рекорд f равным $\xi(I_p)$.

2. Если | I_p | = k, т. е. I_p база матроида, идем к п. 5. Если | I_p | = k + 1, то I_p – искомый гамильтонов цикл. Завершаем работу.

3. Полагаем $I_p^1 = I_p \cup \{\text{first}(\text{list}(I_p))\}$, $I_p^2 = I_p$. list (I_p^1) = list (I_p) – $\sigma(I_p^1)$, list (I_p^2) = list (I_p) – first (list (I_p)) . $\xi(I_p^j) = \xi(I_p) + w(\text{first}(\text{list}(I_p^j)))$, j = 1, 2 .

4. Полагаем Fam := (Fam \ { I_p }) $\cup$ { I_p^1, I_p^2 } . Перенумеровываем множества Fam от 1 до | Fam |. Возвращаемся к п. 1 общего шага.

5. Добавляя к I_p по одному элементу из $S \setminus I_p$ в порядке неубывания их весов, находим первый из них e_l, для которого $I_p \cup e_l$ является циклом. Преобразуем множество $I_p := I_p \cup e_l$, $\xi(I_p) = \xi(I_p) + w(e_l)$ и идем к п. 1.

Как видно из описания, алгоритм должен использовать оракул «замыкание» (п. 4 первого шага и п. 3 общего шага) и оракул «цикл» (п. 5 общего шага). В силу полиномиальной сводимости оракула «цикл» к оракулу «замыкание» можно ограничиться только вторым из них.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЕ ССЫЛКИ

1. Ревякин А. М., Исаченко, А. Н. Криптоморфные системы аксиом, линейная и алгебраическая представимость матроидов // Сб. науч. тр. МИЭТ. Посвящается 70-летию профессора А. С. Поспелова. М. : МИЭТ, 2016. С. 99–109.
2. Исаченко А. Н. Полиномиальная сводимость матроидных оракулов // Изв. АН БССР. Сер. физ.-мат. наук. 1984. № 6. С. 33–36.
3. Исаченко А. Н., Ревякин А. М. О сводимости матроидных оракулов // Вестн. МГАДА. Сер.: Философские, социальные и естественные науки. 2011. № 3(9). С. 117–121.
4. Welsh D. J. Matroid Theory. London : Academic Press., 1976.
5. Исаченко А. Н., Исаченко Я. А. Свойства гамильтоновых матроидов // Международный конгресс по информатике: информационные системы и технологии : материалы междунар. науч. конгр. Респ. Беларусь, Минск, 4–7 нояб. 2013 г. Минск : БГУ. 2013. С. 538–541.
6. Исаченко А. Н., Исаченко Я. А. Гамильтоновы циклы матроида // Проблемы теоретической кибернетики : материалы XVII междунар. конф. (Казань, 16–20 июня 2014 г.). Казань : Отечество, 2014. С. 116–118.
7. Исаченко А. Н., Исаченко Я. А. Циклический граф гамильтонова матроида // Дискретная математика, алгебра и их приложения : тез. докл. междунар. науч. конф., Минск, 14–18 сент. 2015 г. Минск : Ин-т математики НАН Беларуси, 2015. С. 108–109.
8. Исаченко А. Н., Исаченко Я. А. Периметр матроида и задача коммивояжера для матроидов // XI Белорусская математическая конференция : тез. докл. междунар. науч. конф. (Минск, 5–9 нояб. 2012 г.). Минск : Ин-т математики НАН Беларуси. 2012. Ч. 4. С. 87–88.
9. Исаченко А. Н., Исаченко Я. А. О некоторых характеризациях матроидов и свойствах гамильтоновых матроидов // Соврем. информационные технологии и ИТ-образование. 2015. Т. 2 (№ 11). С. 214–219.