К ВЫЧИСЛЕНИЮ РАДИУСА УСТОЙЧИВОСТИ ОСТОВА МИНИМАЛЬНОГО ВЕСА

Е. Д. Живица, К. Г. Кузьмин

Белорусский государственный университет
Минск, Беларусь
e-mail: j.zhivitsa@gmail.com, kuzminkg@mail.ru

Рассматривается задача нахождения минимального остовного дерева. Приводится точная формула радиуса устойчивости минимального остова, позволяющая вычислять этот радиус за время, близкое к линейному относительно числа ребер графа.

Ключевые слова: задача о минимальном остовном дереве; анализ чувствительности решений; радиус устойчивости.

CALCULATION OF A STABILITY RADIUS FOR A MINIMUM SPANNING TREE

E. D. Zhivitsa, K. G. Kuzmin

Belarusian State University
Minsk, Belarus

We present an exact formula for a stability radius of an optimal solution in a minimum spanning tree problem. The formula allows calculating the stability radius in time which is extremely close to linear with respect to number of graph edges.

Keywords: minimum spanning tree problem; sensitivity analysis of solutions; stability radius

Рассмотрим хорошо известную задачу нахождения минимального остовного дерева в неориентированном связном взвешенном графе $G = G(V, E)$ с множеством вершин V и множеством ребер E. Пусть $|V| = n$ и $|E| = m$, причем $m \geq n$. Множество всевозможных остовов графа G обозначим через T, а сами остовы будем обозначать буквой t.

Будем полагать, что все ребра занумерованы и каждому ребру с номером i приписан вес $a_i \in \mathbf{R}$. Тем самым, образуется весовой вектор $a = (a_1, a_2, \ldots, a_m) \in \mathbf{R}^m$, и каждый остов $t \in T$ получает вес $f(t, a) = \sum_{e_i \in t} a_i$. Множество остовов с минимальным весом будем называть множеством оптимальных решений и обозначать $Opt(a)$.

Исследуем количественную меру устойчивости оптимальных решений $t \in Opt(a)$ к возмущениям вектора a, которые традиционно [1–5] моделируются прибавлением к нему возмущающего вектора $a' \in \mathbf{R}^m$. В качестве количественной характеристики устойчивости оптимального решения $t \in Opt(a)$ выберем радиус его устойчивости (в чебышевской метрике), определяемый [2–5] по формуле:

$$\rho(t,a) = \begin{cases} \sup \Xi, & \text{если } \Xi \neq \varnothing, \\ 0, & \text{если } \Xi = \varnothing, \end{cases}$$

где

$$\Xi = \left\{ \varepsilon > 0 : \forall a' \in \Omega(\varepsilon) \left(t \in Opt(a + a') \right) \right\},$$

$$\Omega(\varepsilon) = \left\{ a' \in \mathbf{R}^m : \left\| a' \right\|_\infty < \varepsilon \right\},$$

$$\left\| a' \right\|_\infty = \max_{i=1}^{m} | a_i | .$$

Известно (см., например, [2, 3]), что радиус устойчивости может быть найден по формуле

$$\rho(t,a) = \min_{t' \in T \setminus \{t\}} \frac{f(t',a) - f(t,a)}{\Delta(t,t')},$$

где $\Delta(t,t')$ – число ребер в симметрической разности остовов t и t', иными словами, $\Delta(t,t') = | t \cup t' | - | t \cap t' |$.

Эта формула имеет существенный недостаток: она требует полного перебора по всему множеству решений, что фактически делает ее неприменимой на практике. Нам удалось показать, что на самом деле для задачи о нахождении минимального остовного дерева такой перебор и не требуется. А именно, имеет место следующее утверждение.

Теорема. Радиус устойчивости $\rho(t,a)$ оптимального решения $t \in Opt(a)$ задачи о минимальном остове определяется формулой

$$\rho(t,a) = \frac{f(t^2,a) - f(t,a)}{2},$$

где t^2 – второй по величине минимальный остов.

Известно [6, 7], что два лучших решения задачи о минимальном остове могут быть найдены за $O(m \log \beta(m,n))$, где

$$\beta(m,n) = \left\{ j \in \mathbf{N} : \log^{(j)} n \leq \frac{m}{n} \right\},$$

а $\log^{(j)} n$ обозначает взятый j раз логарифм от числа n. Таким образом, функция $\log \beta(m,n)$ очень близка к константе.

Следствие. Радиус устойчивости $\rho(t,a)$ оптимального решения $t \in Opt(a)$ задачи о минимальном остове может быть найден за время $O(m \log \beta(m,n))$.

Отметим, что количественная мера устойчивости оптимальных решений в ряде исследований определяется не как радиус устойчивости, а как допуск ребер (дуг), т. е. для каждого ребра (дуги) находится наибольший уровень возмущений, сохраняющих оптимальность выбранного решения задачи. Наилучший известный результат в этом направлении получен в работе [8], где доказано, что допуски ребер для задачи о минимальном остове могут быть вычислены за время $O(m\log\alpha(m,n))$, где $\alpha(m,n)$ – обратная функция Аккермана.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЕ ССЫЛКИ

1. Гордеев, Э. Н. Исследование устойчивости задачи о кратчайшем остовном дереве в метрике l_1 // Журн. вычислит. математики и мат. физики. 1999. Т. 39, № 5. С. 770–778.
2. Сергиенко И. В., Шило В. П. Задачи дискретной оптимизации. Проблемы, методы решения, исследования. Киев : Наукова думка, 2003.
3. Emelichev V., Podkopaev D. Quantitative stability analysis for vector problems of 0-1 programming // Discrete Optimization. 2010. Vol. 7, № 1–2. P. 48–63.
4. Roland J., Smet Y. De, Figueira J. R. On the calculation of stability radius for multi-objective combinatorial optimization problems by inverse optimization // 4OR. 2012. Vol. 10, № 4. P. 379–389.
5. Кузьмин К. Г. Единый подход к нахождению радиусов устойчивости в многокритериальной задаче о максимальном разрезе графа // Дискретный анализ и исследование операций. 2015. Т. 22, № 5. С. 30–51.
6. Eppstein D. Finding the k smallest spanning trees // BIT Numerical Mathematics 1992. Vol. 32, № 2. P. 237–248.
7. Frederickson G. N. Ambivalent Data Structures for Dynamic 2-Edge-Connectivity and k Smallest Spanning Trees Time // SIAM Journal on Computing. 1997. Vol. 26, № 2. P. 484–538.
8. Pettie S. Sensitivity Analysis of Minimum Spanning Trees in Sub-Inverse-Ackermann Time // J. of Graph Algorithms and Applications. 2015. Vol. 19, № 1. P. 375–391.